

地 下 水 [I]

地下水の計算について

本 間 仁*

1. 地下水計算の精度

地下水の流れの計算をする際に、その基礎となる諸公式、すなわち Darcy の公式、井戸の揚水量に関するいろいろな公式などは、かなりの範囲にわたって一様に詰った砂などでできた帯水層に、水が飽和状態になっている場合について作られたものである。従つてこのような単純な土砂層の飽和地下水の問題では、かなり複雑な境界条件であっても Relaxation 法などを利用すれば、地下水圧などに関しては相当の精度が得られ、流量についても浸透係数（透水係数） k の推定値の精度の問題になつてくる。

しかし観測資料の十分でない地下水脈からの揚水、または断層を横切るトンネルへのろろ水量の予想のような問題になると、その計算は全く数量の order の問題である。例えば一つの厚さのわかたつた断層からの湧水量が、地下水の流域面積や雨量の関係から最大 10 000 l/day を越えることはないと思はれるときに、地下水計算の結果が平均の条件で（最悪条件を考えないで）100 l/day であつたとすると、実際には 10~1 000 l/day 程度と考えるべきであろう。このように自然地下水に関する計算は水力学ではなくて、水文学の問題と考えるべきものであつて、それだけに地下水についての経験のある、熟練した技術者によつて、計算されることが必要になる。

2. Darcy の k

Darcy の法則では断面積 A からの浸透流量 Q と動水勾配 I の関係を

$$Q/A = kI \dots\dots\dots (1)$$

で与え、地下水速度を $v = Q/A$ で定義している（ v を specific discharge と呼ぶこともある）。地下水の計算においてこの k 、すなわち浸透係数は最も大切な要素である。Reynolds 数を $R_e = vd/\nu$ (d は土砂の粒径、 ν は浸透する液体の動粘性係数) とすると、Darcy の法則は $R_e < 4$ の範囲で成立することが実験的に知られている。Darcy の k は $[LT^{-1}]$ の次元を持つているので、これを無次元常数に改めて単位の選び方に無関係にするには

$$k = k_0 \frac{gd^2}{\nu}, \quad v = k_0 \frac{gd^2}{\nu} I \dots\dots\dots (2)$$

と書けばよい。このときは k_0 は無次元常数であり、(2) 式は水以外の液体の浸透にも応用できる式である。また土砂が一樣な大きさの球から成つているものとするとき、 k_0 の値は球の詰り方、すなわち空隙率 λ だけによつてきまる常数である。そこで一般の流れと同様な考えで k_0 の表示式が導かれることになる。

広く用いられている Kozeny の公式は次のような考え方からきてゐる¹⁾。体積 V 、空隙率 λ の土砂をとり、土砂粒の表面積の総和を O とすると、 $\lambda V/O$ が管の動水半径に相当する量であり、空隙内の実流速は v/λ とみなされる。そこで単位体積当りの流体抵抗は次元解析によつて

$$W = c_0 \left(\frac{O}{\lambda V} \right)^2 \frac{v}{\lambda} \mu \dots\dots\dots (3)$$

で表わされる。ただし c_0 は無次元係数である。さらに $(1-\lambda)V/O$ を $1/d$ で表わすと、 d は $1/[L]$ の次元を持ち、(3) 式に $W = wI$ (w は水の単位重量) を代入することによつて

$$v = \frac{\lambda^3}{c_0 d^2 (1-\lambda)^2} \frac{g}{\nu} I = kI \dots\dots\dots (4)$$

が得られる。これから k または k_0 を求めると

$$k = \frac{g}{c_0 \nu d^2} \frac{\lambda^3}{(1-\lambda)^2}, \quad k_0 = \frac{1}{c_0 d^2} \frac{\lambda^3}{(1-\lambda)^2} \dots\dots (5)$$

非常に細かい土に対しては吸着水の占める体積比を λ_0 として、(5) 式右辺の λ^3 の代りに $(\lambda - \lambda_0)^3$ を用いることにしている。 d をフルイ目の大きさで表わすことにすると、 $d^2 d^2$ は粒の形に関する常数になり、平均径 d の球と仮定すると $d^2 d^2 \approx 36$ が得られる。そこで Donat はこの値を (5) に代入し、C.G.S. 単位で 20°C の水に対して次の測定値を得た。

	角の鋭い 金剛砂	石英および石灰の砂 (角のあるものと球状のもの)	ガラス 球
$\frac{g}{36 \nu c_0}$	75	180	400

なお浸透係数として k または k_0 でなく $k_0 d^2 = K$ を用いることも多く、これを darcy 単位で表わす。darcy 単位は圧力の強さを cm^2 当りの気圧で表わすほかは cm 、 sec を用いたもので、C.G.S. 単位と比較すると次のようになる。

$$1 \text{ darcy} = 9.613 \times 10^{-4} \text{ C.G.S. (20°C)}$$

Muskat の本に載つている砂の K の値の一例は

		空 気	水
40~45	メッシュ砂	139.13 darcy	139.40 darcy
45~100	"	24.90 "	22.00 "

砂層の中の浸透を考えるのに、以上のような考え方のほ

* 正員 工博 東京大学教授、工学部土木工学科

かに、沈殿現象も土砂粒と水との相対運動であることから、土砂粒の沈殿速度と浸透速度との関係を結びつけようとする試みもある。この問題については Hawksley の論文を簡単に紹介しておく³⁾。

直径 d 、密度 σ の球形の粒が密度 ρ の液体中を沈降するときの Stokes の降下速度 U_0 は

$$U_0 = (\sigma - \rho)g \frac{d^2}{18\mu} \dots\dots\dots (6)$$

であるが、粒の数が多くなると相互の影響が現われる。水中の砂粒の濃度を c とし、平均の降下速度を U_c とすると、濃度 c の小さい間は、Burgers によると U_c はほぼ

$$U_c \approx (1 - 6.9c)U_0 \dots\dots\dots (7)$$

で表わされる。濃度が高くなると濁水の相当粘性 μ_c を考える。Vand によれば

$$\eta_c = \eta \exp \frac{\kappa c}{1 - Qc} \dots\dots\dots (8)$$

ただし κ は粒の形、 Q は相互作用を表わす常数で、球についてはそれぞれ $5/2$ および $39/64$ である。さらに return flow の影響を考慮して導かれた公式は

$$U_c = \frac{(\sigma - \rho)gd^2}{18\mu} (1 - c)^2 \exp \frac{-\kappa c}{1 - Qc} \dots\dots\dots (9)$$

であつて、球形の砂についてはほぼ

$$U_c \approx (1 - 4.5c)U_0 \dots\dots\dots (10)$$

で表わされる。これを Steinour の実験値と比較するために、(9) 式を

$$\log_{10} \frac{U_c}{1 - c^2} = \log_{10} U_0 - \frac{\kappa}{\ln 10} \frac{c}{1 - Qc} \dots\dots\dots (11)$$

と書くと、球形については $-\kappa/\ln 10 = -1.09$ で、球形でない場合もその値は -1.09 以下とはならない。従つて κ は約 2.5 となる。また粒の数が非常に多くなつて、塊りになつて沈殿する場合には (11) の右辺の第一項はほぼ $\log_{10} (2/3 U_0)$ になつた。そこで粒の非常に多い場合は U_0 の代りに ζU_0 ($\zeta \approx 2/3$) を用いる。

(9) の運動を浸透流と比較すると、動水勾配に相当するものは $c(\sigma - \rho)/\rho$ である。また $d = 1 - \dot{c}$ であるから、(4) と (9) を比較すると

$$c_0 = \frac{1}{\zeta} \frac{1 - \lambda}{2\lambda} \ln \frac{\kappa c}{1 - Qc} \dots\dots\dots (12)$$

であつて、この値は $\lambda = 40 \sim 80\%$ の範囲で実験値とよい一致を示す。従つてこの程度の空隙率では浸透速度は分散沈殿の降下速度の約 $2/3$ である。また、土砂が浸透水のために fluidation を起す限界においては $\zeta = 2/3$ の配置から $\zeta = 1$ の配置に変わるものであることが認められている。

資料または実際の土地での k の測定法については公式が、水理公式集(土木学会)、応用水理学(丸善)などの本に述べられている。なお、浸透係数というのは流体

の側から見た名称で、土の側から見れば透水係数というのである。

3. 乱流領域での k および不飽和地下水の k

流れの抵抗係数 ζ を用いて地下水の流れの抵抗法則を

$$I = \frac{\zeta}{d} \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots (13)$$

で表わすと、Lindquist によれば $R_e < 4$ では $R_e \zeta$: 一定、 $R_e > 4$ では

$$R_e \zeta = a + b R_e \quad a, b \text{ は常数} \dots\dots\dots (14)$$

で表わされ、 $R_e = 4$ が層流と乱流の限界であることを示す。しかし実際の地下水運動では、ある範囲の地下水の流れが同時に層流から乱流に変わるようなことはむしろまれで、矢板の先端部の流れなどのように、局部的に乱流状態が現われるのが普通である。そこで内田は層流と乱流の二つの領域にわたつて $R_e > 1000$ の範囲で用いられる実験式として

$$\frac{R_e \zeta}{2k_0} = \left[1 - A + A \sqrt{1 + \left(\frac{R_e}{R_{e1}} \right)^2} \right] = \sigma \dots\dots\dots (14)$$

を与えた。ただし A は常数で 0.20 に等しく、 R_{e1} は両状態の移り変りの起る Reynolds 数で、実験による $R_{e1} = 5 \times 10^4 k_0$ である。乱流での浸透係数 k_t および地下水速度 v_t は

$$k_t = \frac{k}{\sigma}, \quad \sigma = 1 - A + A \sqrt{1 + \left(\frac{v}{v_t} \right)^2} \dots\dots\dots (15)$$

$$v_t = k_t I$$

で与えられる³⁾。なお Reynolds 数が 4 というのは常温の水で、 $d = 1 \text{ mm}$ のときに、ほぼ $v = 15 \text{ cm/hr}$ の速度に相当するものであるから、局部的な乱流の起る可能性は実際の地下水でも少くはない。

また、砂粒の間が水で満たされていない不飽和状態の地下水の運動については、空気圧を p 、moisture content を m とすると、その空気に対しては気体の方程式

$$p(\lambda - m) = RT$$

が成り立ち、このときは飽和状態での k_0 の代りに次のような k_0' を用いれば、Darcy の法則が応用できることが Irmay によつて述べられている⁴⁾。

$$k' = k_0 \frac{(m - m_0)^3}{(\lambda - m_0)^3} \dots\dots\dots (16)$$

ただし m_0 は大気圧に対する m の値である。

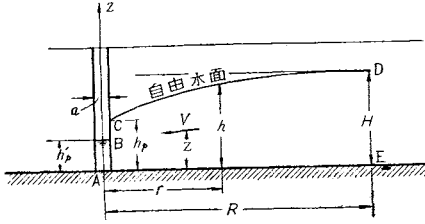
4. 井戸の揚水に関する Dupuit の公式

図-1 のように十分に広い水平帯水層に掘つた、半径 a の井戸から毎秒 Q の水を揚水するときの、井戸の中の水深 h_p と Q の関係を表わす式として Dupuit の公式が広く用いられている。その形は

$$Q = \pi k \frac{H^2 - h_p^2}{\ln(R/a)} \dots\dots\dots (17)$$

ただし H は原地下水深、 R はいわゆる影響圏半径であ

図-1



る。この公式についてはいろいろの問題があり、多くの面から検討が加えられているが、ここでは Schneebeli の論文を要約してみよう⁶⁾。

まず、実際には井戸の中の水深 h_p' と井戸周辺の水深 h_p とが等しくないから (17) の中の h_p の代りに h_p' を使った形に改めることが必要である。この場合の速度ベクトルを

$$V = -k \text{ grad } \varphi, \quad \left(\varphi = \frac{p}{w} + z \right)$$

とおき、 V の r 方向の成分を u とすると、井戸の揚水量 Q は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} Q &= -2\pi \int_0^h ur \, dz = 2\pi \int_0^h k \frac{\partial \varphi}{\partial r} r \, dz \\ &= 2\pi k \int_0^h \frac{\partial \varphi}{\partial (\ln r)} \, dz \\ \therefore Q &= 2\pi k \frac{\partial}{\partial (\ln r)} \left\{ \int_0^h \varphi \, dz - \frac{h^2}{2} \right\} \dots \dots (18) \end{aligned}$$

{ } の中を $I(r)$ で表わせば

$$Q = 2\pi k \frac{dI}{d(\ln r)} \dots \dots (19)$$

$$\therefore Q \ln(R/a) = 2\pi k [I(R) - I(a)] \dots \dots (20)$$

図-1 において DE は一つの等ポテンシャル線になり、D で水面が水平になるものとし、また BC の上では $p=0$ を代入すれば

$$I(R) = \frac{H'^2}{2}, \quad I(a) = \frac{h_p'^2}{2}$$

ただし H' は上の仮定が成り立つとしたときの H の値である。これらを (20) に代入すると、Dupuit の公式の H の代りに H' を用いたものは厳密解に一致することがわかる。

$r=a$ と $r=R$ の中間の r に対する水深を h とすると

$$I(r) = \frac{h^2}{2} \left[1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_m \right] = \frac{h'^2}{2}$$

ただし $()_m$ は $z=0$ から $z=h$ までの平均値を示す。この問題では $\partial \varphi / \partial z \geq 0$ であるから $h \geq h'$ となつて、自由水面は Dupuit の式よりも大きくなる。この差は特に井戸の近くで大きく、Bonlton によれば $r \geq 3/2 h$ になれば無視できる。

すでに知られているように、無限に広い水平帯水層では一定量の揚水を続けると R は一定ではあり得ない⁶⁾。従つて Dupuit の公式を用いる際には R のとり方は経

験者の判断にまつことになつてゐる。 R の時間的変化を求めることは現在では次のような近似方法によつてゐる。

水面の鉛直変動速度を w (下向きを正) とすると、連続方程式は w^2 を含む項を省略して

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{kh}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \dots \dots (21)$$

を用い、さらに h の平均値 h_m を h に代入して、 $\alpha = kh_m / \lambda$ を定数と考える。このように仮定すると

(21) の解は

$$w = \frac{C}{t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha t}\right) \dots \dots (22)$$

であつて、常数 C は次の条件からきめられる。

$$Q = \int_0^\infty 2\pi r \lambda w(r) \, dr = \frac{2\pi \lambda C}{t} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha t}\right) \cdot r \, dr$$

これから

$$C = \frac{Q}{4\pi \lambda \alpha} = \frac{Q}{4\pi k h_m}$$

水面低下量 $H-h = \int_0^t w \, dt$ は Ei 関数を使つて

$$H-h = -\frac{Q}{4\pi k h_m} \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\alpha t}\right) \dots \dots (23)$$

が得られるが、 $\text{Ei}(-u)$ は u の小さい値に対して $-\text{Ei}(-u) \rightarrow \ln(1/u)$

を利用すると、 $r^2/4\alpha t$ の小さい値に対しては

$$H-h = \frac{Q}{4\pi k h_m} \ln\left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{4\alpha t}{r^2}}\right) \dots \dots (24)$$

ただし r は常数で $e^{0.577} = 1.781$ に等しい。 $4\alpha t/r^2 > 10$ 程度になれば、さらに

$$H-h = \frac{Q}{2\pi k h_m} \ln\left(\frac{2}{r} \sqrt{\frac{t k h_m}{r \lambda}}\right) \dots \dots (25)$$

で表わすことができる。(17) 式の中で $H+h_p \approx 2h_m$ とおくと

$$H-h_p = \frac{Q}{2\pi k h_m} \ln\left(\frac{R}{a}\right) \dots \dots (26)$$

であるから、(25) に $r=a$, $h=h_p$ とおいた式と比較すると、 $h_p=H$ で揚水を初めてから後の R を与える次式が得られる。

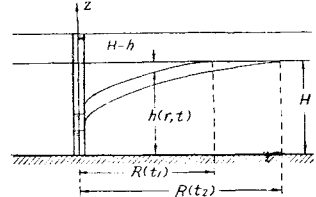
$$R = 2 \sqrt{\frac{k h_m}{r \lambda} t} \approx 1.5 \sqrt{\frac{k h_m}{\lambda} t} \dots \dots (27)$$

R の拡がる速度は

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{k h_m}{r \lambda} \frac{1}{t}} \dots \dots (28)$$

となる。なお (25) 式は筆者が他の方法で求めたものと

図-2



同じである⁷⁾。

以上のようにこの問題に関しては定常的な解答が出ないということになると、実際問題としては非常に不便である。そこで Schneebeli は井戸の中の水面降下の割合が非常に小さくなった *BT* を疑似定常流 (quasi-permanent regime) と名づけて、この状態での *R* と *Q* の関係を与えた。

井戸の周辺の水位降下量は

$$H - h_p = \frac{Q}{2\pi kh_m} \ln\left(\frac{2}{a} \sqrt{\frac{tkh_m}{r\lambda}}\right) \dots\dots\dots (29)$$

である。

時間 *T* で疑似定常流に達したものとし、それから時間 τ の間に h_p が $h_p - \epsilon$ に下がるが ϵ/τ はある限度以下の小さい値であるとする。 $\epsilon/\tau = p$ を permanence index と呼んで、実用的には $p = 1/1000$ m/hr 程度で疑似定常流になったとしてよいといっている。

$$h_p(T) - h_p(T + \tau) = \epsilon = \frac{Q}{2\pi kh_m} \ln \sqrt{\frac{T + \tau}{T}}$$

であるから

$$z = \frac{4\pi^2 kh_m \epsilon}{Q}$$

とおくと、*z* は ϵ の order の小さい値になって、*T* は次式で与えられる。

$$T = \frac{\tau}{e^z - 1} \approx \frac{\tau}{z} = \frac{Q}{4\pi kh_m} \cdot \frac{1}{p} \dots\dots\dots (30)$$

これから *T* における *R* の値を求めると

$$R(T) \approx 1.5 \sqrt{\frac{Q}{4\pi \lambda p}} \dots\dots\dots (31)$$

(30) および (31) を *Q* に m³/hr, *kh_m* に m²/sec, *p* に m/hr, *T* に hr, *R* に m 単位を用いて表わすと、次の簡易公式が得られる。

$$T \approx 2.2 \frac{Q}{kh_m p} \times 10^{-3}, \quad R \approx 0.42 \sqrt{\frac{Q}{\lambda p}} \dots\dots\dots (32)$$

時間 *T* の後には、これから求められる *R* を Dupuit の公式 (17) に代入して、試算法によつて *Q* と h_p の関係を求めればよいことになる。

なお、Ei 関数を用いた諸公式、Ei 関数の数値表は土木学会水理公式集 (改訂版) に載っている。

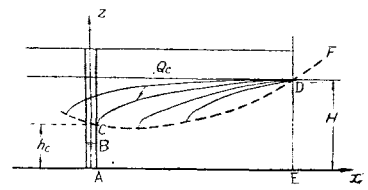
5. 井戸のまわりの流れ

前節の取扱いでもまだ井戸の中の水位と周辺の水位の関係、毛管作用の影響などの問題が残っている。毛管水についての Hall の実験的研究によれば⁸⁾、毛管水帯では浸透係数が減つた形で流れが存在する。毛管高 h_c は井戸を作るような中位の土砂では、ほとんど 50 cm を越すことはなく、そこを通る流量は井戸の 5 m の水位低下で最大 5%、10 m の水位低下で最大 2.5% 程度である。

井戸の周辺と中との水位の差によつてできる浸出面の

問題について

図-3



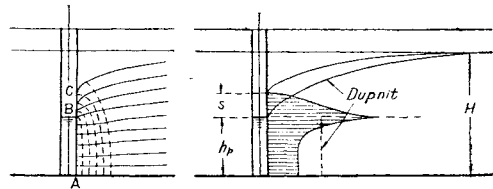
固定して考える。すなわち帯水層はそこまでしかなく、それから外は一定水位の水域と考えればよい。Jaeger は *R* と *H* を固定すると与えられた *Q* に対して $dh/dr = \infty$ になる位置があり、いろいろな *Q* の値に対してその位置を求めてゆくと、図の CF のような曲線が得られることを指摘した⁹⁾。従つて一定の揚水量 *Q* に対して井戸周辺の水深がきまり、その中で図の h_c は最大揚水量 Q_c に対応するものである。このような考え方は井戸の中の水深は揚水量に対して二次的な影響しか持たず、周辺の水位と直接の関係がないようにも見える。しかし実験室内での実験結果、および速度分布に関する考察によると、次に述べるような関係のあることが認められる。

まず浸出面での境界条件は、その上で圧力が大気圧に等しく、速度の鉛直成分 *w* は

$$w = -k$$

で与えられ、浸出面への垂直速度成分は浸出面と水平面のなす角を α とすると $v_n = -k \cos \alpha$ であるから、鉛直井戸の内面に沿つては 0 である。しかし浸出面付近の流線および等ポテンシャル面は図-4 のようになり、浸出

図-4



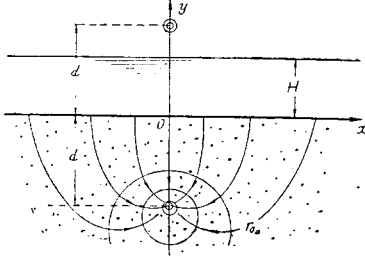
面の下端 B の付近には流線が集中して、ここでは浸出直前の速度は非常に大きい。すなわち井戸内壁に沿つての地下水速度の分布は図-4 に示すようになっていいる。この速度分布を知れば、それを Dupuit の仮定と比較することによつて、浸出面 BC の長さ *s* を推定することができる。Ehrenberger の実験および Nahrgang の理論的考察によれば *s* は次の式で表わされる¹⁰⁾。

$$s = \frac{(H - h_p)^2}{2H} \dots\dots\dots (33)$$

Nahrgang によれば (33) 式は井戸の底が不浸透層に達していない場合にも成り立つ。ただしその場合は *H* は井戸の底から原地下水面までの高さである。

6. 集水埋渠の計算

図-5



無限に広い水域の底に集水埋渠を設ける問題については、 $2d$ の距離に強さ Q の sink と source がある場合を考えれば、流線と等ポテンシャル線を書くことができる。Muskat は集水埋渠の半径 r_0 が水底からの深さ d にくらべて十分に小さいとして、水底および埋渠内のポテンシャル φ_e および φ_0 を用いて、埋渠の単位長さ当り取水量 Q を次式で表わした¹¹⁾。

$$Q = \frac{2\pi k(\varphi_e - \varphi_0)}{\ln(2d/r_0)} \quad (34)$$

この場合に sink と source は一つの鉛直線上にあつて、ポテンシャルは

$$\varphi = \frac{p}{\rho g} + y = \frac{p}{w} + y$$

の形をとる。ただし p は水圧の強さ、 y は水底面からの高さ (w は水の単位重量) である。従つて埋渠の平均圧力を p_0 (断面の一部だけを水が流れるならば、ほぼ大気圧に等しい) とすると

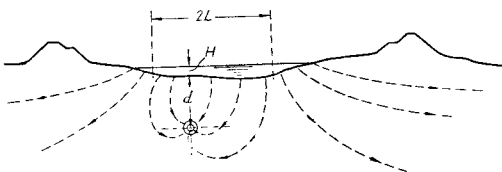
$$\varphi_e = H, \quad \varphi_0 = \frac{p_0}{w} - d$$

$$\therefore Q = \frac{2.73 k (H + d - p_0/w)}{\log_{10}(2d/r_0)} \quad (35)$$

が得られる。暗渠が川底に、流れに直角の方向に埋設されていると、図-5の水域は x 方向にかなり広く拡がっていると考へてよいから、(35) 式はそのまま用いてよい。しかし深さ d は埋渠の内径 r_0 にくらべてかなり大きいことが必要であるとともに、 d がある程度以上の大きになると浸透係数 k が一様であるという仮定が無理になるので、この式の使用できる限度は一般にあまり大きくないようである。

集水埋渠によつて取水するのは一般に平地部の河川であつて、そのような河川の周辺地下水は図-6のように河川によつて養われているのが普通である。この場合の

図-6



取水量は当然 (35) で与えられるよりも少くなる。これに対する計算法としては、まず図のように地下水系統を推定して有効幅 $2L$ をきめ、この間からの浸透水が暗渠に入るものとする。これをきめれば、幅の無限に広い場合に対する揚水量の式¹²⁾

$$Q = -2 \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} dx, \quad \phi \text{ は速度ポテンシャル}$$

の代りに次の式

$$Q = -2 \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} dx = 4dC \left[\frac{1}{d} \arctan \frac{x}{d} \right]_0^L$$

を用いばよい。ただし C は積分常数であつて、(35) から求められる Q の値 ($L = \infty$ の場合) を Q_0 で表わすと

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{[\arctan(x/d)]_0^L}{[\arctan(x/d)]_0^\infty}$$

$$\therefore Q = \frac{2Q_0}{\pi} \arctan \frac{L}{d} \quad (36)$$

もちろんこれは近似計算法であるが、 L/d の値によつて Q/Q_0 の値は次のように変化することがわかる。

L/d	2	4	6	8	10	15
Q/Q_0	0.71	0.84	0.90	0.92	0.94	0.96

これから見ると、集水埋渠の影響はあまり遠くまでおよびことはないようである。

以上に比較的計算される機会が多い問題をとり上げて、それらについての計算上の注意を述べた。その他の問題についても多くの公式が与えられているが、自然地下水の場合には、図-6にも一例を示したように、地下水全体としての体系を誤りなく把握することが最も必要である。

参考文献

- 1) J. Kozeny: *Hydraulik*, 1953, s. 390
- 2) P.G. Hawksley: *The effect of concentration on the settling of suspensions and flow through porous media. Some Aspects of Fluid Flow (The Institute of Physics)*, 1950
- 3) 石原・本間: *応用水理学*, 上巻, 1.7, 地下水 (内田茂男)
- 4) S. Irmay: *Extension of Darcy law to unsteady unsaturated flow through porous media. Proceedings of IAH*, 1956 (Symposia Darcy)
- 5) G. Schneebeli: *Sur l'hydraulique des puits. Proceedings of IAH*, 1956
- 6) 本間 仁: 地下水流の理論に関する新方法, *土木学会誌*, 21 巻 7 号 1935
- 7) 同上, または本間 仁: *水理学 (丸善)* p.248
- 8) H.P. Hall: *An investigation of steady flow toward a gravity well. La Hoille Blanche*, 1955, No. 1
- 9) C. Jaeger: *Engineering Fluid Mechanics*, 1956, p. 406
- 10) G. Nahrgang: *L'hypothese de Dupuit-Thiem pour le calcul d'un puits et l'écoulement réel au voisinage d'un puits vertical a surface libre. Proceedings of IAH*, 1956
- 11) M. Muskat: *The flow of homogeneous fluids through porous media*. 1946, p. 178
- 12) 本間 仁: *水理学 (丸善)* p. 243