

多孔質材料の弾性圧密方程式の一般解

“General Solution of the Equation of Elasticity and Consolidation for a Porous Material”

By M.A. Biot

Journ. of App. Mech. March, 1956

多孔質材料の応力場は固体部分に対する σ_{ij} と、間隙水に対する等方水圧 $\delta_{ij}\sigma$ によつて $(\sigma_{ij} + \delta_{ij}\sigma)$ で与えられる。間隙率 f 、間隙水圧 p を用いると

$$\sigma = -fp$$

次に固体部分と間隙水粒子の変位ベクトルを $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ $\mathbf{U}(U_1, U_2, U_3)$ とすると固体ヒズミは $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ 等*。いま

$$\text{div } \mathbf{u} = e = e_{ii}, \text{ div } \mathbf{U} = \epsilon \dots \dots \dots (1)$$

とすると応力—ヒズミの関係式は

$$\left. \begin{aligned} \text{i) } \sigma_{ij} &= 2Ne_{ij} + \delta_{ij}(Ae + Q\epsilon) \\ \text{ii) } \sigma &= Qe + R\epsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

のごとくなる**。ここに N, A, Q, R は物質的常数である。

応力のツライ式と、流れの運動方程式は

$$\partial(\sigma_{ij} + \delta_{ij}\sigma)/\partial x_j = 0, \text{ grad } \sigma = b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{U} - \mathbf{u}) \dots \dots \dots (3)$$

であるので(2),(3)より σ_{ij}, σ を消去して $P = A + 2N$ と記せば

$$Nf^2\mathbf{u} + (P - N + Q) \text{ grad } e + (Q + R) \text{ grad } \epsilon = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{grad } (Qe + R\epsilon) = b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{U} - \mathbf{u}) \dots \dots \dots (5)$$

流体の運動は非回転であるからスカラー φ を導入して $\mathbf{U} - \mathbf{u} = \text{grad } \varphi$

となり、別に補助ベクトル \mathbf{v} によつて、上式を満たすごとく

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \frac{R+Q}{H} \text{ grad } \varphi, \mathbf{U} = \mathbf{v} + \frac{P+Q}{H} \text{ grad } \varphi$$

とすれば(ただし $H = P + 2Q + R$) (4)(5) は簡単な形

$$\left. \begin{aligned} \text{i) } Nf^2\mathbf{v} + (H - N) \text{ grad div } \mathbf{v} &= 0 \\ \text{ii) } (Q + R) \text{ div } \mathbf{v} + Kf^2\varphi &= b \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

に帰する。ここに $K = (PR - Q^2)/H$ 。(6) i) は弾性体における変位方程式と同じでその完全解は

$$\mathbf{v} = -\text{grad}(\psi_0 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}_1) + \frac{2H}{H-N} \boldsymbol{\psi}_1 \dots \dots \dots (7)$$

ただし $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ $f^2\psi_0 = 0$ $f^2\boldsymbol{\psi}_1 = 0$

のごとく与えられる。また(6) ii) の解は $\varphi = \frac{Q+R}{b} \int_0^t \text{div } \mathbf{v} dt + \phi$

であり、上式中の ϕ は熱伝導または拡散の式

* 紙数関係上テンソル記号を用いたため原文と記号が異なつた点がある。
** M.A. Biot: Journ. of App. Physics Vol. 12, 13, 26.

$$Kf^2\phi = b \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots \dots \dots (8)$$

を満足するものである。これらより逆に順次

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= \frac{2N}{H-N} \text{ div } \boldsymbol{\psi}_1 \\ \mathbf{u} &= -\text{grad}(\psi_0 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}_1) + \frac{2H}{H-N} \boldsymbol{\psi}_1 - \frac{2N(Q+R)^2}{bH(H-N)} \\ &\quad \times \int_0^t \text{grad div } \boldsymbol{\psi}_1 dt - \frac{Q+R}{H} \text{ grad } \phi \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

が計算せられ、同様にして \mathbf{U} も求められる。

純弾性式と圧密弾性式との解の差異は後者が熱伝導の方程式をみたす ϕ を含む点にある。

以上で弾性圧密の一般論はつくされるが、他の変数を用いて別に論ぜられる。このため(2)を改めて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} + \delta_{ij}\sigma &= 2Ne_{ij} + \delta_{ij}(Se - \alpha p) \\ \alpha &= (Q+R)f/R \quad S = A - Q^2/R \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

とする。 N, S は $p=0$ なるときの Lamé の常数である。さらに間隙水の変化率に相当する新しい変数 ζ を $\zeta = -(\epsilon - e)f = p/M + \alpha e$ ($M = R/f^2$)

により導入するとただちに

$$\zeta = -f\varphi^2\varphi$$

が示され、 σ の代りに ζ を用いた結果(4),(5)は

$$Nf^2\mathbf{u} + (N+S+\alpha^2M) \text{ grad div } \mathbf{u} - \alpha M \text{ grad } \zeta = 0$$

$$kKf^2\zeta = f^2 \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

となる。ここに $k = f^2/b$ は透水係数。この式は(7)と同じくその解として

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= -\text{grad}(\psi_0 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}_1) + \frac{2(2N+S+\alpha^2M)}{N+S+\alpha^2M} \boldsymbol{\psi}_1 \\ \Delta \boldsymbol{\psi}_1 &= 0, (2N+S+\alpha^2M)f^2\psi_0 + \alpha M\zeta = 0 \end{aligned} \right\}$$

と記せる。 ζ はまた当然であるが熱伝導式を満足する。

二次元問題で、応力境界条件が与えられたとき応力函数 F を用いるのが便利であるが、いまの場合 F は

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} + \delta_{ij}\sigma &= (-)^{i+j} \partial^2 F / \partial x_i \partial x_j \quad (i, j = 1, 2) \\ \therefore (-)^{i+j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} &= 2Ne_{ij} + \delta_{ij} \left(Se + \frac{Q+R}{R} \sigma \right) \\ & \quad \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2}f^2 F = (N+S)e + \frac{Q+R}{R} \sigma \dots \dots \dots (12)$$

が逐次得られる。また(11)と適合条件式の間に e_{ij} を消去し

$$f^4 F = S f^2 e + \frac{Q+R}{R} f^2 \sigma \dots \dots \dots (13)$$

となるので(12),(13)より e を追い出せば次式が得られる。

$$(PR - Q^2)f^4 F = 2N(Q+R)f^2 \sigma \dots \dots \dots (14)$$

F, σ を含む他の一式は(5)を用いて求まる。すなわち(1),(2) ii) を参照すればそれは

$$\begin{aligned} (PR - Q^2 - NR)f^2 \sigma &= \\ &= b(H-N) \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{b}{2}(Q+R) \frac{\partial}{\partial t} f^2 F \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

(14),(15)より F または σ を消去して

$$K p^1 \sigma = b \frac{\partial}{\partial t} p^2 \sigma, \quad K p^2 F = b \frac{\partial}{\partial t} p^4 F$$

となる。この種の解は例えば σ については、 t を含む σ_1 と t を含まぬ σ_2 の和で表わすことができる。すなわち

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \text{ここに } K p^2 \sigma_1 = b \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}, p^2 \sigma_2 = 0$$

完全解(9)のうちで興味があるのは、 $\psi_1 = 0$ のときで

$$\left. \begin{aligned} u &= -\text{grad} \left(\psi_0 + \frac{Q+R}{H} \phi \right) \\ U &= -\text{grad} \left(\psi_0 - \frac{P+Q}{H} \phi \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

となる。 $p^2 \psi_0 = 0$ であるから (1) によつて

$$e = -\frac{Q+R}{H} p^2 \phi, \quad \varepsilon = \frac{P+Q}{H} p^2 \phi \dots \dots \dots (17)$$

これと (2) ii), (8) を組み合わせると σ を求める式は

$$K p^2 \sigma = b \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

一方応力成分は (2) i), (8), (16) より次式で計算できる。

$$\sigma_{ij} = -2N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\psi_0 + \frac{R+Q}{H} \phi \right) - \delta_{ij} \left\{ \frac{2N(Q+R)}{PR-Q^2} - 1 \right\} \sigma$$

上式中の ϕ は (2) ii), (8), (17) より導かれるところ

$$\sigma = b \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{または} \quad \phi = \frac{1}{b} \int_0^t \sigma dt$$

によつて知られる。

無限多孔質材料の球対称問題では $\psi_0 = C/r$ ($r^2 = x^2 + y^2$)、軸対称問題では $\psi_0 = C \log r'$ ($r'^2 = x^2 + y^2$; $i=1, 2$) が利用できる。
(中央大学 山口 柏樹)

アーチダムについて

“Arch Dams : Thier Philosophy”

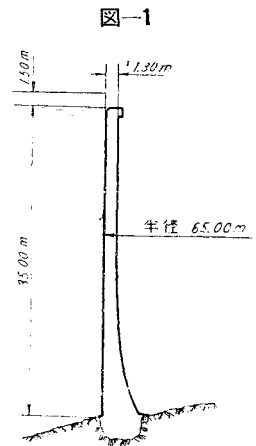
Andre Coyne

Proc. ASCE., Power Div. Vol. 82, No. POZ, Apr. 1956
(この論文は 1956 年 7 月, Knoxville, Tennessee で開かれるアーチダムに関する ASCE シンポジウムで発表される予定のものである)

約 20 年前、円筒式で計算した Pacoima, Diablo, Ariel, Marèges, Santa Luzia ダムの理論応力は約 25 ~ 30 kg/cm² であつた。今日 Rossens, Val Gallina, Tignes, Salomonde, La Palisse, Malpasset ダムでは 50, 60, 70 kg/cm² と大きくとられており、Le Gage ダムでは例外的に 110, 120 kg/cm² という大きい応力が用いられている。

Le Gage ダムは例外的に大きい応力で設計された一種の実験用ダムである (図-1)。ダムのコンクリート容積も少なく、掘削量を同一とした重力ダムの容積との比は 18/100 であるにすぎない。普通高さがこのダムの 2 倍程度のアーチダムではこの比は 1 : 3 程度である。湛水後のたわみと応力とを測定した結果、これらの値は予想した最大値をこえなかつたが、その位置は相違した。

基礎は全体としてよい岩盤であつたが、その一部が湛水後変形したため応力分布が変化しコンクリートにクラックが入つたが重大な影響はなかつた。このように計算による予想と相違したのは驚くべきことではなく、これはいかに複雑な調整計算をしても、その仮定が湛水後変化する実際の条件と異なっていることによるのである。最近の解析では plunging arch の簡単な方法がこのアーチの応力分布の予想に最もよいものと考えられている。



応力を大きくとることと平行して、アーチの断面は薄くなつてきた。上流側にアーチ下部をオーバハンクさせるのは 20 年前 Marèges ダムで始めて行われ、このドーム型は引張を受ける場所、特に中央カンチレバーの取付部に最も適している (Salamonde, Cabril その他多くのイタリーのダム)。またアーチを下流に傾ける場合がある (Enchanet, Couesque)。これは下部アーチの半径を小さくし、中央カンチレバーの底部に故意にクラックを生ぜしめ、のちこのクラックにグラウトするためである (Enchanet)。また施工の容易 (Pont-en-Royans)、基礎との関係 (Bioge)、あるいは放水路の関係 (Grangent : 5 000 m³/s の感流放水路) からアーチの形を非常に簡単にする場合がある。また逆に付属構造物のため形が複雑になる場合もある。スキージャンプ放水路を交えた発電所 (l'Aigle, Saint-Etienne-Cantalès, Chastang)、堤体下部の放水口 (Marèges, l'Aigle)、排砂口 (Castello Bode, Chastang, la Roucarié)、発電所を入れた堤体のホロー (Monteynard) がこれである。また以前には不適當だと考えられていた地点にも大胆な設計によつてアーチが建設されるようになった。すなわちいちじるしく非対称な Bin el Ouidane、グラウトによつて基礎を改良した Castillon、ケーブルにより基礎を補強した Castillon, la Chaudanne、軟弱地盤のためベースを大きくした Bort、スラストブロックの地下部分を深くした la Mandraka がその例である。

クラウンの半径方向のたわみを調整してみると、上流側にオーバハンクしているドーム型が、少くとも引張に関しては最も合理的であることが認められ、模型実験によつてもただちに確認できる。この型が最も経済的なのは特に引張側で、最も経済的な応力を用いたときである。しかし小規模あるいは普通の大きさのダムでは、特殊な型わくを用いること、および形が複雑で断面が薄いため施工速度がおちることからドーム型が最も経済的であることはまれである。経験によればアーチダムにおける引張およびクラックでさえも危険ではないことが認められている。であるから小規模あるいは普通の大きさの

ダムではクラックの危険をおかしても簡単な形とした方がよい。

アーチダムの応力の計算値と実測値とを比較すると、計算によつて実際の応力状態を求めるにはさらに研究の必要であることがわかる。特に温度による影響と基礎とについてはよくわかつていない。アメリカの試し荷重法は基礎岩盤の変形を始めて計算に入れた点ですぐれているが、岩の試験片とかダムサイトの限られた部分とかで行つた試験結果は実際の全体としての基礎とは非常に異つていものである。

イタリア、ポルトガルでは模型試験によつて設計を行う方向に進んでいる。簡単な計算により大体の形状を定めてその模型によつて試験を行い、容積と応力とが小さくなるよう形を修正してゆくのである。精密な計算は実験によつて定まつた断面の最終的なチェックとして行われるにすぎない。この方法によつて、谷底の広い谷にさえ中央カンチレバーに過度のたわみを生じさせることなくアーチダムをつくることができた(Pievo de Cadore, Karibo)。

アーチダムの進歩はコンクリートの品質の向上にもよつてい。100~250 mm の骨材を 60% 含む不連続粒度の骨材を用いセメント量 220 kg/m³ のコンクリートは 1 年で 350 kg/cm² 以上の強度を出している。これは 100 kg/cm² をこえる応力の採用を可能にしている。

(電力技術研究所 西沢 紀昭)

連続鉄桁橋の振動試験報告

“Dynamic Stresses in Continuous Plate Girder Bridges”

R.C. Edgerton, & G.W. Beecroft

Proc. ASCE., Structural Div. May, 1956

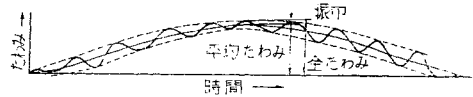
本報告は、米国道路局とオレゴン州道路課が、2つの3径間連続鉄桁橋(121'-160'-121')、North Dillard Bridge, Troutdale Bridge について行つた動的たわみ及びひずみの測定に関するものである。North Dillard Bridge は、1950.11.29 開通したが、1) 振動が多い、2) 橋面に横方向のクラックがある、3) この型式の橋の動的ひずみ、たわみ振動等の報告がない。以上の理由で次の試験をした。

a) 鉄桁のたわみと正モーメントによるひずみ、b) 負モーメントによるひずみ、c) 縦桁のひずみ、d) 横桁のひずみ。a), b) には磁気ひずみ計、たわみ計、c), d) には SR-4 抵抗線ひずみ計を使用した。

測定-1 (たわみ計 6 コ、磁気ひずみ計 24 コ) B 車を 20~45 m/h で中央線上を走行させた。測定値と計算値(AASHO による)との比較の概要を示すと最大平均応力は計算応力(衝撃なし)の 90%、また最大全応力は計算応力(衝撃なし)の 107%で、衝撃を考えた場合の 90% である。振幅の増大による全応力の増加は 20~30 m/h で顕著である。B 車による最大たわみおよび最大振幅は 42.6 m/h のとき生じ、値は 0.55 in および 0.13 in であり、A 車による最大振幅は 0.04 in である。A, B 車の重量はそれぞれ 69 240, 71 000 lbs である。

次にたわみの記録を示す。図-1 の平均たわみ、全たわみが、応力の場合にはそれぞれ平均応力、全応力となる。

図-1



次に、偏心線(東側鉄桁から 1 ft)上を走行させる。この際、東側鉄桁を載荷桁、西側を無載荷桁と名づける。

測定値は、本橋のもつよじり剛性(後述の箱型断面の形成、横桁と両鉄桁との鉄結等)のために、載荷桁は横桁を単純バリと考え横構の影響を無視した計算法による値より少い荷重(5 m/h のとき 9%)を受持つ。

閉殻が純粹捩りを受ける場合の理論を適用し、本橋の抵抗モーメントを算定する。殻として計算するためまづ横構(その伸縮と薄鉄のセン断変形との関連を考えて)鉄に置換し、これとコンクリート床版、鉄桁とで設ができる。中央径間で抵抗よじりモーメントの算定日、荷重の偏心(10 ft)により載荷桁より無載荷桁に 7%が移行しているから求める。単純バリの計算では、載荷桁は 87.7%を受持つが、よじり剛性を考慮すると 80.7%となる。測定されたひずみから算定すると 78.5%である。測定値と慣用計算との比較検討を行つたがこの方法は無条件に一般に適用できない。載荷桁の振幅はやはり 20~30 m/h で急に増す。無載荷桁の応力の振幅は既に載荷桁より大きく各走行の測定値がばらついている。ある極大値は 5 m/h のときの平均応力の 2 倍で、これは 100% の衝撃となるが、荷重が小さいためである。次に A 車を中央径間中央西側主桁に近接させて停車しておきこの荷重が振動におよぼす影響を調べた。B 車は前回と同じように走行させた。載荷桁の最大全応力は前とは異なる速度で生じたが、応力は A 車の存在により実質的には変化はない。無載荷桁の極大応力は前回より 12% 少い。

測定-II 測定負モーメントによる応力は正モーメントの場合よりばらつかず、また高速度の走行による振幅も小さい。

測定-III 平均応力、全応力の速度による変動は比較的一様である。40 m/h のとき全応力は極大で計算値の 94% である。3つの縦桁のひずみの測定で、中央桁は示方書の計算値より 8% 少いことを示した。これは輪荷重の縦桁への分布により説明できる。コンクリート床版の合成作用は考えられていないが、上下両フランジ応力の測定値の関係からこれは明らかに存在する。平均上側フランジの応力は下側のその 75% である。測定値より算定した中立軸をもとにして計算すると、下側フランジの応力は合成作用を無視した場合より 11% 減ずる。外側縦桁は示方書の値より多くの荷重を受持つ。

測定-IV 横桁の応力の変化の様子は他の部材とは異なる。ここでも測定応力は計算応力よりずっと低い。次に主桁と横桁との連結の剛度を算定する。横桁に縦桁より作用する荷重を算出するのに縦桁の応力を用い、この荷重による曲げモーメント図の傾斜を求め、これと横桁

の端から 2 ft の点のひずみとにより、反曲点は端から 2.19 ft であった。この解析から横桁端の負モーメントは 34.95 ft-kips、同一荷重による完全固定の場合の値は 92.34 ft-kips、両値より横桁連結と鉸桁のよじり剛度が約 38% であることを知る。

North Dillard Bridge の測定は、橋面起伏と振動との関連性を示したが、この検証を同一上部構造を持ち橋面が滑らかな Troutdale Bridge で行った。本橋の鉸桁の平均応力は前橋に比し約 5%、また平均たわみは約 4% それぞれ低く、応力の振幅はきわめて少い。

A, B 両試験車の固有振動数はそれぞれ 3.29 (トラック), 3.24 (トレーラー) および 2.36 (トラクター), 2.41 (トレーラー) cycle/sec でこれらの値は車のスプリングに抵抗線ひずみ計をつけ、4 ft の台から転がり降りして生ずるひずみの振動記録から求めた。

自然振動数は、変断面桁を等価断面桁(死荷重も同様)と仮定して行つた。断面 2 次モーメント、死荷重は、中央径間、側径間に對しそれぞれ 132 720 ft⁴, 2 320 lbs/ft, 124 310 ft⁴, 2 297 lbs/ft である。Timoshenko の方法で求めた固有振動数は、1 次(対称) 1.57, 2 次(逆対称) 2.50 cycle/sec で、それらに對し North Dillard Bridge の測定値は、1.70, 2.70 cycle/sec で計算値より約 8% 高く Troutdale Bridge の場合は 1.87 cycle/

sec で 10% 高い。この両値の相異は、後者には床版の横方向のクラックが非常に少くまた橋脚が短いこと、および基礎が関係していると考ええる。第 2 次振動は前者には多く表われているが後者にはなかつた。同一試験車での測定であるから、この相異の原因は前者の橋面のはなはだしい凹凸で、これと試験車の動揺とが相互に関連して逆対称振動が生じたのであろう。道路橋の振動振幅の理論は少なく、単径間の場合がわからず取扱われている。ここでは単径間と多径間構造との静たわみの関係を考えて上記理論を適用した。計算は単一集中荷重が走行するものとし、速度は両橋の固有周期と車軸重量の周期が一致するようきめ、North Dillard Bridge に 35 m/h, Troutdale Bridge に 38 m/h となつた。前者はこの速度近くで共鳴しているが、後者はそうではない。

橋面の起伏を正弦曲線で表わし、Timoshenko の理論で検討する。計算の結果振動力は 20 000 lbs でこれは大体測定された衝撃たわみを起すに必要な値である。またこの振動力が試験車の重量に加算されて作用したときの全たわみ度の計算値は、静的たわみ度より 31% 大きくなり、測定値は 32% 大きい。振動の対数減衰は、North Dillard Bridge は 1 次 (0.065), 2 次 (0.076), Troutdale Bridge は 1 次 (0.063) であつた。

(早稲田大学 平嶋 政治)

会 員 欄

〈地下水の毛管運動の公式〉

いままでに書いた本について未知の方から質問や間違いの指摘を戴くことがある。これらはすぐに調べて返事をお送りすべきであるが、最近のように用事が多くしかも人手のない大学にいては、いたづらに机の隅に積んでいてその中に紛失してしま

うことさえある。はなはだ申訳ないことと思つているが、その中の一つで、私の水理学(丸善)の p. 255 に載せたコツエニの地下水の毛管運動に関するものがあつた。これは地下水運動の基本式(p. 240 の(11.13)の第 3 式)に $w = \lambda \cdot dh/dt$ を入れ、圧力勾配には毛管現象によつて起る圧力勾配を代入すると、コツエニの式

(11.51) の第 2 項には λ が加かることになつて、質問者の言われるとおり間違いである。またコツエニは力積方程式を用いたために p. 255 の 6 行目の式が自然に出てきていることを付記しておく (Forchheimer: Hydraulics, 1930, p. 64 参照)

【正員 本間 仁】

第 3 回「風」に関するシンポジウム論文募集について

土木学会、日本海洋学会、日本火災学会、日本気象学会、日本建築学会、日本地理学会、地震学会、日本農業気象学会、日本林学会、日本航空学会の共催で第 3 回「風」に関するシンポジウムが次の要領で開催され、研究発表論文を募集いたします。このシンポジウムは「風とその影響に関する現象」について各学会の同学の士が研究発表を行うもので、会場における自由な懇談的討論に主眼を置いております。

開催日程: 11 月 12 日(研究発表), 13 日(総合講演)

開催場所: 東大理工研(目黒区駒場町 860, 小田急線東北沢, または井ノ頭線駒場下車徒歩 7 分)

研究発表: 講演時間 30 分程度(前刷は作りません)

申込要領: 9 月末日までに学会に表題と数行の概要をつけて申込むこと。

昭和 31 年 8 月 10 日 印刷

昭和 31 年 8 月 15 日 発行

土木学会誌 第 41 巻 第 8 号

印刷者 大沼正吉

印刷所 株式会社 枝報堂 東京都港区赤坂溜池 5 番地

編集兼発行者 中川一美

発行所 社団法人 土木学会 東京都千代田区大手町 2 丁目 4 番地

定 価 100 円

振替 東京 16828 番

電話 (20) 3945-4078 番