資　　料

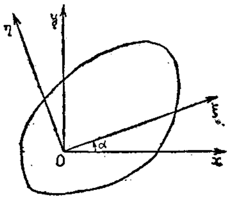
断面の主軸及び主応力面の決定方法

正員　春日屋伸昌*

1．断面の主軸の決定方法

図—1 のように，共通原点をもつ2組の直交座標軸 x, y；ξ, η のなす角を α；x 軸，y 軸に関する断面二次モーメントを I_x, I_y；断面相乗モーメントを I_{xy} とすれば，ξ 軸，η 軸に関する断面二次モーメント I_ξ，I_η は，

図—1



$$\left.\begin{aligned} I_\xi &= I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha \\ I_\eta &= I_x\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha \end{aligned}\right\}$$

I_ξ が最大（最小）となるとき I_η が最小（最大）となるから，いま，I_ξ のみについて考え，$0^\circ \leqq \alpha < 180^\circ$ として，I_ξ が最大または最小となる α を求めれば，

$$dI_\xi/d\alpha = (I_y - I_x)\sin 2\alpha - 2I_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

より，$\tan 2\alpha = 2I_{xy}/(I_y - I_x)$ をうる。これを満足する α の値は，$0^\circ \leqq \alpha < 180^\circ$ の範囲内で2つ存在し，そのいずれで I_ξ が最大または最小となるかは，求められた α の値を $d^2I_\xi/d\alpha^2$ に代入し，その符号によって定められる。

$$\begin{aligned} d^2I_\xi/d\alpha^2 &= 2(I_y - I_x)\cos 2\alpha + 4I_{xy}\sin 2\alpha \\ &= 2\{(I_y - I_x) + (4I_{xy}^2)/(I_y - I_x)\}\cos 2\alpha \\ &= 2\{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2\}\cos 2\alpha/(I_y - I_x) \end{aligned}$$

$d^2I_\xi/d\alpha^2 < 0$ ならば，その α の値で I_ξ は最大。

$d^2I_\xi/d\alpha^2 > 0$ ならば，その α の値で I_ξ は最小。

ところで，この計算をいちいち行うのは繁雑なので，I_x と I_y との大小関係，及び I_{xy} の正負によって，I_ξ が最大及び最小となる角 α の範囲を求めておけば便利である。

$0^\circ \leqq \alpha < 90^\circ$ の範囲内の α の値で，最大か最小かの主軸は必ず一つだけ存在するから，この主軸が最大または最小となる条件を求めればよい。

（I）$I_x > I_y$，$I_{xy} > 0$

$\tan 2\alpha = 2I_{xy}/(I_y - I_x) < 0$　∴ $45^\circ < \alpha < 90^\circ$

$\cos 2\alpha < 0$，$I_y - I_x < 0$ ∴ $d^2I_\xi/d\alpha^2 > 0$，I_ξ は最小。

（II）$I_x > I_y$，$I_{xy} \leqq 0$

$\tan 2\alpha \geqq 0$　∴ $0^\circ \leqq \alpha < 45^\circ$

$\cos 2\alpha > 0$，$I_y - I_x < 0$ ∴ $d^2I_\xi/d\alpha^2 < 0$，I_ξ は最大。

（III）$I_x < I_y$，$I_{xy} \geqq 0$

$\tan 2\alpha \geqq 0$　∴ $0^\circ \leqq \alpha < 45^\circ$

$\cos 2\alpha > 0$，$I_y - I_x > 0$ ∴ $d^2I_\xi/d\alpha^2 > 0$，I_ξ は最小。

（IV）$I_x < I_y$，$I_{xy} < 0$

$\tan 2\alpha < 0$　∴ $45^\circ < \alpha < 90^\circ$

$\cos 2\alpha < 0$，$I_y - I_x > 0$ ∴ $d^2I_\xi/d\alpha^2 < 0$，I_ξ は最大。

（V）$I_x = I_y$，$I_{xy} \neq 0$

$dI_\xi/d\alpha = -2I_{xy}\cos 2\alpha = 0$ より，$\alpha = 45^\circ$

従って，$I_{xy} > 0$ ならば，I_ξ は最小。

$I_{xy} < 0$ ならば，I_ξ は最大。

以上の結果をまとめたものが**表—1** である。ここで，I_1，I_2 はそれぞれ最大及び最小主断面二次モーメントを表わし，

$$I_1 = \{I_x + I_y + \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}\}/2$$

$$I_2 = \{I_x + I_y - \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}\}/2$$

また，α_1，α_2 はそれぞれ最大及び最小主軸が x 軸となす角である。

表—1

条件		主断面二次モーメント	
断面二次モーメント	断面相乗モーメント	I_1	I_2
$I_x \geqq I_y$	$I_{xy} > 0$	$135^\circ \leqq \alpha_1 < 180^\circ$	$45^\circ \leqq \alpha_2 < 90^\circ$
$I_x > I_y$	$I_{xy} \leqq 0$	$0^\circ \leqq \alpha_1 < 45^\circ$	$90^\circ \leqq \alpha_2 < 135^\circ$
$I_x < I_y$	$I_{xy} \geqq 0$	$90^\circ \leqq \alpha_1 < 135^\circ$	$0^\circ \leqq \alpha_2 < 45^\circ$
$I_x \leqq I_y$	$I_{xy} < 0$	$45^\circ \leqq \alpha_1 < 90^\circ$	$135^\circ \leqq \alpha_2 < 180^\circ$

［注意］

(1) 表中の等号は，同行のものを同時にとる。

(2) $I_x = I_y$，$I_{xy} = 0$ の場合は，明らかに $I_1 = I_2 = I_x = I_y$ となるから表には省略してある。

例題 1　**図—2** に示す山形鋼の O 点に対する主軸の方向及び主断面二次モーメントを求めよ。

［解］　図のように x 軸，y 軸をとれば，

$$I_x = 0.7\times5.0^3/3 + 6.8\times0.7^3/3 = 29.9441\ \text{cm}^4$$

$$I_y = 0.7\times7.5^3/3 + 4.3\times0.7^3/3 = 98.9291\ \text{cm}^4$$

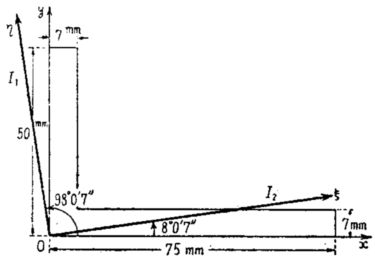
$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_{y=0}^{y=5.0}\int_{x=0}^{x=0.7} xy\,dx\,dy + \int_{y=0}^{y=0.7}\int_{x=0.7}^{x=7.5} xy\,dx\,dy \\ &= (0.7^2/2)\cdot(5.0^2/2) + (0.7^2/2)\cdot(7.5^2 - 0.7^2)/2 \\ &= 9.8931\ \text{cm}^4,\ \tan 2\alpha = 2\times9.8931/(98.9291 \end{aligned}$$

* 中央大学助教授，工学部土木教室

$-29.9441)=0.2868189$

$\therefore\ 2\alpha=16°0'14''$, $196°0'14''$ $\therefore\ \alpha=8°0'7''$, $98°0'7''$

図—2



さて，$I_x<I_y$，$I_{xy}>0$ であるから，表—1 より，

$90°\leqq\alpha_1<135°$，$0°\leqq\alpha_2<45°$

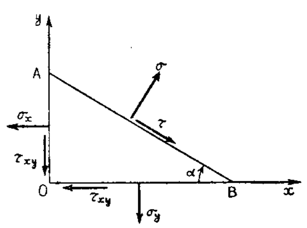
$\therefore\ \alpha_1=98°0'7''(I_1=100.32\ \mathrm{cm}^4)$

$\alpha_2=\ 8°0'7''(I_2=28.56\ \mathrm{cm}^4)$

2．主応力面の決定方法

弾性体内の1点Oが平面応力の釣合の状態にあるとし，図—3 のように，面 AO，BO に働らく垂直応力 σ_x，σ_y 及び剪断応力 τ_{xy} が既知であるとして，面AB に働らく垂直応力 σ および剪断応力 τ は，

図—3



$$\left.\begin{aligned}\sigma&=\sigma_x\sin^2\alpha+\sigma_y\cos^2\alpha+\tau_{xy}\sin 2\alpha\\ \tau&=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha\end{aligned}\right\}$$

まず，垂直応力 σ が最大及び最小となる平面の傾斜角を見出すには，

$d\sigma/d\alpha=(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\alpha+2\tau_{xy}\cos 2\alpha=0$

より，$\tan 2\alpha=2\tau_{xy}/(\sigma_y-\sigma_x)$ をうる。これを満足する α の値は，$-90°<\alpha\leqq 90°$ の範囲内で2つ存在し，そのいずれで σ が最大または最小となるかは，求められた α の値を $d^2\sigma/d\alpha^2$ に代入し，その符号によつて定められる。

$$\begin{aligned}d^2\sigma/d\alpha^2&=2(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\alpha-4\tau_{xy}\sin 2\alpha\\ &=2\{(\sigma_x-\sigma_y)+(4\tau_{xy}^2)/(\sigma_x-\sigma_y)\}\cos 2\alpha\\ &=2\{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2\}\cos 2\alpha/(\sigma_x-\sigma_y)\end{aligned}$$

$d^2\sigma/d\alpha^2<0$ ならば，その α の値で σ は最大。

$d^2\sigma/d\alpha^2>0$ ならば，その α の値で σ は最小。

この場合にも，σ_x と σ_y との大小関係及び τ_{xy} の正負によつて，σ が最大及び最小となる角 α の範囲を求めておけば便利である。

$0°<\alpha\leqq 90°$ の範囲内の α の値で，最大か最小かの主軸は必ず1つだけ存在するから，このときの主応力が最大または最小となる条件を求めればよい。

（I）$\sigma_x>\sigma_y$，$\tau_{xy}\geqq 0$

$\tan 2\alpha=2\tau_{xy}/(\sigma_y-\sigma_x)\leqq 0$ $\therefore\ 45°<\alpha\leqq 90°$

$\cos 2\alpha<0$，$\sigma_x-\sigma_y>0$ $\therefore\ d^2\sigma/d\alpha^2<0$，$\sigma$ は最大。

（II）$\sigma_x<\sigma_y$，$\tau_{xy}>0$

$\tan 2\alpha>0$ $\therefore\ 0°<\alpha<45°$

$\cos 2\alpha>0$，$\sigma_x-\sigma_y>0$ $\therefore\ d^2\sigma/d\alpha^2>0$，$\sigma$ は最小。

（III）$\sigma_x<\sigma_y$，$\tau_{xy}>0$

$\tan 2\alpha>0$ $\therefore\ 0°<\alpha<45°$

$\cos 2\alpha>0$，$\sigma_x-\sigma_y<0$ $\therefore\ d^2\sigma/d\alpha^2<0$，$\sigma$ は最大。

（IV）$\sigma_x<\sigma_y$，$\tau_{xy}\leqq 0$

$\tan 2\alpha\leqq 0$ $\therefore\ 45°<\alpha\leqq 90°$

$\cos 2\alpha<0$，$\sigma_x-\sigma_y<0$ $\therefore\ d^2\sigma/d\alpha^2>0$，$\sigma$ は最小。

（V）$\sigma_x=\sigma_y$，$\tau_{xy}\neq 0$

$d\sigma/d\alpha=2\tau_{xy}\cos 2\alpha=0$ より，$\alpha=45°$

$d^2\sigma/d\alpha^2=-4\tau_{xy}\sin 2\alpha=-4\tau_{xy}$

$\tau_{xy}>0$ ならば，$d^2\sigma/d\alpha^2<0$，ゆえに，σ は最大。

$\tau_{xy}<0$ ならば，$d^2\sigma/d\alpha^2>0$，ゆえに，σ は最小。

次に，剪断応力 τ の最大及び最小となる平面の傾斜角は，

$d\tau/d\alpha=(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\alpha-2\tau_{xy}\sin 2\alpha=0$

より，$\tan 2\alpha=(\sigma_x-\sigma_y)/2\tau_{xy}$ をうる。また，

$$\begin{aligned}d^2\tau/d\alpha^2&=-2(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\alpha-4\tau_{xy}\cos 2\alpha\\ &=-\{(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}^2\}\cos 2\alpha/\tau_{xy}\end{aligned}$$

主応力の場合と同じように，$0°<\alpha\leqq 90°$ の範囲において，主剪断応力が最大または最小となる条件を求めれば，次のようになる。

（I）$\sigma_x>\sigma_y$，$\tau_{xy}>0$

$\tan 2\alpha=(\sigma_x-\sigma_y)/2\tau_{xy}>0$ $\therefore\ 0°<\alpha<45°$

$\cos 2\alpha>0$，$\tau_{xy}>0$ $\therefore\ d^2\tau/d\alpha^2<0$，$\tau$ は最大。

（II）$\sigma_x\geqq\sigma_y$，$\tau_{xy}<0$

$\tan 2\alpha\leqq 0$ $\therefore\ 45°<\alpha\leqq 90°$

$\cos 2\alpha<0$，$\tau_{xy}<0$ $\therefore\ d^2\tau/d\alpha^2<0$，$\tau$ は最大。

（III）$\sigma_x\leqq\sigma_y$，$\tau_{xy}>0$

$\tan 2\alpha\leqq 0$ $\therefore\ 45°<\alpha\leqq 90°$

$\cos 2\alpha<0$，$\tau_{xy}>0$ $\therefore\ d^2\tau/d\alpha^2>0$，$\tau$ は最小。

（IV）$\sigma_x<\sigma_y$，$\tau_{xy}<0$

$\tan 2\alpha>0$ $\therefore\ 0°<\alpha<45°$

$\cos 2\alpha>0$，$\tau_{xy}<0$ $\therefore\ d^2\tau/d\alpha^2>0$，$\tau$ は最小。

（V）$\sigma_x\neq\sigma_y$，$\tau_{xy}=0$

$d\tau/d\alpha=(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\alpha=0$ より，$\alpha=45°$

$d^2\tau/d\alpha^2=-2(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\alpha=-2(\sigma_x-\sigma_y)$

$\sigma_x>\sigma_y$ ならば，$d^2\tau/d\alpha^2<0$，ゆえに，τ は最大。

$\sigma_x<\sigma_y$ ならば，$d^2\tau/d\alpha^2>0$，ゆえに，τ は最小。

以上の結果をまとめたものが表—2 である。ここで，

σ_1, σ_2 はそれぞれ最大及び最小主応力，τ_1, τ_2 はそれぞれ最大及び最小主剪断応力を表わし，

$\sigma_1 = \{\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\}/2$

$\sigma_2 = \{\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\}/2$

$\tau_1 = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}/2$

$\tau_2 = -\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}/2$

また，α_1, α_2 はそれぞれ最大及び最小主応力面の傾斜角，β_1, β_2 はそれぞれ最大及び最小主剪断応力面の傾斜角であり，**表—3** は，主応力の絶対値の大小関係を示すものである。

表—2

条件		主応力面		主剪断応力面	
垂直応力	剪断応力	σ_1 面	σ_2 面	τ_1 面	τ_2 面
$\sigma_x > \sigma_y$	$\tau_{xy} \geqq 0$	$45° < \alpha_1 \leqq 90°$	$-45° < \alpha_2 \leqq 0°$	$0° < \beta_1 \leqq 45°$	$-90° < \beta_2 \leqq -45°$
$\sigma_x \geqq \sigma_y$	$\tau_{xy} < 0$	$-90° < \alpha_1 \leqq -45°$	$0° < \alpha_2 \leqq 45°$	$45° < \beta_1 \leqq 90°$	$-45° < \beta_2 \leqq 0°$
$\sigma_x \leqq \sigma_y$	$\tau_{xy} > 0$	$0° < \alpha_1 \leqq 45°$	$-90° < \alpha_2 \leqq -45°$	$-45° < \beta_1 \leqq 0°$	$45° < \beta_2 \leqq 90°$
$\sigma_x < \sigma_y$	$\tau_{xy} \leqq 0$	$-45° < \alpha_1 \leqq 0°$	$45° < \alpha_2 \leqq 90°$	$-90° < \beta_1 \leqq -45°$	$0° < \beta_2 \leqq 45°$

表—3

条件	主応力間の大小	備考
$\sigma_x + \sigma_y \geqq 0$	$\lvert\sigma_1\rvert \geqq \lvert\sigma_2\rvert$	$\sigma_x \sigma_y > \tau_{xy}^2$ のとき，$\sigma_2 > 0$
$\sigma_x + \sigma_y < 0$	$\lvert\sigma_1\rvert < \lvert\sigma_2\rvert$	$\sigma_x \sigma_y > \tau_{xy}^2$ 〃 $\sigma_1 < 0$

［注意］

(1) 表中の等号は，同行のものを同時にとる。

(2) σ_1 は引張応力 ($\sigma_1 > 0$)，σ_2 は圧縮応力 ($\sigma_2 < 0$) とし，**表—3** の備考にかかげられた条件のときにのみ，その符号が反対になる。

(3) $\sigma_x = \sigma_y$，$\tau_{xy} = 0$ の場合は，明らかに $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_y$，$\tau = 0$ となるから，表には省略してある。

(4) **表—3** は，$\tau_{xy} = 0$ の場合にも用いられる。このとき，備考欄は $\sigma_x \sigma_y > 0$ となる。

<u>**例題 2**</u>　$\sigma_x = 120\,\text{kg/cm}^2$，$\sigma_y = -40\,\text{kg/cm}^2$，$\tau_{xy} = 80\,\text{kg/cm}^2$ が作用するとき，主応力，主剪断応力及び，主応力面，主剪断応力面の傾斜角を求めよ。

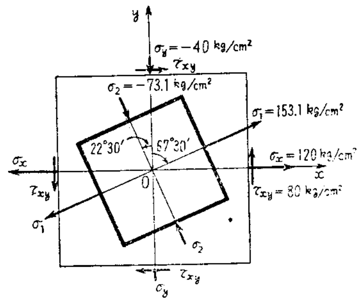
［解］　$\tan 2\alpha = 2 \times 80/(-40-120) = -1$

$\therefore\ 2\alpha = 135°, -45°$　$\therefore\ \alpha = 67°30', -22°30'$

さて，$\sigma_x > \sigma_y$，$\tau_{xy} > 0$ であるから，**表—2** より，

$45° < \alpha_1 < 90°$，$-45° < \alpha_2 < 0°$，$0° < \beta_1 < 45°$，

図—4



$-90° < \beta_2 < 45°$

$\therefore\ \alpha_1 = 67°30' (\sigma_1 = 153.1\,\text{kg/cm}^2)$

$\sigma_2 = -22°30' (\sigma_2 = -73.1\,\text{kg/cm}^2)$

$\beta_1 = 67°30' - 45° = 22°30' (\tau_1 = 113.1\,\text{kg/cm}^2)$

$\beta_2 = -22°30' - 45°$

$= -67°30'\ (\tau_2 = -113.1\,\text{kg/cm}^2)$

図—4 には，主応力面のみを示す。α_1, α_2 はそれぞれ最大及び最小主応力の方向が y 軸となす角（正ならば右回り，負ならば左回り）に等しい。

技術ノート欄について

現場でこんな方法をとつたらうまくいつたとか，こんな方法で実験したらいい結果がえられたとか，現場の人や研究する人に役に立つと思われる記事を，気楽に紹介する欄をもうけております。

この欄を，会員の実際に役立つ欄とするために，そして会誌に一層したしみのもてるようにするために，会員諸氏が十分活用して下さることをお願いします。

（編　集　部）