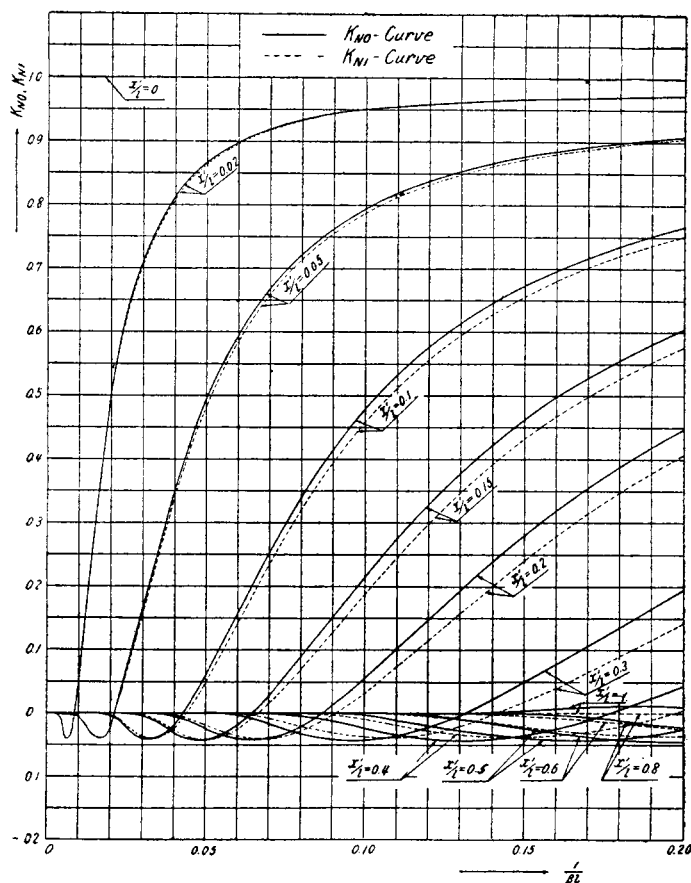


図-4 応力計算図表-3



用いた計算値すなわち (4) 式における、 $l/L=0$ 及び $l/L=1$ なる場合の計算結果に (2) 式の関係を用いて求めた値を示した。なお同表のカッコ内の数値は (4) 式において $l/L=1/2$ として直接計算した結果であり、(2) 式の関係が実的に成功することを示したものである。

この研究は昭和 29 年度文部省科学研究費補助による研究の一部として行つたものであることを付記する。

(昭. 29.7.19)

直交異方性板理論による桁橋構造の自由振動に関する研究

正員 米 沢 博*

A STUDY ON THE FREE VIBRATION OF BEAM BRIDGE BY THE THEORY OF ORTHOGONALLY ANISTROPIC PLATE

(JSCE Feb. 1955)

Hiroshi Yonezawa, C.E. Member

Synopsis The free vibration of beam bridge has been almost analysed by the theory of beam, but the result of this theory differs widely from the experimental results. The author applied the theory of orthogonally anistropic plate to the free vibration of beam bridge and experimented on the existing highway bridges and the models of beam bridge. As a result of comparing experiment with the theory it was explained that theory of orthogonally anistropic plate is a excellent method to the analysis of free vibration of beam bridge.

1. ま え が き

橋梁の自由振動はその動的剛性や耐荷力を知る点に

において重要である。従来鋼鈹桁、合成桁、鉄筋コンクリート T 形断面桁などよりなる主桁並列型式の道路橋の自由振動を求める場合、床版と桁の協力作用を考え

* 山口大学助教授，工学部土木工学教室

ず、単なる梁あるいはT形梁としての振動を求めており、このような考え方による計算値は一般に実測値と一致しない。このことは応力あるいはたわみの場合も同じであるが、床版と桁との協力作用を考えないためであると考えられる。著者はさきに直交異方性板理論による桁橋構造の曲げモーメントの解析並びに実験的研究を行つて好結果を得たので¹⁾、ここではさらにこの理論を両端単純支持の桁橋構造の自由振動の解析に適用し、従来の方法に比較して実際の測定値により近い結果を得た。さらに厳密な理論的並びに実験的研究を行う必要のある点もあるが、一応現在までに得た結果を報告したいと思う。

2. 相対する2辺単純支持され、他の2辺自由な、直交異方性矩形板の自由振動

直交異方性板の自由振動は一般に次のような微分方程式で表わされる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

.....(1)

式(1)の解法にあつては、 $H^2 \cong D_x \cdot D_y$ の3つの場合について考えるべきであるが、ここでは簡単のため、近似的に $H^2 = D_x \cdot D_y$ が成立するものとして解析を行う。式(1)を変形すれば、次のようになる。

$$r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2r \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho}{D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

.....(2)

ただし、 $r^2 = D_x/D$ 、 D_x 、 D_y ：板の x 、 y 方向の曲げ剛さ、 ρ ：板の単位面積あたりの質量、である。

式(2)において、 $w = W \sin pt$ とおくと、次のようになる。

$$r^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2r \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \frac{\rho p^2}{D_y} W = 0$$

.....(3)

いま図-1のような矩形板において、式(3)の微分方程式を満足し、かつ $y=0$ 、 $y=b$ における単純支持の境界条件を満足する解を求めると次のようになる。

$$\mu = \frac{p a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{D_y}}, \quad M = \mu + m^2 \frac{a^2}{b^2}, \quad M' = \mu - m^2 \frac{a^2}{b^2}$$

とおき、

$\mu > m^2 \frac{a^2}{b^2}$ に対して

$$W = \left\{ A_1 \cosh \frac{\pi x}{a} \sqrt{M/r} + A_2 \sinh \frac{\pi x}{a} \sqrt{M/r} + A_3 \cos \frac{\pi x}{a} \sqrt{M'/r} + A_4 \sin \frac{\pi x}{a} \sqrt{M'/r} \right\} \sin \frac{m \pi y}{b}$$

.....(4)

$\mu < m^2 \frac{a^2}{b^2}$ に対して

$$W = \left\{ A_1 \cosh \frac{\pi x}{a} \sqrt{M/r} + A_2 \sinh \frac{\pi x}{a} \sqrt{M/r} + A_3 \cosh \frac{\pi x}{a} \sqrt{-M'/r} + A_4 \sinh \frac{\pi x}{a} \sqrt{-M'/r} \right\} \sin \frac{m \pi y}{b}$$

.....(5)

($m=1, 2, 3, \dots$)

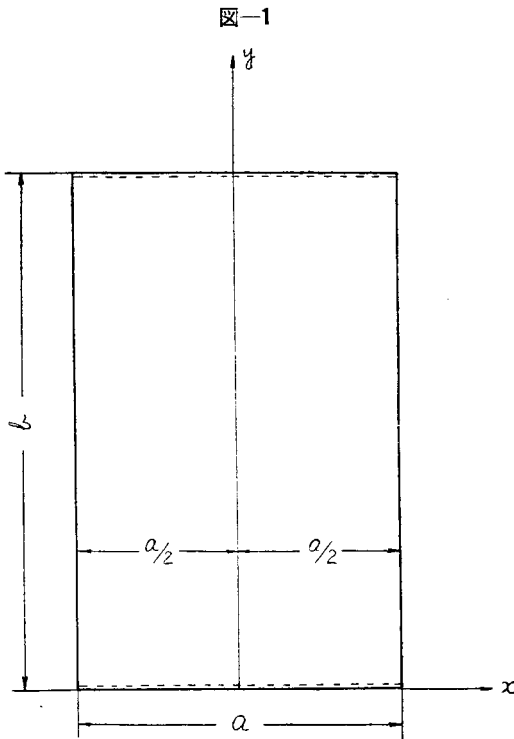
式(4)(5)に、 $x = \pm a/2$ において自由の境界条件³⁾を適用して、振動数方程式を求めると、次のようになる。

$\mu > m^2 \frac{a^2}{b^2}$ に対して

$$\left\{ \frac{M}{r} - \nu m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \sqrt{\frac{M'}{r}} \left\{ \frac{M'}{r} + (2-\nu) m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{r}} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} + \sqrt{\frac{M}{r}} \left\{ \frac{M}{r} - (2-\nu) m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} = 0$$

(y軸に対称な振動)(6)

$$\left\{ \frac{M}{r} - \nu m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \sqrt{\frac{M'}{r}} \left\{ \frac{M'}{r} + (2-\nu) m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \sinh \frac{\pi}{2}$$



$$\sqrt{\frac{M}{r}} \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} - \sqrt{\frac{M}{r}} \left\{ \frac{M}{r} - (2-\nu)m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

$$\left\{ \frac{M'}{r} + \nu m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} = 0$$

(y軸に逆対称な振動).....(7)

$\mu < m^2 \frac{a^2}{b^2}$ に対して

$$\left\{ \frac{M}{r} - \nu m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \sqrt{-\frac{M'}{r}} \left\{ -\frac{M'}{r} - (2-\nu)m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \cosh$$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{M'}{r}} - \sqrt{\frac{M}{r}} \left\{ \frac{M}{r} \right.$$

$$- (2-\nu)m^2 \frac{a^2}{b^2} \left. \right\} \left\{ -\frac{M'}{r} - \nu m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}}$$

$$\cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{M'}{r}} = 0 \text{ (y軸に対称な振動).....(8)}$$

$$\left\{ \frac{M}{r} - \nu m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \sqrt{-\frac{M'}{r}} \left\{ -\frac{M'}{r} - (2-\nu)m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \sinh \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{\frac{M}{r}} \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{M'}{r}} - \sqrt{\frac{M}{r}} \left\{ \frac{M}{r} - (2-\nu)m^2 \right.$$

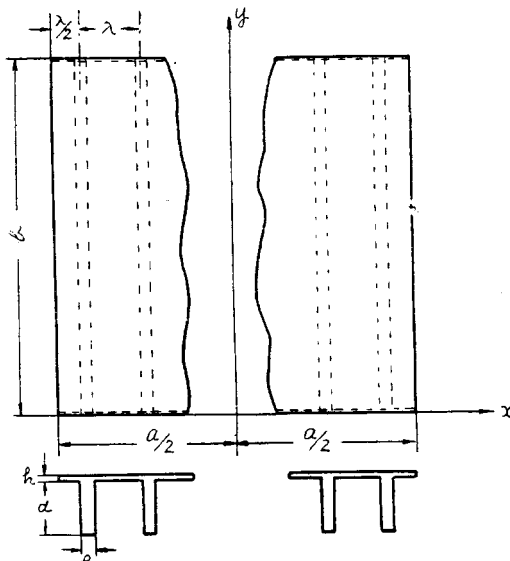
$$\frac{a^2}{b^2} \left. \right\} \left\{ -\frac{M'}{r} - \nu m^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} \sinh \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{-\frac{M'}{r}} = 0 \text{ (y軸に逆対称な振動).....(9)}$$

ただし ν はポアソン比である。

振動数方程式 (6), (7), (8), (9) はいずれも, $r=1$ とおけば, 等方性矩形板の自由振動の振動方程式¹⁾ に一致する。このうち (6), (7) 式に相当する振動は x 軸に垂直な節線を有し, 式 (8) に相当する振動は x 軸に垂直な節線がなく, スパンが b である単純梁と大差のない振動である。また式 (9) に相当する振動は存在し

図-2



ない。

3. 理論並びに実験結果に対する考察及び比較

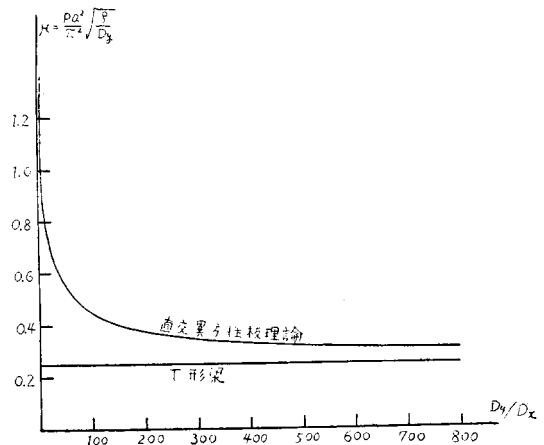
直交異方性板理論を桁橋構造に適用する場合に, D_x, D_y, H, ν などのとり方に種々の問題があるが, この場合は一応すべて, 著者が静的応力の解析にとつた値を用いる⁵⁾。すなわち D_x には床版の曲げ剛さ, D_y には 図-2 における λ を突縁圧縮有効巾とする T 形梁の曲げ剛さを λ で割つたものを用いる。

さて相対する 2 辺単純支持, 他の 2 辺自由な直交異方性矩形板の理論の適用できる場合として, 主桁並列型式の両端単純支持の桁橋構造を例にとり, かつそのなしうる最低次振動を考える。まず 図-2 の桁橋の最低次振動数を梁の理論で計算してみる。I 形梁または突縁圧縮有効巾 λ の T 形梁の断面 2 次モーメントを J_y , スパンを b , 桁の単位長さあたりの質量を ρ_b とすると次のようになる。

$$p_b = 2\pi f_b = \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho_b}} \text{.....(10)}$$

式 (10) より明らかなように, p_b は桁の断面がきまれば, その数に関係なく一定となり, これは一見して不合理である。これを床版と桁とを一体として, 直交異方性板理論で扱おうと, この不合理は除かれ, 後述するように実測値により近い値をうる。板としての計算にあたり, 振動の型として, y 方向には $m=1$ なる最低次のものをとることは, 梁と同様であるが, x 方向の振動型が問題になる。純然たる直交異方性板であれば, 式 (8) に相当する節線の全くない振動が重要であろうが, 今の場各これをとると, 梁の計算より得られる振動数とほとんど同一で, それよりやや小さい値をうる。これをとることはここでは無意味であるから, 板は式 (6) に相当する最低次振動, すなわち x 軸に垂直な 2 本の節線が生じ, y 軸に対称な振動をすると考え

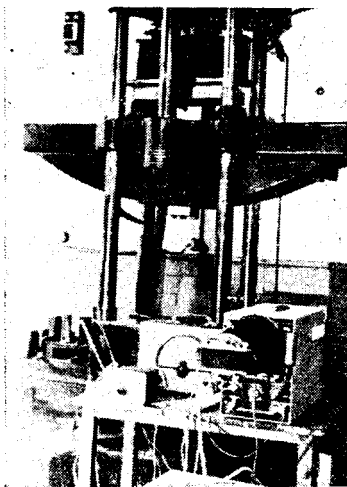
図-3



て、解析を行う。一例として $b=2a$ として、 D_x/D_y の種々な値に対する振動数を図-3に示す。図の直線はT形梁理論による振動数を表わす。桁が床版に比較して大きくなるに従い、直交異方性板理論とT形梁理論の結果は次第に一致してくるが、普通の橋梁での値と考えられる $D_y/D_x=50\sim 200$ のあたりでは、両者の差は相当いちじるしいことがわかる。以下実験値との比較を行つてみよう。

(a) 模型実験との比較 表-1, 図-2のような計12個の鋳鉄製模型について、自由振動数を測定した。すなわち、きわめて軽い打撃を桁に与えてクリスタルピックアップに生ずる振動電圧を増巾し、陰極線オシログラフ(単掃引装置付)に入れて写真にとり、振動数を求めた。実験装置を写真-1に示す。単純支持の境界条件を近似的に満足させるために、単純支持辺は円筒面で上下より約4tの荷重をかけた。直交異方性板理論、測定値、突縁圧縮有効巾 λ のT形梁と考えた梁理論より得られる周期を表-2に、また測定したオシログラフ写真の一例を写真-2に示す。なお計算にあ

写真-1 測定装置



つては模型の弾性係数は 1×10^6 kg/cm², 比重は 7.3, $\nu=0$ とした。写真-2の小さい正弦波は1000サイクルまたは500サイクルの時間軸として入れたものである。いずれも著者の理論結果は、従来のT形梁の計算値より測定値に近い値を与えてい

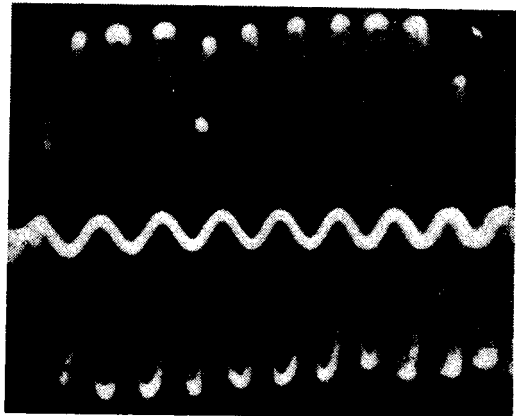
表-1 模型の寸法

模型 番号	①				②				③			
	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
d(cm)	5	3.5	2	0.5	5	3.5	2	0.5	5	3.5	2	0.5
b(cm)	40				40				40			
a(cm)	20				20				20			
λ (cm)	4				4				2.5			
e(cm)	1				1				1			
h(cm)	0.5				0.5				0.5			
桁の数	5				5				8			
床版支承部のハンチ	なし				あり				なし			

表-2 模型の周期(sec)の理論値、測定値の比較

模型番号		直交異方性板理論	測定値	T形梁
①	Ⓐ	0.001 25	0.001 23	0.001 60
	Ⓑ	0.001 54	0.001 32	0.002 22
	Ⓒ	0.001 76	0.001 45	0.003 69
	Ⓓ	0.001 85	0.001 47	0.011 24
②	Ⓐ	0.001 25	0.001 15	0.001 60
	Ⓑ	0.001 56	0.001 25	0.002 24
	Ⓒ	0.001 82	0.001 30	0.004 24
	Ⓓ	0.001 93	0.001 32	0.010 87
③	Ⓐ	0.001 33	0.000 93	0.001 64
	Ⓑ	0.001 59	0.000 96	0.002 25
	Ⓒ	0.001 88	0.001 27	0.003 64
	Ⓓ	0.001 94	0.001 35	0.010 31

写真-2 周期測定の一例
模型①Ⓐ正弦波は500サイクル



模型②Ⓐ正弦波は1000サイクル

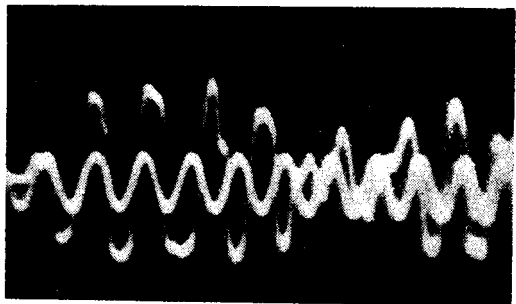
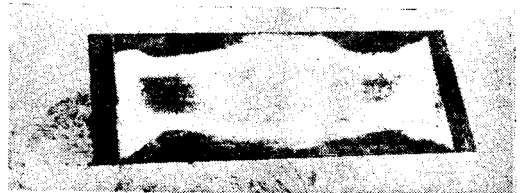


写真-3 節線の一例



る。かつT形梁としての値は測定値と相当な差を示し、桁が小さくなるに従つてその差はいちじるしくなる。また桁高の変化により周期の变化する様子など

は、T形梁として計算では全く説明がつかないが、直交異方性板理論ではよく説明される。

つぎにきわめて微細なよく乾燥させた砂を板上にまいて、振動時の節線を調べた一例を写真-3に示す。これより桁数に関係なくx軸に垂直な2本の節線を生じ、y軸に対称に振動することがわかる。ただ厳密には直交異方性板でないものを、直交異方性板として扱っているの、節線の生ずる位置やその形が理論と全く一致するようにはゆかない。

(b) 鶴沼橋 (鉄筋コンクリートT形断面桁並列橋)

の測定値との比較 神奈川県土木部、建設省土木研究所の共同で行われた鶴沼橋の測定結果⁶⁾を直交異方性板理論により検討しよう。本橋は図-4のようなT形断面桁8本並列の橋梁である。この橋の測定結果によると、突縁圧縮有効巾を種々変えたT形梁としての計算も、矩形板としての計算もいづれも実測値と一致していない。これに対し $E_c = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.15$, 桁高の平均値を 62 cm とし、鉄筋を無視すれば、 $D_y/D_x \approx 56$ となるので、この値を用い、式(6)より最低振動数を計算すれば表-3のとおりである。なおこ

図-4 鶴沼橋

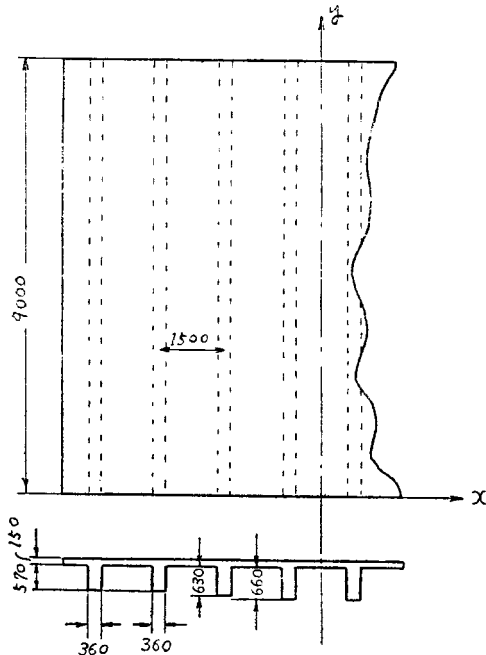


表-3 鶴沼橋の測定値との比較

測定値	有効巾 150 cm のT形梁	有効巾 300 cm のT形梁	四辺単純支持断面矩形板	直交異方性板理論	
周期 (sec)	0.040 ~ 0.065	0.103 ~ 0.106	0.076 ~ 0.077	0.0088 ~ 0.0093	0.062

の表にはT形梁としての計算値を付記してある。T形梁としての値は、普通に行われる突縁圧縮有効巾のとり方では全くあわず、有効巾 3 m という相当無理な値を用いてもなお一致しない。これに対して著者の直交異方性板理論によるとよく一致する。表の四辺単純板としての値は、測定値が床版の振動数を与えているのではないかをチェックするため行われたものである。

(c) 橋本橋 (主桁並列式全溶接上路鋼鈹桁橋) の測定値との比較 この橋梁は図-5に示すような4本主桁並列型式で、簡単なスラブ止めがしてある程度であるが、応力測定の結果は、合成桁としての性質を相当もつていた⁷⁾。応力測定を主目的に行つたため、厳密な振動測定を行つたわけではなく、例としては適当でないが、一応これを用いることにする。試験自動車が通過した際に誘起された自由振動を、桁にとりつけた田辺式撓度振動記録器により記録し、これを実測値としてとる。いま $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $E_s/E_c = 10$,

図-5 橋本橋

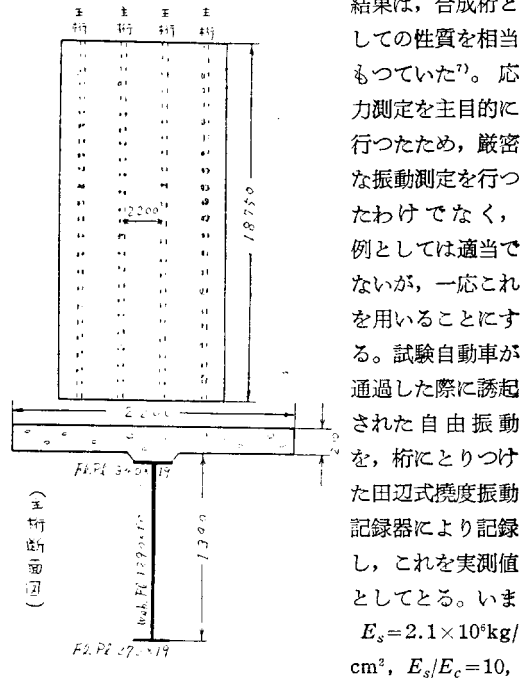


表-4 橋本橋の測定値との比較

	測定値	有効巾 220 cm の合成桁	直交異方性板理論
周期 (sec)	0.067	0.086	0.049

$\nu = 0.15$ として $D_y/D_x \approx 118$ をうる。これを用い、式(6)より求めた結果と、T形梁としての値と測定値を比較すると表-4のようになる。この場合はあまり好結果とはいえないが、これは振動測定を主目的にしなかつたため測定値が不正確なこと、桁数の少ないことなどに帰因すると考えられる。厳密な振動測定を行い、理論的計算においてHや境界条件の選び方を適当にすると、さらによい結果が得られるだろうと思われる。

