

報 文

直交異方性板理論の斜桁橋構造への
適用に関する研究

正 員 米 沢 博*

ON THE APPLICATION OF THE THEORY OF THE ORTHOTROPIC PLATE
TO THE SKEW BRIDGE

(JSCE Oct. 1955)

Hiroshi Yonezawa, C.E. Member

Synopsis It is conventional method that the calculation of right bridge is substituted for the design of skew bridge neglecting the characteristics of skew bridge, but this is irrational method. In this paper the orthotropic skew plate with two opposite edges simply supported and the other edges free is analysed by the application of the finite difference equations and using these results the deflection, bending moment, load distribution of skew bridge for various angles of skew and loads are discussed. It is pointed out that the deflection, bending moment of main girder have greater values and the bending moment of slab or floor beam have smaller values in comparison with right bridge.

1. ま え が き

著者は従来直橋の桁橋構造を直交異方性の矩形板とみなしうる場合について研究を行つてきた¹⁾。しかし、実際に架設されている桁橋では、斜橋が比較的多く、これらは構造を直交異方性板とみなすにしても、矩形板とはみなしえない。

さて直交異方性板理論が桁橋構造に対する有力かつ適切な解析手段であることは、いろいろの実験的研究で明らかにされている。しかし、斜橋に対する計算は、桁の計算がそのまま代用されており、斜橋に対する合理的な計算法の研究の必要が痛感せられる。著者は、一般の斜橋構造を直交異方性の平行四辺形板とみなして、その解を階差法によつて誘導し、斜橋としての性質を検討したので、その結果を述べたいと思う。

2. 直交異方性平行四辺形板に対する階差方程式の
誘導

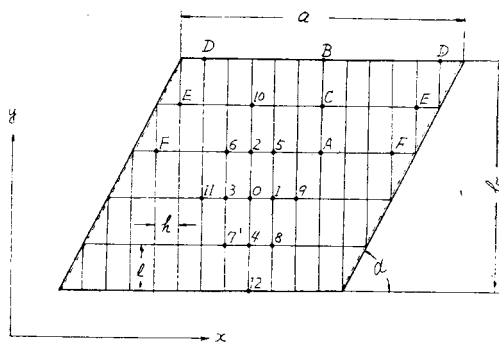
等方性平行四辺形板の階差法による解法には、F.L. Ehasz, V.P. Jensen の研究がある²⁾。しかし著者の知るかぎりでは、直交異方性平行四辺形板に関するものは、見あたらないようである。

直交異方性板のタワミ曲面の微分方程式は、

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad \dots (1)$$

で表わされる。いま 図-1 のような平行四辺形板を考

図-1



え、その一辺を x 軸に平行とし、また板の弾性の対称軸を x, y 軸とし、平行四辺形の各頂点上には格子の節点がかかるようにする。図の格子の節点 n ($0, 1, 2, 3, \dots, 12$) におけるタワミを w_n として、式 (1) を階差方程式で表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left(6r^2s^2 + 8t + 6\frac{1}{s^2} \right) w_0 - 4(r^2s^2 + t)(w_1 + w_3) \\ & - 4\left(t + \frac{1}{s^2} \right) (w_2 + w_4) + 2t(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) \\ & + r^2s^2(w_9 + w_{11}) + \frac{1}{s^2}(w_{10} + w_{12}) = \frac{h^2l^2}{D_y} q \quad \dots (2) \end{aligned}$$

ただし h : x 方向の節点間隔, l : y 方向の節点間隔
 $r = \sqrt{D_x/D_y}$, $t = H/D_y$, $s = l/h$

各節点について、式 (2) が成立し、未知数の数 w だけ方程式をうると、それより式 (1) の近似解をうるわ

* 山口大学助教授, 工学部土木工学教室

けである。しかし平行四辺形の周辺およびその隣接点では、周辺条件に応じて、式(2)の形が変わる。

図-1において、 x 軸に平行な2辺は自由、他の2辺は単純支持とする。自由辺にて曲げモーメント $M_y=0$, 支持反力 $A_y=0$ とすることは矩形板の場合と同様であるが、単純支持辺に問題がある。いま斜橋に適用する場合を考えると、主桁の方向が x 軸の方向になり、横桁もしくは床板のスパン方向は y 軸の方向となる。従つて、純然たる直交異方性板では、単純支

持辺に直角な方向の曲げモーメントを0とするのが普通であるが、ここでは、主桁方向すなわち x 方向の曲げモーメントを0とするのが適当である。以上のような考え方にもとづいて、各周辺上の点およびそれに隣接する点に対して、階差方程式を誘導すると、次の式(3)~(10)のようになる。ただし簡単のためポアソン比を0とし、階差方程式は図表式に表現し、—は自由辺、—は単純支持辺とする。

(a) 一般の内点 (例えば点A)

					$\frac{1}{S^2}$											
		$2t$	$-4t - 4\frac{1}{S^2}$	$2t$			$2t$	$-4t - 4\frac{1}{S^2}$	$2t$							
$r^2 S^2$	$-4r^2 S^2 - 4t$	$6r^2 S^2 + 8t + 6\frac{1}{S^2}$			$-4r^2 S^2 - 4t$	$r^2 S^2$	$= \frac{h^2 \rho^2}{D_y} g \dots\dots (3)$									
		$2t$	$-4t - 4\frac{1}{S^2}$	$2t$								$2t$	$-4t - 4\frac{1}{S^2}$	$2t$		
					$\frac{1}{S^2}$											

(b) 自由辺で平行四辺形の corner からはなれた点 (例えば点B)

$r^2 S^2$	$-4r^2 S^2 - 4t$	$6r^2 S^2 + 8t + 2\frac{1}{S^2}$		$-4r^2 S^2 - 4t$	$r^2 S^2$	$= \frac{h^2 \rho^2}{D_y} g \dots\dots (4)$	
		$4t$	$-8t - 4\frac{1}{S^2}$	$4t$			
					$2\frac{1}{S^2}$		

(c) 自由辺に隣接し, corner からはなれた点 (例えば点C)

		$2t$	$-4t - 2\frac{1}{S^2}$	$2t$			$= \frac{h^2 \rho^2}{D_y} g \dots\dots (5)$
$r^2 S^2$	$-4r^2 S^2 - 4t$	$6r^2 S^2 + 8t + 5\frac{1}{S^2}$			$-4r^2 S^2 - 4t$	$r^2 S^2$	
		$2t$	$-4t - 4\frac{1}{S^2}$	$2t$			
					$\frac{1}{S^2}$		

(d) 自由辺上で corner に隣接する点 (例えば点D)

0		$5r^2 S^2 + 8t + 2\frac{1}{S^2}$		$-4r^2 S^2 - 4t$	$r^2 S^2$	$= \frac{h^2 \rho^2}{D_y} g \dots\dots (6)$	
$4t$		$-8t - 4\frac{1}{S^2}$		$4t$			
					$2\frac{1}{S^2}$		

$r^2 S^2$	$-4r^2 S^2 - 4t$	$5r^2 S^2 + 8t$		0	$= \frac{h^2 \rho^2}{D_y} g \dots\dots (7)$	
		0		0		

(e) 自由辺と単純支持辺とにともに隣接する点 (例えば点E)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 0 & t \\ \hline 0 & 5r^2s^2 + 8t + 5\frac{1}{s^2} & -4r^2s^2 - 4t \\ \hline t & -4t - 4\frac{1}{s^2} & 2t \\ \hline & \frac{1}{s^2} & \\ \hline \end{array} = \frac{h^2 t^2}{D_y} \vartheta \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2t & -4t - 2\frac{1}{s^2} & t \\ \hline r^2s^2 & -4r^2s^2 - 4t & 5r^2s^2 + 8t + 4\frac{1}{s^2} & 0 \\ \hline & t & 0 & \\ \hline \end{array} = \frac{h^2 t^2}{D_y} \vartheta \dots\dots\dots (9)$$

(f) 単純支持辺に隣接する点 (例えば点F)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 0 & t \\ \hline 0 & 5r^2s^2 + 8t + 5\frac{1}{s^2} & -4r^2s^2 - 4t \\ \hline t & -4t - 4\frac{1}{s^2} & 2t \\ \hline & \frac{1}{s^2} & \\ \hline \end{array} = \frac{h^2 t^2}{D_y} \vartheta \dots\dots\dots (10)$$

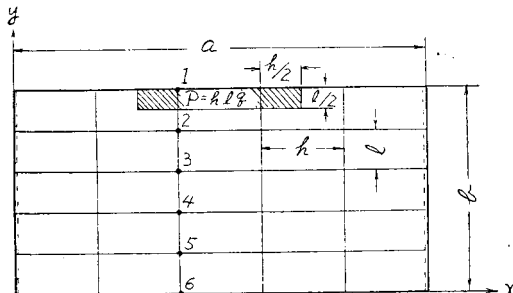
式 (3)~(10) において $h=l$, $D_x=D_y=H$ とおけば, V.P. Jensen が等方性の 45° skew slab について求めた階差方程式と, ほとんど一致する。境界条件のとり方が多少異なるので, 式 (6), (7) の一部分が少し異なる。

階差法による解の近似度を確かめるため, 図-2 のように, 相対する 2 辺単純支持, 他の 2 辺自由な直交異方性矩形板の自由辺のスパン中央に, 斜線で示すような部分的等分布荷重が載つた場合について, $D_x/D_y=64$, $a/b=2$, $H=\sqrt{D_x \cdot D_y}$ として, 図の点 1~6 における w, m_x, m_y の階差法による解並びに厳密解を比較した結果を図-3 に示す。いずれについても, 相当よい近似度を得ている。

3. 斜桁橋構造への適用

斜桁橋構造としての特長は, 斜角が大きく, 比較的

図-2



幅員の大きい場合によく現われると考えられるから, ここでは $b/a=1.5$ および $b/a=1.0$ の場合を取り扱うこととする。また, ここでは, $D_x/D_y=64, \nu=0$ の場合について計算を行い, これにもとづいて斜橋としての特長を論じたいと思う。しかし, この理論は, D_x/D_y の比較的小さい合成格子桁橋や, D_x/D_y がさらに大きい主桁並列形式の合成桁橋などにも, 同様に適用できる。

(a) 斜橋の角度と全面載荷の等分布荷重との関係
まず斜橋としての性質が, その角度に従つてどのように変化するかを, まず全面に等分布荷重が載つた場合

図-3

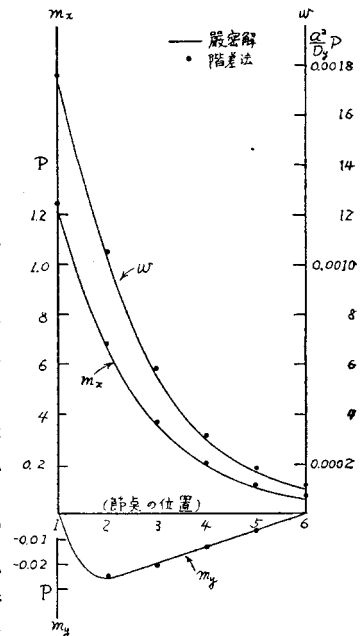


図-4 (a) 37° 斜橋の w

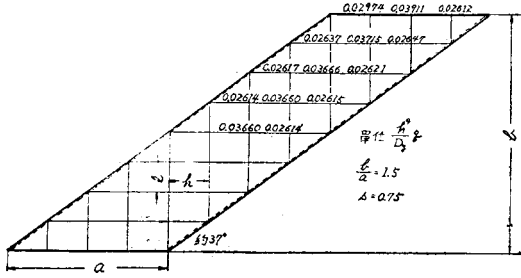


図-5 (a) 37° 斜橋の m_x

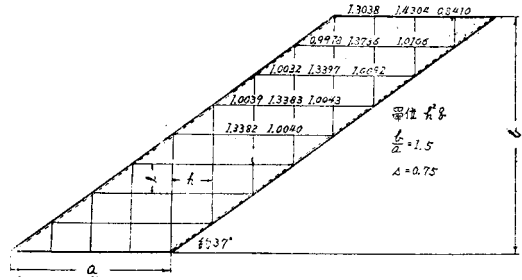


図-4 (b) 45° 斜橋の w

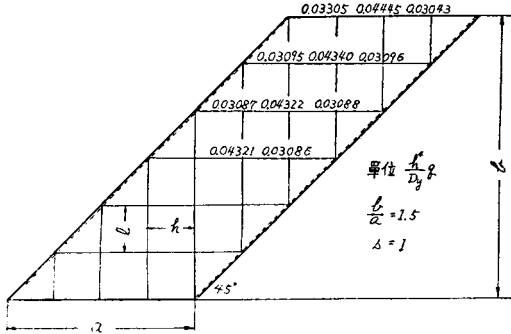


図-5 (b) 45° 斜橋の m_x

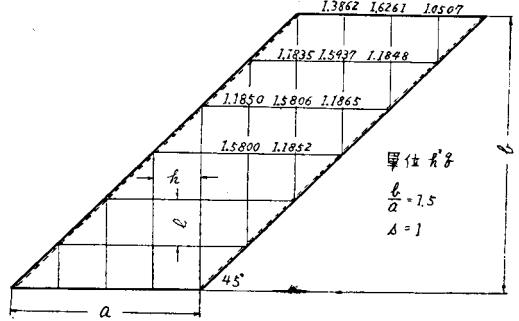


図-4 (c) 56° 斜橋の w

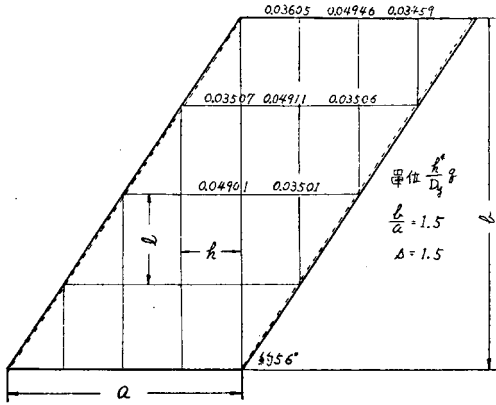


図-5 (c) 56° 斜橋の m_x

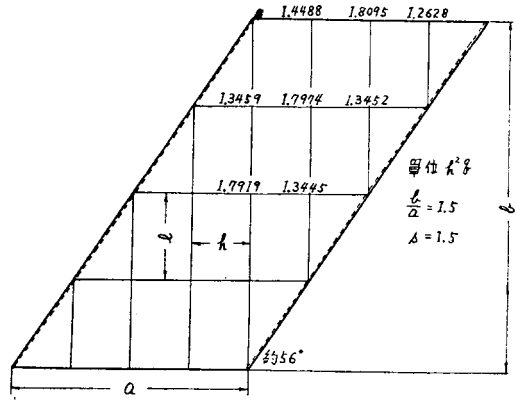


図-4 (d) 直橋の w

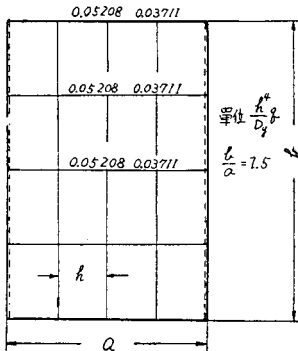
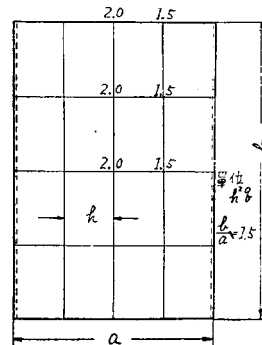


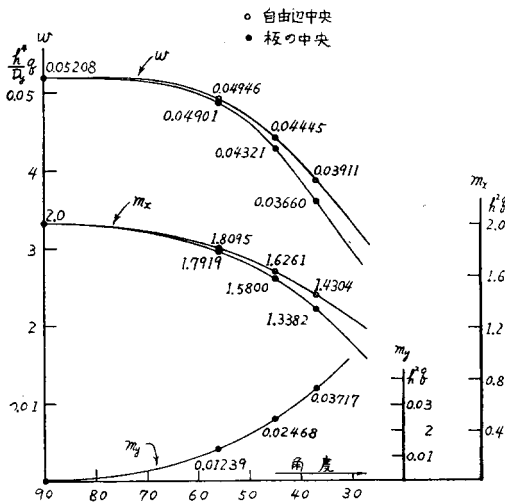
図-5 (d) 直橋の m_x



について論ずることとする。

$b/a=1.5$, 斜橋の角度 $\alpha=37^\circ, 45^\circ, 56^\circ$ の場合のタワミ (w), および主桁方向の曲げモーメント (m_x) を計算した結果を, 図-4, (a) (b) (c) (d) および 図-5, (a) (b) (c) (d) に示す。斜橋の角度 (α) に対して, タワミと曲げモーメントを図示したものを 図-6 に示す。 α が 70° あたりまでは直桁橋の場合とほとんど変わらないが, α がさらに小さくなるに従って, タワミ w と主桁方向の曲げモーメント m_x は次第に小さくなり, 逆に横桁もしくは床板のスパン方向の曲げモーメント m_y は次第に大きくなる。 $\alpha=45^\circ$ のあたりで, 直橋の場合にくらべて, w が約 15%, m_x が約 20% 小さくなり, $\alpha=30^\circ$ という相当極端な斜桁橋になると, w が約 25%, m_x が約 30% も小さくなる。

図-6 斜橋の角度と w, m_x, m_y との関係



つぎに最大曲げモーメントを生ずる自由辺についてみると, その生ずる位置が, スパンの中央から平行四辺形の頂角が鈍角をなす corner の方へ移動していることが, 図-5 の曲げモーメントの分布から判断され, この傾向も α の増加とともにいちじるしくなっている。すなわち最大曲げモーメントが, スパンの中央ではなくて, それより一方へよつた位置に生ずる。

以上のことは, いずれも, V.P. Jensen が等方性の skew slab について研究した結果と, 定性的に一致し, 注目に値する。

(b) 45° 斜桁橋と集中荷重の関係 輪荷重に対する主桁間の荷重分配の状態を知るために, 45° 斜桁橋で $b/a=1$ の場合について計算してみる。自由辺のスパン中央, および板の中央に, 部分的等分布矩形荷重が載つた場合の, 各節点のタワミを求めると, 図-7, (a), (b) のようになる。図で斜線の部分は, 荷重を示

す。これを用いて, 図-7 の自由辺のスパン中央 (点 B), および板の中央 (点 H) における, m_x の影響線をスパンの $1/2$ および $1/4$ の両断面 (ただし橋軸に対し 45° をなす) について求め, なお比較のため, 直桁橋の場合の同位置の影響線を求めると, その結果, いずれも最大曲げモーメントは, 斜橋の方が相当小さくなつており, 特に自由辺に載荷した場合には, 20% 以上小さくなつてゐる。また荷重の分配状態をみると, 載荷桁以外の桁への分配の割合も, 斜橋の方が小さくなつてゐる。すなわち桁の協力作用は斜橋になるほど低下すると判断される。

図-7 (a) 45° 斜橋の w

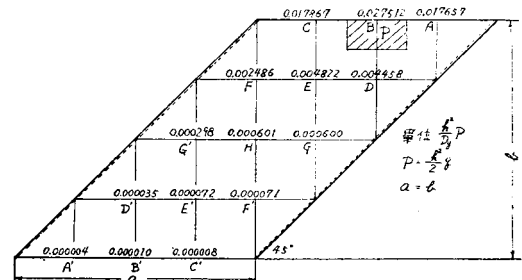
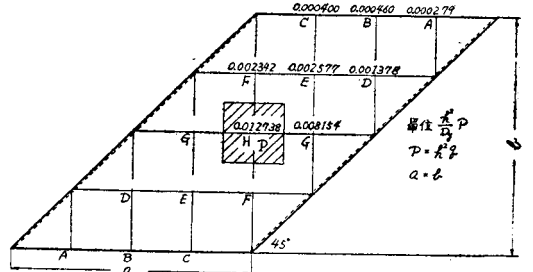


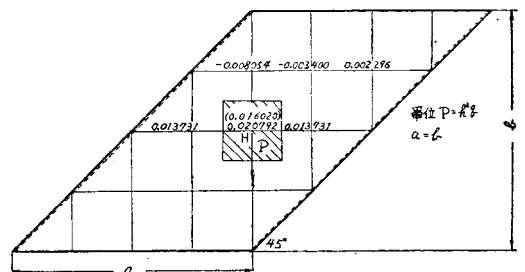
図-7 (b) 同上



これらのことから, 斜桁橋の計算をたとえ慣用計算法によらずに, 直桁橋と同様に直交異方性矩形板の計算で代用しても, なお相当の誤差が生ずることと思われる。また, 自由辺のスパン中央に載荷した場合に, わづかであるが m_x の負の値を生ずる部分が存在する点も, 直橋の場合と異なる。

つぎに点 H に載荷した場合の m_y の値を 図-8 に示

図-8



す。図においてカッコをつけたのは、直橋の場合の値である。この m_y を用いて横桁もしくは床板の設計を行いうるわけであるが、等分布荷重満載の場合と同様に、 m_x の場合とは反対に、直橋の場合より m_y が大きくなる。

これらの結果はイリノイ大学で行われた斜橋構造での実験結果と一致する³⁾。

4. 鉄筋コンクリート単純支持斜桁橋に対する数値計算例

以上にのべた理論結果を用いて、鉄筋コンクリート単純支持斜桁橋に対して数値計算を行い、直橋と比較してみる。図-9 に示すような断面の鉄筋コンクリート単純桁橋にて、補剛横桁を無視すると、 $r = \sqrt{D_x/D_y} = 8$ となり、以上の計算結果をそのまま適用できる。いまスパン 20 m, 幅員 30 m の斜桁橋（相当幅員の大きい市街橋を考えている）に、 $q = 350 \text{ kg/m}^2$ の全面等分布荷重が

載つたときの最外側主桁のタワミ (w)、最大曲げモーメント (m_x)、および床版の

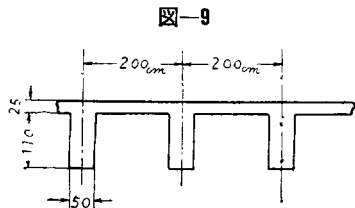


図-9

スパン曲げモーメント (m_y) を計算すると、表-1 のようになる。表の直橋の w , m_x は、直交異方形矩形板の厳密解より得たものであり、 m_y は厳密解では 0 になるので、新鋼道路橋設計示方書案解説にある連続床板中間支間曲げモーメントの式 $wl^2/14$ を用いて計算した。表からわかるように、主桁のタワミ、曲げモーメントは、斜橋の角度の変化に従って次第に小さくなり、逆に床版のスパン曲げモーメントは次第に大きくなる。すなわち斜桁橋の計算を直桁橋の計算で代用すると、主桁に対しては相当安全側になり、床板に対しては相当危険側になることがわかる。

表-1 数値計算例 ($E_c = 210\,000 \text{ kg/cm}^2$ と仮定する)

	最外側主桁のタワミ (mm)	最外側主桁の曲げモーメント (kg·m)	床板の支間曲げモーメント (kg·m)
直橋	4.33	35 000	100
56° 斜橋	4.13	31 500	108
45° 斜橋	3.67	28 000	216
37° 斜橋	3.27	24 500	325

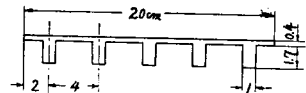
5. 斜桁橋模型の載荷実験との比較

ここでは鑄鉄製の斜桁橋模型に対する載荷実験の結果と計算結果との比較検討を行つてみる。

階差法の性質上、等分布荷重満載の場合には近似度の高いことが予想され、また全面等分布荷重による載荷

試験は困難であるので、ここでは 45° の斜橋模型に対して、集中荷重による載荷試験を行つた。斜橋模型はスパンと幅員が等しく 20 cm のもので、その断面寸法を図-10 に示す。

図-10 模型の断面寸法



す。載荷装置には、荷重検定用リング（最小目盛 4 kg）、小形ジャッキ、載荷用フレームなどを用い、耳桁並びに中央桁のスパン中央に 200 kg の載荷を行つて、各桁のスパン中央及び耳桁の 1/4 点の応力を測定した。参考までに載荷装置を写真

写真-1

に示す。なお模型材料の縦弾性係数は、模型から切りとつた試片を用いて測定した結果、 $1.05 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$ であつた。

以上の測定結果を図-11 (a) (b) (c) に示す。図の測定値は、測定応力から曲げモーメントを逆算したものである。図には、斜

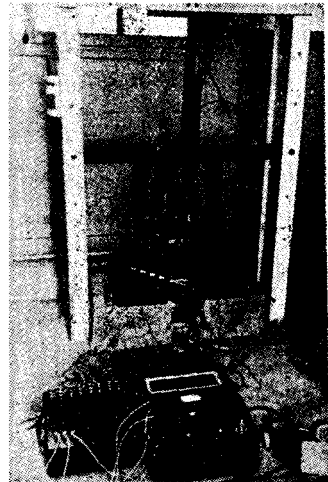


図-11 (a) 測定値との比較（中央桁に載荷）

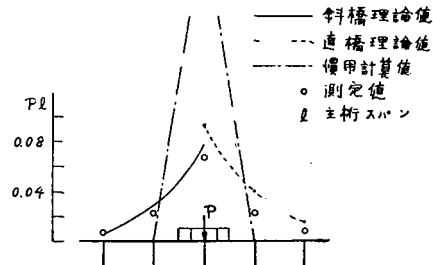


図-11 (b) 同上（耳桁に載荷）

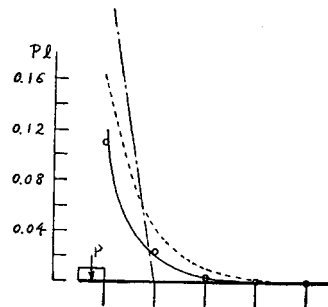
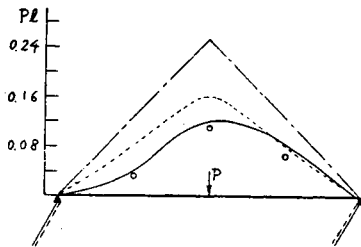


図-11 (c) 測定値との比較 (耳桁に載荷)



桁橋としての理論値、直桁橋としての厳密解、並びに慣用計算法による値がのせてある。これらからわかるように、各桁の荷重分担状況、同一桁上の曲げモーメントの非対称性など、いずれも、斜桁橋としての解析結果はよく測定値と一致している。これに対して、慣用計算法はもちろん、直桁橋としての厳密解でも、測定値と相当異なる値を与えている。

実際に架設された斜桁橋の載荷試験を行つたわけではないが、一応この模型実験の結果から、ここでのべた斜桁橋の解析方法並びに解析にあつて行つた仮定は、実用上十分有効であると判断してさしつかえないであろう。

6. 結 言

斜桁橋構造を相対する2辺にて単純支持、他の2辺にて自由な、直交異方性の平行四辺形板とみなして、これに階差法を適用し、斜橋の角度を変化させた場合および、荷重状態を変化させた場合について、主桁方向の曲げモーメント、床板の短スパン方向あるいは横桁方向の曲げモーメント、および各点のタワミを計算し、直桁橋の解との比較検討を行つた。その結果、斜桁橋の計算に対しては、慣用計算法によるのはもちろ

ん、直桁橋に対して各桁の荷重分担作用を考慮した計算で代用しても、なお不適當であつて、斜桁橋の性質を十分導入した合理的な計算を行う必要のあることがわかつた。また45°斜桁橋模型の載荷試験の結果も、慣用計算法や荷重分担作用を考慮した直桁橋としての解析結果では、測定値とかけはなれた値をうるのに対して、ここで述べたような斜桁橋の特長を導入した解析結果は、よく測定結果と一致することを示している。

主桁と横桁の斜交するものに対しては、ここで述べたような計算法をそのまま適用することはできないが、その場合でも、大体の傾向を知る上には十分参考になるものとする。

最後に種々御指導を頂いた京都大学小西教授、成岡教授に、また載荷装置の製作に多大の御援助をいただいた山口大学加賀美教授に深く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) 米沢 博：土木学会誌，39 (昭29)，1，p.38; 39 (昭29)，10，p.590; 40 (昭30)，2，p.59. 成岡昌夫・米沢 博：土木学会誌，40 (昭30)，5，p.214.
- 2) V.P. Jensen: University of Illinois Bulletin; No. 332 (1941). F.L. Ehasz: Transactions of A.S.C.E., 111 (1946) p. 1011.
- 3) N.M. Newmark, C.P. Siess, W.M. Peckham. University of Illinois Bulletin, No.375(1948) これによると、斜角30°および60°の2種、主桁5本よりなる斜桁橋構造の実験結果が報告されている。しかし実測値と比較すべき計算値には、直橋の値(弾性バリーによつて支持される連続板理論による)のみあげてあり、斜橋としての値は求めていない。

(昭.30.2.10)

起振機による鋼橋の振動特性の研究

(その一、径間 200 ft Schwedler 型ピン結トラスの場合)

正 員 橋 本 香 一*

STUDY ON CHARACTERISTICS OF STEEL BRIDGE VIBRATION BY THE MECHANICAL OSCILLATOR

(Report 1—In the case of a 200 ft-span, Schwedler Type-Pin-Connected Truss Girder)
(JSCE Oct. 1955)

By Kōichi Hashimoto, C.E. Member

Synopsis A method of evaluating vibrational characteristics and soundness of a steel bridge by means of a mechanical oscillator is described. Examples of application of this method on various types of bridges are reported. This is the first report summarizing the results of measurement of natural frequency and damping factor and evaluations of soundness on nine bridges spanning the Kiso river on the Tōkaidō Main Line.

* 四国鉄道管理局宇高船舶管理部次長