

橋桁の強制振動性状に関する二、三の考察

正員 工学博士 小西一郎*
准員 山田善一**

SOME CONSIDERATIONS ON THE FORCED VIBRATION OF BEAM BRIDGE

(JSCE Oct. 1954)

Dr. Eng., Ichirō Konishi, C.E. Member, and Yoshikazu Yamada, C.E. Assoc. Member

Synopsis In this report, the fundamental equation of forced vibrations of general beam bridges with the damping force proportional to stress-speed is derived. Applying this equation to the vibrations occurred by the special loading forces, the impact actions due to the irregularity of bridge floor surface or rail joints on railway bridge are studied and these results are compared with that of forced vibration by the ordinary simple harmonic forces.

要旨 本文は一般の橋桁構造に対し、その減衰力が応力速度に比例する場合の、強制振動の基礎方程式を求め、道路橋面の凹凸、鉄道橋レール継目による走行荷重の衝撃作用を再検討する基礎的研究として、とくにその強制力の形が断続的であるような場合に対して橋桁の応答函数、すなわち振巾をもとめ、その特殊な性状について考察を加えたものである。

1. 概 説

従来橋桁の振動に関しては、理論的、実験的に考察が進められ、多くの結果が報告されている。とくにその固有振動周期の計算には、各種の方法が考えられ、実際橋梁に対する自由振動周期の測定も、多数行われている。しかし橋桁の振動特性を正確に把握するには、振動性状を決定するすべての要素について、総合的に研究を進めねばならないことは、いうまでもない。とくに橋桁の（他の構造物についても同様であるが）振動減衰性については、不明の点が多く、強制力をうけた場合の共振振巾は、減衰力の大小に大きく左右されることから考えても、解決を迫られている大きな問題と思われる。ただ、実在橋梁に対する実験結果¹⁾²⁾³⁾によれば、減衰係数は他の構造物にくらべ、いちぢるしく小さいことは明らかであつて、従つて橋桁の振動では、加振力の大きさより、加振力の周期の頻度がより大きく影響する。

さらに減衰性とは別な意味で複雑なのは、加振力の特性で、現在までの多くの研究は加振力として、解析的に最も取り扱いやすい単一の正弦函数を用いてきた⁴⁾。しかし上記のように橋桁の振動に対しては、加

振力の周期がとくに重要となるので、実際問題に対しても、簡単な加振力を取り扱つたのでは、不充分な点が生ずる。本文は、レール継目や橋面の凹凸にもとづくような断続的な加振力に対して、その振動特性を正しく把握しようとするものである。解析的にはこのような加振力は、Fourier 級数として表わされるが、ここでは Laplace 変換を用いることとした。橋梁と車輪の間の衝突でおこされた振動は、よく設計された車両では、急速に吸収され、従つて橋桁と車両との間の連成振動の影響は小さく、橋梁には衝撃の力が多く作用するようになると考えられる。この点からも橋桁に対する衝撃作用の解析が必要である。

2. 橋桁の強制振動基礎式

いま振動中の橋桁の振動変位 $y(x, t)$ は正規変数 $X_n(x)$ と時間変数 $q_n(t)$ を用いて、

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot q_n(t) \dots \dots \dots (1)$$

で与えられる。ここに変数 $X_n(x)$, $q_n(t)$ は桁の撓み振動の基礎微分方程式と、境界条件並びに初期条件を満足するように決定されねばならないが、振動の微分方程式の不連続点に対しては、 $X_n(x)$ をわけて考えねばならない。すなわち橋桁に対しては、支点、ヒンジがこれに相当する。従つていま m 個の区間にかけて、

$$X_n(x) = \sum_{r=1}^m X_{nr}(x)$$

とし、区間 $r-1$, r に対しては

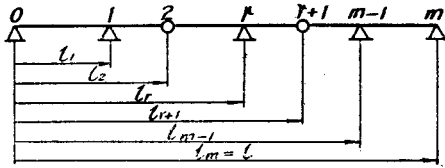
$$X_{nr}(x) = X_n(x), X_{nr'}(x) = 0 \quad (r' \neq r)$$

と考えればよい。いま x を橋桁の一端よりはかり、各寸法は図-1に示すようにとる。この橋桁の振動中に

* 京都大学教授、工学部土木工学教室

** 京都大学、大学院研究奨学生

図-1



もつ位置エネルギー V 、運動エネルギー T は

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \int_{l_{r-1}}^{l_r} EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ T &= \frac{1}{2g} \sum_{r=1}^m \int_{l_{r-1}}^{l_r} (Ar+w) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \end{aligned} \right\} (2)$$

ここに、 EI ：曲げ剛性、 A ：桁の断面積、 r ：桁の単位体積の重量、 w ：桁以外の単位長さ当りの重量、*

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{EI}{2} \sum_{r=1}^m \int_{l_{r-1}}^{l_r} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} X_{nr}''(x) q_n(t) \right\}^2 dx = \frac{EI}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \{X_n''(x)\}^2 dx \cdot q_n^2(t) \\ T &= \frac{Ar+w}{2g} \sum_{r=1}^m \int_{l_{r-1}}^{l_r} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} X_{nr}(x) \dot{q}_n(t) \right\}^2 dx = \frac{Ar+w}{2g} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \{X_n(x)\}^2 dx \cdot \dot{q}_n^2(t) \\ F &= \frac{\eta I}{2} \sum_{r=1}^m \int_{l_{r-1}}^{l_r} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} X_{nr}''''(x) \dot{q}_n(t) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} X_{nr}(x) \dot{q}_n(t) \right\} dx = \frac{\eta I}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \{X_n''''(x)\}^2 dx \cdot \dot{q}_n(t) \end{aligned} \right\} (4)$$

式(4)を Lagrange の方程式に入れ、かつ

$$\alpha_n = \int_0^L \{X_n(x)\}^2 dx, \quad \beta_n = \int_0^L \{X_n''(x)\}^2 dx \quad (5)$$

とおけば、運動の方程式として次式をうる。

$$\frac{Ar+w}{g} \cdot \alpha_n \ddot{q}_n(t) = -2 \frac{\eta I}{2} \beta_n \dot{q}_n - EI \beta_n q_n + Q_n \quad (6)$$

式(6)からわかるように、Kelvin の模型に従う場合の減衰項は β_n に関する。これは Inglis の仮定に従った結果と大いに異なる点である²⁾。いま $X_n(x)$ がわかれば (X_n は減衰項には無関係に決定される)、式(5)に従い α_n, β_n を求め式(6)に用いることにより、一般の桁に対する振動を決定することができる。 $X_n(x)$ を求めることは桁が複雑になれば、計算上面倒であるが、すでに多くの研究がなされており³⁾、本文では省略する。

式(6)はつぎのように書くことができる。

$$\ddot{q}_n(t) + 2\kappa_n \dot{q}_n(t) + p_n^2 q_n(t) = \frac{Q_n g}{(Ar+w)\alpha_n} \quad (7)$$

ここに

$$\kappa_n = \frac{\eta I}{2(Ar+w)\alpha_n} \beta_n, \quad p_n^2 = \frac{EIg}{(Ar+w)\alpha_n} \beta_n \quad (7')$$

Laplace 変換式を用いて式(7)の応答 $q_n(t)$ を求めれば、

$$q_n(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2\kappa_n s + p_n^2} \left\{ \frac{g}{(Ar+w)\alpha_n} L(Q_n) \right\} \right] **$$

* g ：重力加速度

減衰エネルギーとして、Rayleigh の散逸函数 F をとれば、

$$F = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \int_{l_{r-1}}^{l_r} f \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) dx \quad (3)$$

で表わされる。ここに f は桁の単位長さに働く減衰力であり、減衰力が応力速度に比例すると考えれば³⁾、材料の内部摩擦係数を η として次式で与えられる。

$$f = \eta I \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} \quad (3')$$

式(1)を式(2),(3)に入れ、直交条件を考慮すれば³⁾ 等断面桁に対し、

$$** \quad + (s + 2\kappa_n) q_n(0) + \dot{q}_n(0) \quad (8)$$

ここに、 $q_n(0), \dot{q}_n(0)$ は初期条件を表わす。

また一般力 Q_n は支点より c の点に作用する力 $P(t)$ に対しては、次式で与えられる。

$$Q_n = X_n(c) P(t) \quad (9)$$

式(7')からわかるように

$$\kappa_n \propto p_n^2 \quad (10)$$

であるから、振動数が大となれば、 κ_n はその2乗に比例して大きくなり、振動振幅は減少する。

3. 強制力とその応答

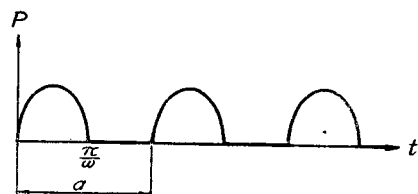
強制力としてまず、図-2に示すような断続的に作用する周期函数を考える。前述のように、路面不整などにもとづく力はこれに近いと考えてよい。図-2の状態の力が、橋端より c の点に作用する場合の一般力 Q_n は、

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= 0 & t < 0, \zeta a + \pi/\omega < t < (\zeta+1)a \\ &= X_n(c) \cdot P_0 \sin \omega t & \zeta a < t < \zeta a + \pi/\omega \end{aligned} \right\} (11)$$

$[\zeta = 0, 1, 2, 3, \dots]$

で表わされる。いま周期函数に対する公式より

図-2



$$L(Q_n) = \frac{X_n(c)P_0 \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin \omega t dt}{1 - e^{-as}} = \frac{X_n(c) \cdot P_0 \omega (1 + e^{-\frac{\pi}{\omega} s})}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-as})} \dots\dots\dots (12)$$

簡単のために、初期条件を $q_n(0) = \dot{q}_n(0) = 0$ として式 (8) に入れると、

$$q_n(t) = \frac{g}{(A\tau + w)\alpha_n} \times L^{-1} \left[\frac{X_n(c)P_0\omega(1 + e^{-\frac{\pi}{\omega} s})}{(s^2 + 2\kappa_n s + p_n^2)(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-as})} \right] \dots\dots\dots (13) *$$

$$q_n(t) = \frac{P_0 g X_n(c)}{(A\tau + w)\alpha_n} \left[e^{-\kappa_n t} \frac{\omega}{\sqrt{p_n^2 - \kappa_n^2}} \frac{\sqrt{(\omega^2 + 2\kappa_n^2 - p_n^2)^2 + 4\kappa_n^2(p_n^2 - \kappa_n^2)}}{\omega^2 + 2\kappa_n^2 - p_n^2 + 2\kappa_n \sqrt{p_n^2 - \kappa_n^2}} \right. \\ \times \sqrt{\frac{1 + e^{-2\frac{\pi}{\omega} \kappa_n} + 2e^{-\frac{\pi}{\omega} \kappa_n} \cos \pi (\frac{p_n^2 - \kappa_n^2}{\omega^2})^{\frac{1}{2}}}{1 + e^{2\alpha \kappa_n} + 2e^{\alpha \kappa_n} \cos \alpha (\frac{p_n^2 - \kappa_n^2}{\omega^2})^{\frac{1}{2}}}} \times \sin(\sqrt{p_n^2 - \kappa_n^2} t - \epsilon_n) + \frac{2}{a p_n^2 \omega} \\ \left. + \frac{\omega}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 |\cos(\pi^2 m/a \omega)|}{\omega^2 - (\frac{2\pi m}{a})^2} \times \frac{1}{\sqrt{\{p_n^2 - (\frac{2\pi m}{a})^2\}^2 + (\frac{4\kappa_n \pi m}{a})^2}} \times \sin\left(\frac{2\pi m}{a} t + \varphi_m\right) \right] \dots\dots\dots (14)$$

$$\varphi_m = \tan^{-1} \frac{\cos(\pi^2 m/a \omega) \{p_n^2 - (2\pi m/a)^2\} + (4\kappa_n \pi m/a) \sin(\pi^2 m/a \omega)}{(4\kappa_n \pi m/a) \cos(\pi^2 m/a \omega) - \{p_n^2 - (2\pi m/a)^2\} \sin(\pi^2 m/a \omega)}$$

*として与えられる。式 (13) を計算するには、[] 内を s の変数としてその極を見出し、極に対する留数を計算すればよい。極は

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_f}{\bar{s}_f} &= -\kappa_n \pm \sqrt{p_n^2 - \kappa_n^2} i, \quad s_0 = 0 \\ \frac{s_m}{\bar{s}_m} &= \pm \frac{2\pi m}{a} i \quad [m=1, 2, 3, \dots] \end{aligned} \right\} (13')$$

であるから、各極に対する留数を計算すると、 s_f, \bar{s}_f に対する結果函数は、強制振動の自由振動項を表わし、 s_0 に対するものは強制振動の常数項、 s_m, \bar{s}_m に対するものは強制振動の定常振動を表わす。すなわち q_n は次式のようになる。

いま、自由振動の項を省略し、しかも計算の便のために、**

** $p_n = 2\pi/\tau_n, \omega = 2\pi/\tau, k = a p_n/\pi$ とおき、さらに $\tau_n = \tau$ の場合を考えると、

$$q_n = \frac{P_0 g X_n(c)}{(A\tau + w)\alpha_n} \left[\frac{\tau_n^2}{2k\pi^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8 |\cos(\pi m/a)|}{k \cdot \tau_n \left(\frac{2\pi}{\tau_n}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{2m}{k}\right)^2\right\} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\tau_n}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{2m}{k}\right)^2\right\}^2 + \left(\frac{4\kappa_n m}{k}\right)^2}} \right. \\ \left. \times \sin\left(\frac{4\pi m}{k\tau_n} t + \varphi_m\right) \right] \dots\dots\dots (15)$$

$$\varphi_m = \tan^{-1} \frac{(1 + \cos 2\pi m/k) (2\pi/\tau_n) \{1 - (2m/k)^2\} + (4\kappa_n m/k) \sin(2\pi m/k)}{(4\kappa_n m/k) (1 + \cos 2\pi m/k) - (2\pi/\tau_n) \{1 - (2m/k)^2\} \sin(2\pi m/k)}$$

式 (15) は、 $2m/k=1$ の場合に不定形となるので、式 (15) の各項のうち、この場合に相当する項に対しては、次式を用いる。

$$\frac{\tau_n}{4k\pi\kappa_n} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_n} t + \frac{\pi}{2}\right) \dots\dots\dots (15')$$

瞬間的な衝撃力が、連続して作用するような場合(たとば、レール継目における衝撃など)、に対して考察をすすめるために、図-3 に示されるような、 δ -函数の連続に対して、上と同様な計算をとれば、そ***

図-3



*** の応答函数は、自由振動項を省略して、次式で示すことができる。

$$q_n = \frac{g X_n(c)}{(A\tau + w)\alpha_n} \left[\frac{\tau_n}{2k\pi^2} + \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi \left(\frac{2\pi}{\tau_n}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{2m}{k}\right)^2\right\}^2 + (4\kappa_n m/k)^2} \times \sin\left(\frac{4\pi m}{k\tau_n} t + \varphi_m\right) \right] \dots\dots\dots (16)$$

$$\varphi_m = \tan^{-1} \left(\frac{k\pi}{2\kappa_n m \tau_n} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{2m}{k} \right)^2 \right\}$$

4. 計算例

前節の関係を明らかにするため、数値計算をこころみた。計算にあたっては、式(15)、(16)中の値について、実際橋梁から求めた結果¹⁾を参考として、

$$\tau_n = 0.3 \text{ sec}, \quad \kappa_n = 0.2 \text{ sec}^{-1}$$

を用いた。この値は、橋桁の1次振動に相当するものであるが、これが2次、3次……の振動に対する値と考へてもさしつかえないことは式(7)からも明らかである。この値を用いて、式(15)各項の振巾を計算し、位相差を考へに入れて、これらの各項を加えた全振巾を、 k について図示すると、図-4のようになる。なお同図には

$$P = P_0 \sin \omega t \quad t > 0$$

図-4

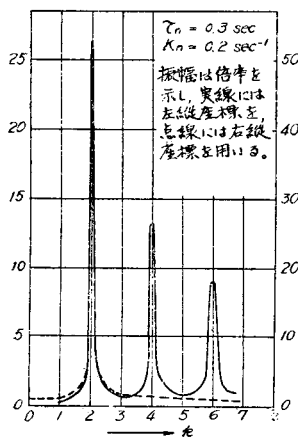
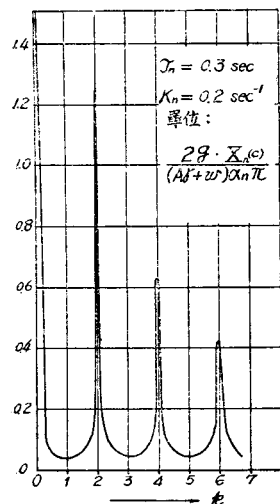


図-5



の1/2, 1/3……となることが明らかとなった。これは1次振動についてのみならず、高次振動でも生ずるが、その影響は 桁の種類により異なる。単純桁の場合

に対する応答、すなわち一般の共振曲線を点線で併記して参考とした。なお図-4は、静荷重 P_0 に対する撓みを基準として、その倍率で表わした。

同様に、 θ -函数に対する応答振巾を図-5に示した。

5. 考察

前節の計算結果、ならびに第3節の解析の結果から明らかなることは、橋桁の一断面に断続的に強制力が作用する場合は、図-4,5から明らかのように、共振の現象は、正弦曲線的な強制力の作用する場合と同様におこるが、さらに加振周期 a が橋梁の固有振動周期の2倍、3倍……の周期の加振力に対しても共振し、その振巾は、ほぼ、固有振動周期の場合

合、正規函数 X_n は

$$X_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

で与えられるから、式(5)より

$$\alpha_n = \frac{l}{2}, \quad \beta_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2}$$

$$\kappa_n = \frac{\eta I g}{2(A\tau + w)} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4, \quad \rho_n^2 = \frac{EI g}{(A\tau + w)} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$$

となり、 κ_n, ρ_n^2 とともに n^4 に比例し、振動振巾に対しては高次振動の影響は小さくなり、1次振動のみを問題にすれば充分である。連続桁、ゲルバー桁橋に対しては、単純桁の各振動型の振動数にくらべ、振動数が接近してあらわれる。たとえば⁹⁾、等3スパン連続桁では

$$\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 : \rho_4 : \dots = \pi^2 : (1.13\pi)^2 : (1.37\pi)^2 : (2.0\pi)^2 : \dots$$

となり、またある3スパンゲルバー桁では

$$\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 : \rho_4 : \dots = (2.92)^2 : (3.29)^2 : (4.07)^2 : (5.17)^2 : \dots$$

となる。スパン数が増加すれば、この比はますます接近してくる。従つてその減衰係数の比も、上のゲルバー桁に対しては式(10)より

$$\kappa_1 : \kappa_2 : \kappa_3 : \dots = 72.7 : 117.2 : 273.0 : \dots$$

となり、単純桁よりその増加の程度が非常に小さい。従つて高次振動の影響は無視できなくなり、第3節の計算は高次振動に対しても行わねばならない。よつて、連続した構造の橋梁に対しては、このような強制力に対して、ますます多くの共振点を生じ、これらの桁が振動学上不利である点は、さらに強調されることとなる。

図-2,3 いずれの強制力に対しても、図-4,5 から明らかのようにその共振曲線の形は、ほとんど変わらない。これは荷重が断続的にさえ作用すれば、その荷重自身の形には桁の振動性状は影響されることが少ないことを表わしている。

また固有振動周期付近の共振では、正弦的強制力が作用した場合と、その共振曲線はほぼ重なる。

6. 結 語

以上橋桁に作用する外力と、その振動性状についてごく限られた問題の考察をすすめたが、実際問題に適用して、適確に問題を処理するには、さらに研究が必要である。ただ強制力の作用の仕方によつては、橋桁に対し特殊な効果を及ぼすことが以上の結果から明らかとなった。実際衝撃係数の決定などにあつてはさらに他の方面からの研究も必要であるが、ただ正弦的な外力による強制振動のみを取扱つたのでは、問題を十分究明していないことは、本文の結果から明らかで

あろう。また以上は橋桁の一点cに荷重が作用する場合を取扱ったが、荷重の作用点が移動する場合にはcをtの関数とおけばよいが、この場合には周期関数の公式(12)が用いられないので、解析はさらに複雑になる。しかしこの場合も上にのべた性質は当然生ずるものと考えてさしつかえない。

本研究は昭和28年度文部省科学研究費による総合研究「橋梁の振動及び剛性に関する研究」の成果の一部であり、ここに深謝の意を表する。

参考文献

- 1) 小西一郎・山田善一：既設道路橋の振動減衰について、土木学会誌 第38巻第10号, p.p. 445~448, 1953
- 2) 橋本香一：はんげたの振動特性と衝撃率、鉄道業務研究資料, 第8巻第6号, p.p. 8~20
- 3) 建設省土木研究所彙報に多数の報告あり。
- 4) 特殊な加振力に対する振動性状を研究したものに、喜内敏：梁及び矩形版の撓み振動の理論、土木学会論文集, 第5号, p.p. 127~140, 1950
- 5) この仮定は Kelvin の模型に従ったことになる

が、実際構造物に対しこの仮定が正しいとはいえない。しかし Inglis の場合のように、高次振動ほど振動がはたまりやすくなるという矛盾はなくなり、より正確なものと思われる。鋼構造に対しては減衰力は振動速度にほとんど無関係と考えられるが、これらの点については改めて報告する。

- 6) $\int_{l_r-1}^{l_r} X_{nr} X_{jr} dx (n \neq j)$ などは必ずしも0とはならないが、式(4)中にあらわれる $\int_0^l X_n X_j dx = 0, \int_0^l X_n'' X_j'' dx = 0, \int_0^l X_n'''' X_j'''' dx = 0$ などに $\int_0^l X_n'''' X_n dx = \int_0^l \{X_n''\}^2 dx$ は証明される。
- 7) Inglis の仮定に従つたものに、小西一郎・小松定夫：ゲルバー梁の振動性状について、土木学会誌 第38巻第2号, p.p. 53~62, 1953
- 8) たとえば、上記論文7)
- 9) 小西一郎：振動工学、プレストレストコンクリートと構造力学, 土木学会, 昭和28年 p. 108 (昭.29.6.21)

新製品紹介

伊丹康夫孝案 ブルドーザ土工作業計算尺

頒価：200円(〒8円)日本建設機械化協会発売
建設省建設機械課 伊丹康夫氏によつて発明されたブルドーザ土工作業計算尺は、着手より1年半の年月を要し、このほど、日本建設機械化協会より発売され好評を博している。建設省初め、国鉄操機、農林省、防衛庁等においてはすでに本計算尺を使用して作業計画がなされている。

本計算尺は各種のブルドーザの多くの現場作業実績をもとにして作られた新しい実用算定公式をスケールに折りこんだものである。なお実用算定公式は土工作業で最も判定しにくい現場条件をきわめて実際に作業種類に分類されて用いてあるのが特長である。すなわちブルドーザ作業能率の算定上、最も問題とされている作業の難易性に応ずる作業量の変化を、整地、アースダム、河川改修、道路改良等の土工について判定し、従来の公式により算定した場合と比較して、作業量の誤算を極限することができる。

使用法はきわめて簡単で、土工の常識があれば、数

学的な知識の必要はなく、土工の計画をする人も、工費の見積りをする人も、ブルドーザのオペレーターも容易に使用できるものである。

本計算尺は縦18cm横12cm厚紙製であり、色彩オフセット刷りでビニール塗装され美麗である。袋の裏面には各種ブルドーザの燃料油脂等の消費量が記してある。

(編集部)

“最新土質工学”一部訂正について

最新土質工学 138 ページ 表-1 平板載荷試験成績表のうち、沈下の欄の数値を次のように一部訂正いたします。

沈			下
ダイヤルゲージの読み (cm)			沈下量 (cm)
左	右	平 約	
		0.006	0
		0.029	0.023
		0.056	0.050
		0.083	0.077

(註) 太字(ゴシック)の数値が訂正箇所