

吊橋に対する影響線解析

An Influence Line Analysis for Suspension Bridge

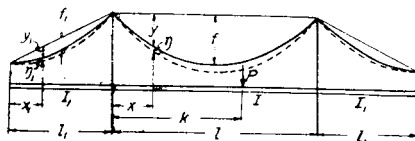
by David J. Peery

Proc. A.S.C.E., Dec. 1954

長径間の吊橋は弾性的構造物に対する普通の方法では解析できない。応力とタワミが荷重に比例しないからいろいろの荷重状態を重ね合わせることや、普通の方法で影響線を使うことはできない。吊橋に対する微分方程式は引張られているハリと同じと考えられる。そのために仮定の引張力がいつも補剛トラスに働かきかつあらゆる荷重条件で一定ならば曲げモーメント、セン断、タワミはただちに垂直荷重に比例してそれぞれの荷重条件は加算される。連続トラスに対する影響線は支点で傾斜を連続にさせるタワミ曲線を加算することによりえられる。

1. ハリの解析 普通に撓度理論の解析に使われる仮定はそのままとし、構造物の一般の次元に対する記号は図-1に示される。各径間のケーブル曲線は次式で表わされる。

図-1 Notation Diagram

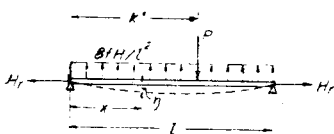


$$y = \frac{4fx}{l^2}(l-x), \text{ or } y_1 = \frac{4fx_1}{l_1^2}(l_1-x_1) \dots (1)$$

任意の径間に対する補剛トラスの曲げモーメントは $M = M_0 - H \cdot y - H_r \cdot \eta \dots (2)$

M_0 : 活荷重 P による単純バリの曲げモーメント, $H \cdot y$: $8fH/l^2$ の吊材荷重による単純バリの曲げモーメント, H_r : 死荷重及び活荷重による, それぞれのケーブル引張力の水平成分 H_w と H の和, すなわち $H_r = H_w + H$, $H_r \cdot \eta$: ケーブルの垂直変位 η による起るモーメント。図-2に示すハリは軸力 H_r , 集中荷重 P , 等布荷重 $8fH/l^2$ に抵抗する。このハリは H_r が荷重

図-2 Analogous Beam



の増加の間一定なら最後のタワミ, セン断, 曲げモーメントはすべての増加の結果を重ね合わ

すことができる。ゆえに図-2のハリは図-3, 4のハリについての値を重ね合わせることにより解析しうる。従つて曲げモーメント M とタワミ η は次式で表わされる。

$$M = Pm_p + Hm_h \dots (4)$$

$$\eta = P\tau_p + H\tau_h \dots (5)$$

m_p, τ_p は $P=1$ による曲げモーメントとタワミで, m_h, τ_h は $H=1$ のときのそれらの値である。式(4), (5)が成立するために H_r は一定と考えねばならない。

2. トラスが単純支持の吊橋 補剛トラスが交点上で連続なる吊橋の解析に先立ち図-3, 4のごときハリについて考える。おのおのの曲げモーメントとタワミは普通のハリの式の積分によりただちにえられる。

図-3 Beam with Live Load

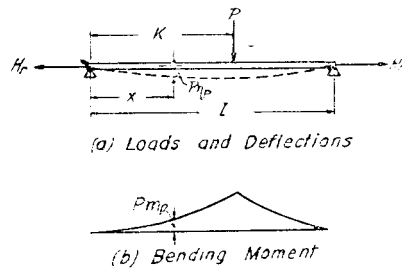
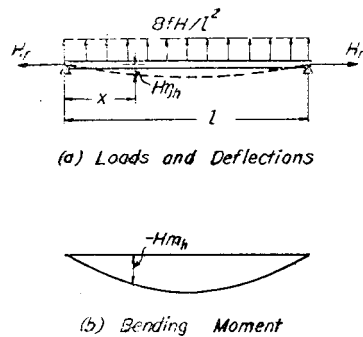


図-4 Beam with Suspender Loads



$$\frac{d^2\tau}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \dots (6)$$

$$c^2 = \frac{H_r}{EI} = \frac{H_w + H}{EI} \dots (7)$$

図-3のハリについて H_r を含む項はないから次式は(2), (6), (7)式より積分し積分常数を決めてえられる。すなわち

$$m_p = \frac{\sinh c(l-k)}{c \sinh cl} \sinh cx \quad (x < k) \dots (8)$$

$$m_p = \frac{\sinh ck}{c \sinh cl} \sinh c(l-x) \quad (x > k) \dots (9)$$

同じ方法で図-4の任意点の曲げモーメントはえられる。

ここで M_0 は(2)式で消え, y は(1)式 $H=1$ とすると,

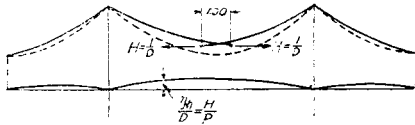
$$m_h = -\frac{8f}{c^2 l^2} (\tanh \frac{cl}{2} \sinh cx - \cosh cx + 1) \dots\dots\dots(10)$$

ゆえに $H=1$ より生ずるタワミは

$$\eta_h = \frac{8f}{Elc^2 l^2} (\tanh \frac{cl}{2} \sinh cx - \cosh cx + 1 - \frac{c^2 l^2 y}{8f}) \dots\dots\dots(11)$$

次に H の影響線は軸の引張力 H_r をともなうハリのタワミ曲線として計算される。ケーブルは 図-5 の

図-5 Deflection Curve Representing Influence Line for H



ごとく中心線で切断しその端に $H=1$ が作用する。このときトラスのタワミ η_h/D は H の影響線の縦距をあらわす。 η_h は (11) 式で示され、 D は次式であらわされる。すなわち

$$D = \frac{L_s}{AEc} - \sum \frac{8f}{l^2} \int_0^l \eta_h dx \dots\dots\dots(12)$$

L_s/AEc は定着間に計算される $H=1$ についてのケーブルの引張力の水平成分、第2項は吊材の引張力 $8f/l^2$ とタワミ η_h の積でトラスの曲げに対する項を含み側径間に対する f と l の適当な値とともにすべての径間を含む。ついで H の影響線の式は

$$\frac{H}{P} (\text{Inf. line}) = -\frac{\eta_h}{D} \dots\dots\dots(13)$$

この η_h は (11) 式の x に k を代入してえられる。曲げモーメントの影響線は (4) 式の各項を P で割つてえられ、すべての項は k の函数と考えられる。

$$\frac{M}{P} (\text{Inf. line}) = m_b (\text{Inf. line}) + m_h \frac{H}{P} (\text{Inf. line}) \dots\dots\dots(14)$$

温度応力は独立に計算され他の応力条件に加算される。温度応力から生ずるケーブル力の水平成分 H_t は

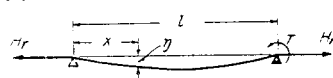
$$H_t = -wtL_t/D \dots\dots\dots(15)$$

モーメントは (4) 式より $P=0$ にして

$$M_t = H_t m_h \dots\dots\dots(16)$$

3. 連続な補剛トラスを持つ吊橋 補剛トラスが塔を通つて連続なときは塔 T_1, T_2 においてトラスの支点モーメントが径間の塔の近くで働らく。

この影響は H_r が常数なるとき他の影響と加算する。図-6 の



とき端モーメント T の影響はハリの式から、

$$M = -EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{T x}{l} - H_r \eta \dots\dots\dots(17)$$

積分して境界条件を代入することにより

$$M = T \frac{\sinh cx}{\sinh cl} \dots\dots\dots(18)$$

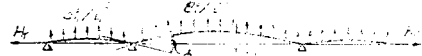
$$\eta = \frac{T}{H_r} \left(\frac{x}{l} - \frac{\sinh cx}{\sinh cl} \right) \dots\dots\dots(19)$$

T が左端のときは上式の x に $(l-x)$ を代入する。

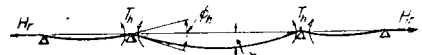
H の影響線は 図-7 (a) の η_h と 図-7 (b) の η_{ht} を加算し D_1 で割つて 図-7 (c) になる。ここで D_1 は次のように現わされ、

$$D_1 = \frac{L_s}{AEc} - \sum \frac{8f}{l^2} \int_0^l \eta_h dx - \sum \frac{8f}{l^2} \int_0^l \eta_{ht} dx \dots\dots\dots(20)$$

図-7 Influence Line for H



(a) Unit H , Simply Supported Span



(b) Corrections for Continuity



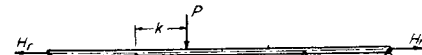
(c) Superposition of (a) and (b)

影響線は

$$\frac{H}{P} (\text{Inf. line}) = -\frac{\eta_h + \eta_{ht}}{D_1} \dots\dots\dots(21)$$

連続吊橋の任意点の影響線は 図-8 (a) の曲げモーメントと影響線から計算される。図-8 (d) に示す

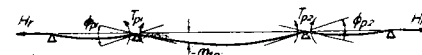
図-8 Influence for Beam Bending Moment



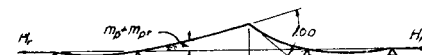
(a) Continuous Beam in Tension



(b) Simple Beam in Tension



(c) Effects of Continuity



(d) Superposition of (b) and (c)

ごとく X 点の曲げモーメントの影響線はその点での単位角変換に対するタワミ曲線である。不連続バリの影響線縦距 m_p は (8), (9) 式で計算され図-8 (b) に示す。端モーメント T_{p_1} と T_{p_2} は 図-8 (c) に示すごとく作用し、これらのモーメントから生ずるタワミは連続の影響に対して m_p の値に重合される。引張られる連続バリについての曲げモーメントの影響線の縦距は 図-8 (d) のごとく $m_p + m_{tp}$ である。連続吊橋の最終の曲げモーメント影響線は連続バリの影響にケーブルの影響 $H (m_h + m_{th})$ を加えてえられる。

$$\frac{M}{P} (\text{Inf} \cdot \text{line}) = m_p + m_{tp} + (m_h + m_{th}) \frac{H}{P} (\text{Inf} \cdot \text{line}) \dots \dots \dots (22)$$

この式は連続の影響 m_{tp} と m_{th} を含むことにより (14) 式とは異なる。

4. 結 語 長径間吊橋は影響線を使うことによりただちに解析される。すなわち cl を一定と考えることによつて各影響線を重合しうる。セン断に対する影響線は曲げモーメントの影響線と同じ方法で作られる。設計者は構造物のタワミ曲線のごとき影響線の形を想像できて各段階ごとの照査は大きな誤りを少なくする。計算の仕事は無次元の形でタワミ曲線の縦線を表にしたものの使用により便利になる。

(早大理工学研究所 鮎谷尚克)

新 型 土 圧 計

“A Soil Pressure Gauge for Laboratory Model Research”

by Peter W. Rowe

Proc. A.S.C.E., Vol. 80, No. 569, Dec. 1954

1. 概 説 圧力 $0.01 \sim 0.50 \text{ lb/in}^2 (0.7 \sim 35 \text{ g/cm}^2)$ の測定できる直径 1.50 in の土圧計を、室内実験のために試作した。現在までに土圧計設計上必要な要素を最も大規模に研究したのは Waterways Experiment Station であり、この土圧計は円板の半径方向のヒズミを抵抗線ヒズミ計で測定したものである。W.E.S. の gauge は圧力 $10 \sim 100 \text{ lb/in}^2$ を測定する目的で直径は $3.5 \sim 24 \text{ in}$ のものであつた。研究結果を要約すると、

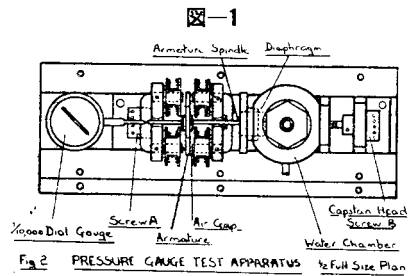
- 1) 土と構造物との境界面に置かれる土圧計(境界土圧計)は土中にその直径の $1/30$ 以上突出してはならない。
- 2) 境界土圧計の円板の中央でのタワミはその直径の $1/1000$ を越えてはならない。
- 3) 土中に埋込まれる土圧計(土中土圧計)の直径と厚さの比は 5 以上でなければならない。
- 4) 土中土圧計の円板中央のタワミは直径の $1/2000$ を越えてはならない。

以上であるが、今回試作した土圧計は磁気誘導の原

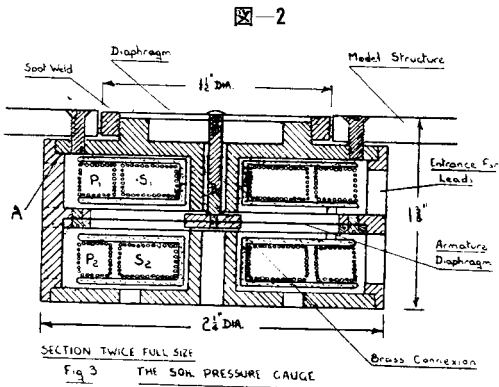
理を用い、また感度を上げるため2つの誘導回路を再

2. 原理及び設計 土圧計は2つの鉄心と中央の鉄片からできており、1次巻線は2つのコイルで反対向きに巻いてあり、2次巻線は直列に結んである。鉄片が中央にあるときは2次巻線には大きき等しく向きが反対の起電力を生ずるから電流が流れず、鉄片が動くとき片側では起電力が増え、他の側では減ずる。一次回路の向きは逆であるから結局二次側の電流は一つのコイルの大体2倍になるしまた自動的に零点を調節する利点がある。2次回路の電流は直接にあるいは増巾してミリアンペアで読んでもよいし、また整流してガルバノメーターで読んでもよい(使用電流は交流50サイクル)。なお両回路がよくバランスしていないと具合が悪い。

最初に最適の1次電流、空隙、板厚を種々の圧力範囲で求めるため、図-1のごとき装置を作つた。回路



の全空隙はネジAで調整し、鉄片の位置はネジBで調整した。Bは鉄片のついている円板と、水圧を与える部分とを動かすのである。鉄片の動きは $1 \times 10^{-4} \text{ in}$ までのダイヤルゲージを用いた。種々の組合せで試験して、 0.005° の空隙で、1次電流 0.60 Amp. のときミリアンペアの最小目盛は円板の $1 \times 10^{-6} \text{ in}$ の動きに対応することがわかつた。鉄心として軟鋼でもよいことがわかり、図-2のごとき土圧計を作つた。その主要な点は、



- 1) 各回路の磁路(flux path)が釣合つていること。fluxの向きが変わるところ、すなわちA点のようなと

ころでは、磁路は平面を越えるようにして、ネヂ面で越えさせないようにする。また1次、2次巻線とも巻数は両回路で等しい。

2) 土圧計は円板と鉄片の間の真鍮棒の影響(無視できる)を除いては温度変化に対し自動的に補償する。

3) 試験前に外部で円板を回転し、鉄片の空隙を調整して零点を読める。

4) 鉄片はそれ自身の面が平行であると同時に、各回路のコアの面と平行である。

5) 調整を要するピヴォット (pivot) とかたる部分が無く、製作が容易である。

3. 実験 24 in 角で 3/8 in 厚の鉄板の中央に平に土圧計をネヂ止めた。24 in 角の底無し箱を乗せて土をゆるく 1 in の層に順次積上げ、一様な粒度分布の川砂(大体 0.008 in), 0.03 in の一様な大きさの砂, 0.06 in の鉛の散弾を用いて試験した。装置は水圧で較正し、横方向の圧力も測定できる。

この結果 1) 一様な粒度分布の砂は円板上に水圧と同様な圧力を与える(最大タワミ 0.001 in まで、直径の 1/1250); 2) 鉛の散弾で円板直径の 1/20 の一様な径のものは中央のタワミ 2×10^{-4} in (直径の 1/6000) になるとアーチを作り始める。; 3) 0.03 in までの一様な大きさの粒子は、一様な較正曲線上に乗り、自然配合のものとは少し違うことが判明した。

実験室内では 0.01~0.5 lb/in² の主働土圧は最大タワミ 6×10^{-4} in 以内で正確に測定でき、大きな圧力に対しては円板の厚さを増加させればよい。また大きな圧力の場合は感度を下げてもよいので製造が楽になる。一方もつと小さな直径(この 1/2 くらいのも)も整流器とガルバノメーターを用いれば可能である。数カ月間で較正曲線は変わらず、また円板のヒステリシスも表われず、零点のフラツキは約 2% であつた。

以上の結果よりこれを現場で使用できる加能性が確信でき、抵抗線ヒズミ計のそれよりも測定電流が大きいので、接続、スイッチ等に問題が少ない。

(東大工学部 渡辺 隆)

三次元理想塑性体の特性曲面

by J.W. Craggs

The Quart. Journ. of Mech. & App. Mathe. March, 1954

前に Hill, Symonds が軸対称(三次元)の理想塑性体の基礎式を論じそれが双曲的でないこと、従つて一般の点で特性帯をもたぬことを示したが、本論文では軸対称を含む一般三次元問題では孤立せる特性曲面が存在する可能性を示す。これは応力及び速度成分に不連続のある剛塑性問題の解のあることを意味する。

特性曲面存在の条件: σ_{ij} を応力テンソル, u_i を速度ベクトルとすると Mises-Hencky の降伏条件を

$$\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' = 2k^2 (\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ii}) \dots\dots(1)$$

また Lévy-Mises の流れ方程式は

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i) = \lambda\sigma_{ij}' \dots\dots(2)$$

平衡方程式を

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0 \dots\dots\dots(3)$$

さて特性曲面 S とは S 上で9個の変数 σ_{ij}, u_i が与えられたとき式(1)(2)(3)が S 面を通じて法線微係数を決定するに十分でないような面をいう。

いま S 上の一点 o で oz を S に垂直に ox, oy を S 上にある直交座標をつくる。o 点で変数の x, y に関する第一階偏微分係数が与えられているとき z に関する第一階偏微分係数を求める問題を考えると、4個の応力成分 $\sigma_{xx}', \sigma_{yy}', \sigma_{zz}', \sigma_{xy}$ の少なくとも一つが o でなければ前の(1)(2)(3)と非圧縮の式を用いて z に関する微係数がすべてわかることが示されるのでこの場合 S は特性曲面ではない。ところが o の o 点で

$$\sigma_{xx}' = \sigma_{yy}' = \sigma_{zz}' = \sigma_{xy} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

であれば速度の二成分と応力の二成分の z に関する微係数が不定となることがわかり、このとき S は特性曲面となる。(4)を(1)へ入れると $\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 = k^2$, すなわち S 面に沿うせん断応力の最大値が k に等しいならその面は方程式の特性面となる。

平面変形の問題では ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p$ の応力系に対し) (4) が各点で満たされ完全な特性曲線の組をつくる。完全なる特性曲面の組をつくる三次元問題の例としては、

- i) 極座標で r 方向の速度が 0 で他の二つの速度成分が r に比例する場合
- ii) 円筒座標で r 方向の速度が 0 で周方向速度が r に比例する場合

剛塑性問題への応用: 大きな塑性流れが起り弾性ヒズミが無視されるとき剛塑性域の境界として特性面の意義がある。球対称的な運動の一例を考える。運動は方位角 θ 及び動径 r に無関係とすると平衡方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \cot\theta + 3\sigma_{r\theta} &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) & \\ + \sigma_{r\theta} \cot\theta &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

また動径及び子午線方向の速度成分を u, v またその θ に関する微分を dash で表わすと流れの方程式は

$$\frac{0}{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}} = \frac{v' + u}{2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr}} = \frac{u + v \cot\theta}{2\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}} = \frac{u' - v}{6\sigma_{r\theta}} \dots\dots(6)$$

(6) ですべての分子が 0 であるとき

$$u = -W \cos\theta \quad v = W \sin\theta$$

で材料は z 方向に W なる剛体速度をもつ。

(32 ページへ続く)