

直交異方性板理論の桁橋構造への適用に 関する実験的研究*

正員 米 沢 博**

EXPERIMENTAL STUDIES OF APPLICATION OF THEORY OF ORTHOGONALLY ANISTROPIC PLATE TO THE STRUCTURE OF GIRDER BRIDGE

(JSCE Oct. 1954)

Hiroshi Yonezawa, C.E. Member

Synopsis The theory of orthogonally anistropic plate is a good method to the theoretical stress analysis of structure of girder bridge, but the application of this theory requires many experimental studies. In other word, the values of H, D_x, D_y, ν etc. and the relation between height, interval, numbers of girder and application of this theory are called into questions. In this paper the experimental stress analysis of twenty models of girder bridge of cast iron are discussed, the results of experiment are compared with theory, and some conclusions for these questions are reduced.

1. まえがき

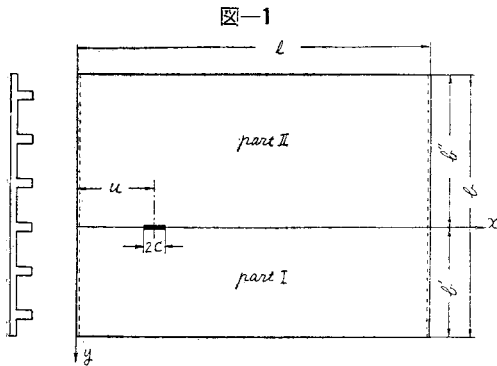
著者はさきに直交異方性板理論の鉄筋コンクリートT桁橋, 合成桁橋などへの適用¹⁾につきのべた, しかし D_x, D_y, H などのとりかた, どんな範囲の桁高, 桁間隔, 桁数に対して適用できるかの問題, 境界条件のとりかたなどはすべて実験的研究にまたねばならない問題である。著者は 20 個の鑄鉄製並列桁構造の単純桁橋模型につき応力測定を行い, 測定結果を理論的計算結果と比較し, 理論の実用性, 適用範囲などを検討した。

2. 理論式の誘導, 並びに単純桁橋への適用に関する諸仮定

図-1 のような矩形板が辺 $x=0, l$ にて単純支持され, 辺 $y=b', b''$ にて自由であるとする。 $2c$ の部分に等分布線荷重 q kg/cm が載荷されているとすると I, II の部分の撓み曲面の微分方程式は次式で表わされる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \dots \dots (1)$$

ここでまず H のとりかたが問題になる。これは実験により決定されるべきものと考えられるが, この場合一応近似的に $H^2 = D_x \cdot D_y$ が成り立つものとする²⁾。 $y=0$ における連続条件式に直交異方性板理論の式を用いることには問題はないが, 自由辺における境界条件には以下の三通りの考えかたがあると思う。すなわち最外側の桁を弾性支持梁と考へて, 弾性支持の境界条件を用いるか³⁾, または自由辺でも異方性板の性質を有すると考へて, 異方性板の自由辺の条件を用いるか⁴⁾ (純然たる異方性板ではもちろんこれをとるべきである), などの考えかたもあるが, 著者は次のような考えかたを採用した, すなわち模型に最も適したものとして, 自由辺は等方性板の性質を最も多く有すると考へて等方性板の自由辺の境界条件を用いた。



$$M_x = \frac{Pl}{c \pi^2} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m \pi c}{l} \sin \frac{m \pi c}{l} \sin \frac{m \pi x}{l} \left[A'' \left(1 - \nu \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \cosh sy + B'' \left(1 - \nu \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \sinh sy + C'' \left\{ sy \cosh sy - \nu \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} (2 \sinh sy + sy \cosh sy) \right\} \right]$$

* 土木学会第10回年次学術講演会(昭.29.5)にて講演

** 山口大学助教授, 工学部土木工学教室

$$+D'' \left\{ s y \sinh s y - \nu \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} (2 \cosh s y + s y \sinh s y) \right\} \dots \dots \dots (2)$$

このような連続条件および境界条件を満足するように、式(1)を解いて、IIの部分の曲げモーメントを求めると、(2)式のようになる。

ただし

$$P = 2 c q, \quad s = \frac{m \pi}{l} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}},$$

ν : ポアソン比

$$B'' = \Delta_1 / \Delta, \quad C'' = \Delta_2 / \Delta, \quad D'' = \Delta_3 / \Delta$$

$$A'' = -B'' \tanh \tau - C'' \frac{t(2 \tanh \tau + \tau) - \nu \tau}{t - \nu}$$

$$-D'' \frac{t(2 + \tau \tanh \tau) - \nu \tau \tanh \tau}{t - \nu}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} E & F & G \\ H & I & J \\ L & M & N \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & F & G \\ -K & I & J \\ -P & M & N \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} E & 0 & G \\ H & -K & J \\ L & -P & N \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} E & F & 0 \\ H & I & -K \\ L & M & -P \end{vmatrix}$$

$$E = (t - \nu) \{ t - (2 - \nu) \} (\tanh^2 \tau - 1)$$

$$F = \{ t(2 \tanh \tau + \tau) - \nu \tau \} \{ t - (2 - \nu) \} \tanh \tau - \{ t(3 + \tau \tanh \tau) - (2 - \nu)(1 + \tau \tanh \tau) \} (t - \nu)$$

$$G = \{ t(2 + \tau \tanh \tau) - \nu \tau \tanh \tau \} \{ t - (2 - \nu) \} \tanh \tau - \{ t(3 \tanh \tau + \tau) - (2 - \nu)(\tanh \tau + \tau) \} (t - \nu)$$

$$H = (\tanh \tau - \tanh \delta) (t - \nu)$$

$$I = 2 t (\tanh \tau - \tanh \delta) + (\tau - \delta) (t - \nu)$$

$$J = (\tau \tanh \tau - \delta \tanh \delta) (t - \nu)$$

$$K = -\tanh \delta (t + \nu) - \delta (t - \nu)$$

$$L = (\tanh \delta - \tanh \tau) \{ t - (2 - \nu) \}$$

$$M = (\tanh \delta - \tanh \tau) (3 t - 2 + \nu) + \tanh \tau \tanh \delta (\tau - \delta) (t - 2 + \nu)$$

$$N = (\tau \tanh \delta - \delta \tanh \tau) (t - 2 + \nu)$$

$$P = \{ \delta \tanh \delta (2 - \nu - t) - 2 t \} \tanh \tau$$

$$t = \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}, \quad \tau = s b'', \quad \delta = s b'$$

である。

式(2)を適当に使えば、あらゆる荷重状態に対する任意点のx方向(桁方向)の曲げモーメントが計算できる。実際の数値計算ではさらに D_x, D_y および ν の値が問題になるが、この計算では D_x として桁間隔 λ を突縁有効巾とするT型梁の曲げ剛さを λ で割つたものを、 D_y としては床版の曲げ剛さを用い、さらに簡単のために $\nu = 0$ と仮定した。20個の鋳鉄製単純桁橋模型につき、載荷試験による応力測定結果と以上の諸仮定のもとに直交異方性板理論により計算した結

果とを比較し、直交異方性板理論の適用範囲を検討した。

なお同様にして M_y を誘導すれば、床版の曲げモーメントを検討できるが、模型の大きさの関係上測定が不可能であるから、ここでは省略した。

3. 測定値と理論値の比較

実験に用いた模型は桁高の極端に高い5個の鋳鉄製模型で、これを3回にわたる機械切削により、極端に

図-2 模型の寸法

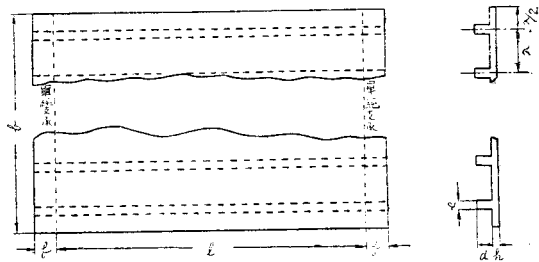


表-1 模型の寸法

模型番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
l (cm)	87	84	85	85	85
t	40	36	40	40	40
b	30	18	20	20	20
λ	10	6	4	4	2.5
σ	2	1.6	1	1	1
h	6.8	0.8	0.5	0.5	0.5
f	2.5	2	2.5	2.5	2.5
桁高比	2	3	5	5	8
桁高比10分の1	4	無	無	有	無

写真-1



桁高の低いものまで順次変化させ、計20個の模型につき実験した。各模型の寸法を図-2、表-1に示す。以下模型を示すには表-1の番号例えば①②、⑤⑥のように呼ぶことにする。約2000kgから100kgの荷重を必要とした関係上、試験器には手動式の圧縮試

験器を使用、電気抵抗線歪計 (gage length 0.9 cm) と島津製作所製ストレインチケーターを用い、各桁のスパン中央の歪を測定した。これらの装置を写真に

示す。荷重としては、図-1 において $c/l=0.02$ になるような線荷重を与えるため、長さ 1.6 cm および 1.44 cm の円筒面を用い、荷重直下の桁の最大応力が $500\sim 800 \text{ kg/cm}^2$ になるよう载荷した、荷重の位置は $x=l/2$ の桁上である。

まず中央桁に载荷した場合の中央桁 1 本あたりの曲げモーメントの実験値、理論値、および T 型梁式の計算値を 図-3 (a)~(d) に示す。ここで実験値と云うのは、測定応力から曲げモーメントを逆算したものである。

図より明らかなように、従来の慣用計算法が全くあわないこと、この計算法より測定値が相当小さいこと、これは荷重が中央桁以外の他の桁へ分配されることが示す。図の曲線(実線)は理論値 $M_x \lambda$ を示し、傾向としては実験値とよくあっている。ただ桁数が 2 本、3 本の場合は、このままでは相当の差を生ずるが、5 本以上ではほとんど一致している。理論値がいずれも実験値より大きい値を示すのは、板中央の単位長さあたりの曲げモーメント M_x に突縁有効巾 λ をかけたもの ($M_x \lambda$) を用いたから当然大きくなるわけで、その理由を 図-4 に示す。

すなわち斜線(実線)の部分だけ大きくなるものと考えられる。

つぎに中央桁にかかった荷重がいかにか他の桁へ分配されるかを検討したものを 図-5 (a)~(e) に示す。これらの図より明らかなように、荷重はすべての桁に分配され、理論結果、実験結果ともによくその性質を表わしており、従来の T 型梁式計算の不合理なことがよくわかる。これらの実験値では外側の桁ほど応力が小さくなり、最小 30 kg/cm^2 程度で、外側の桁ほど誤差は大きくなっていると考えられる。まゝとは逆に理論値がいずれも実験値より小さくなっているが、その理由は 図-4 の斜線(点線)部分の差によるものである。これらはいずれも曲げモーメント図を求めてそれを有効巾 λ にわたって積分すれば、さらによい結果のえられることは明らかである。桁の多い場合はこの積分して得た厳密な値と $M_x \lambda$ とはほとんど一致するが、桁の少ない場合には積分して得た値の方をとらぬと相当の誤差が入ってくるのがわかる。図-3, 5 の点線の曲線は桁の少ないものにつきこの厳密な理論値を求めたもので、実験値に近い値を示している。なお参考までに各模型の中央に载荷した場合の各桁への荷重の分配の状態を知るため各桁の曲げモーメントの実験値並び

図-3 (a)

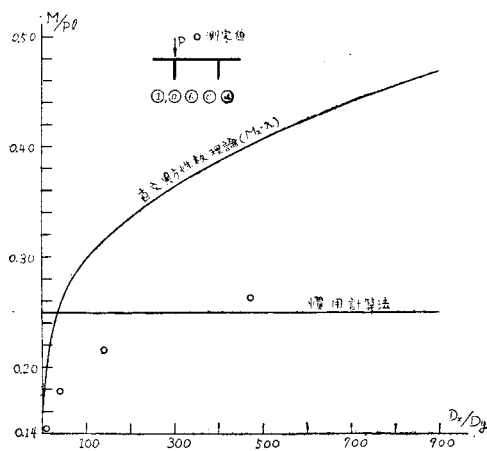


図-3 (b)

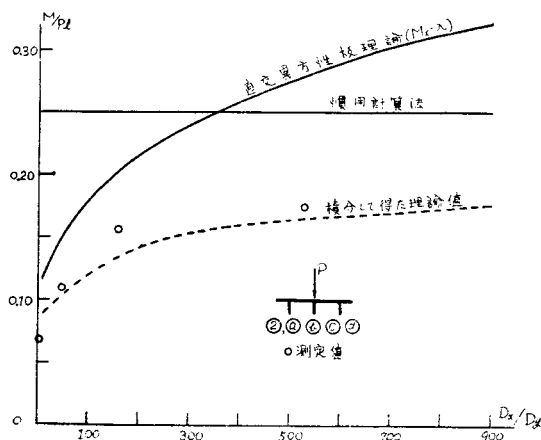


図-3 (c)

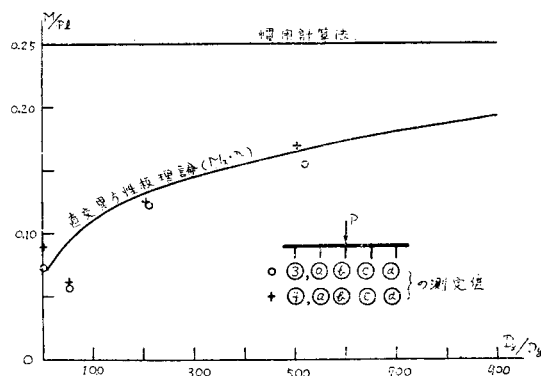


図-3 (d)

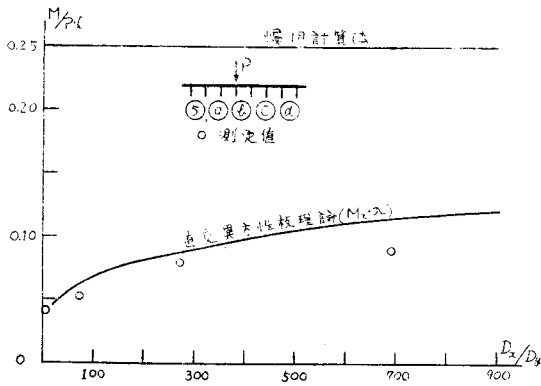


図-4

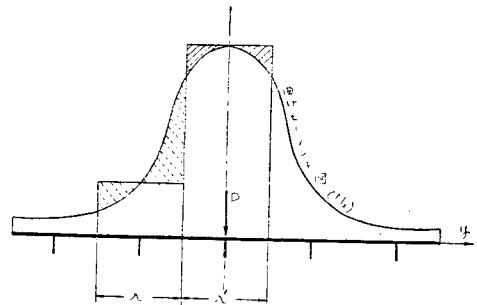


図-5 (a)

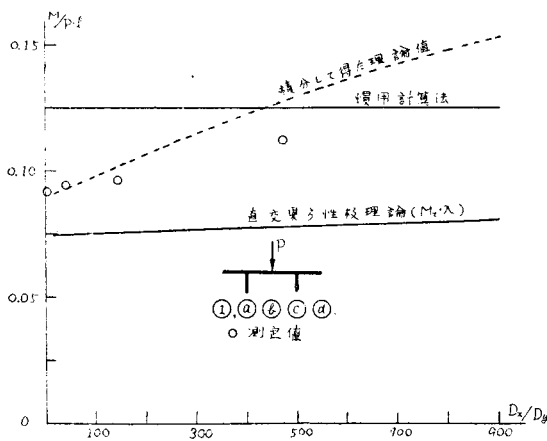


図-5 (c)

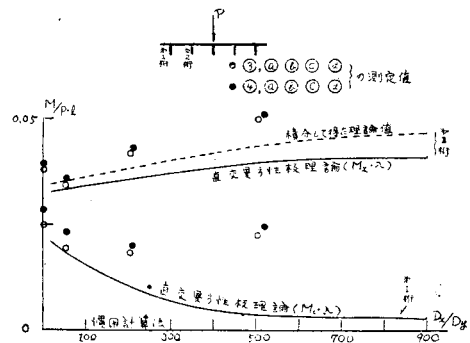
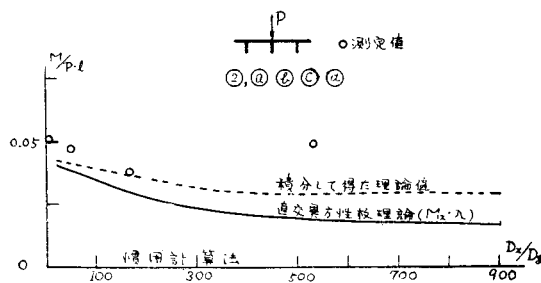


図-5 (b)



に理論値 $M_x \lambda$ を図-5に示す。

以上述べた各場合につき考えてみると、異方性板理論による結果はよく実験値に近い値を与えていることがわかる。すなわち従来の計算法ではえられなかつた(床版と桁の協働作用の影響と考えられる)桁数および D_x/D_y による曲げモーメントの変化がよく現われ

ており、また実験結果もよくそれを表わしている。

ただ桁数が少なくなるにつれ、また桁高が極端に高くなるにつれて、理論値 $M_x \lambda$ と実験値の差は大きくなる。

普通の橋梁では大きくみつもつても $D_x/D_y < 300$ ⁵⁾ であるから、この範囲内で考えれば十分異方性板理論を適用してよいものと思う。すなわち桁高が普通の橋梁に対しては理論式の誘導にあつたつてのべた D_x, D_y, H, ν などのとり方や境界条件で、実際の応力を十分よく与えるようである。ただ桁数が2,3本のように少ない場合には通常行つた $M_x \lambda$ では不適當で、曲げモーメント図を積分した緻密な値をとらねばならぬ。また $D_x/D_y > 500$ すなわち桁の極端に高い場合に適用することはこのままでは無理のようで⁶⁾、これらに対しては $\lambda, D_x, D_y, H, \nu$ などのとりかたと境界条件を別に考えるべきものと思われ、これらの場合について

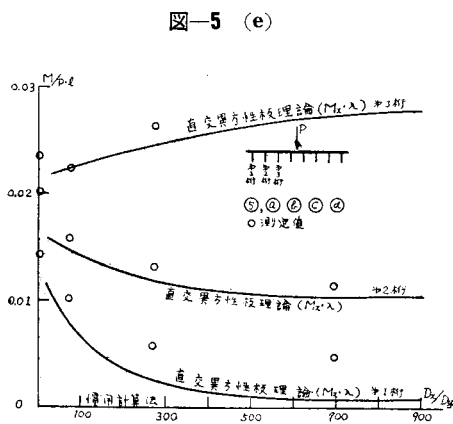
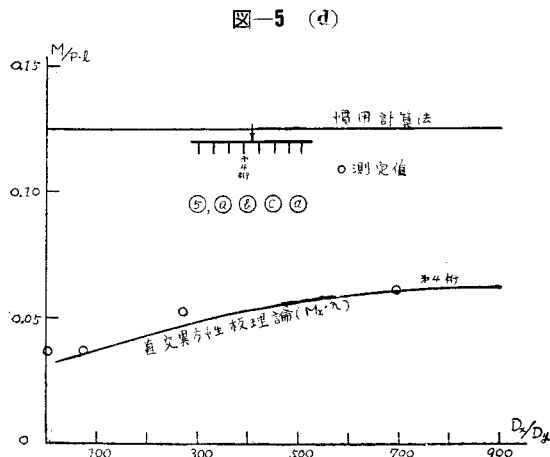
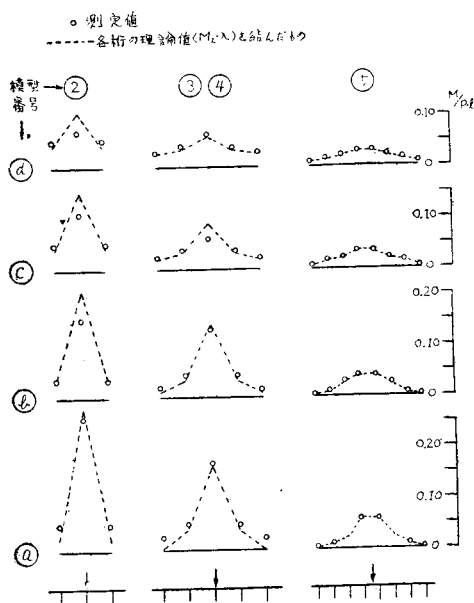


図-6



は改めて研究するつもりである。なお実験ならびに理論計算にあたって用いた鑄鉄模型の弾性係数の値は各模型をそのまま桁方向に圧縮試験して得られた値の平均値が約 $1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ になったので、これが一応全模型に通用するものとして用いた。

4. 結 言

直交異方性板理論を桁橋構造（鉄筋コンクリートT桁橋、合成桁橋など）へ適用する場合を考え、模型実験と理論結果の比較を行つたが、普通の寸法の橋梁に対しては、この理論は従来の慣用計算法より有効な方法であることがわかつた、従来の簡単な梁の理論では

得られなかつた（厳密な連続板理論を用いても、桁数の少ない場合以外は實際上計算が不可能と考えられる）各桁と床版の協力作用が、実測値とよく一致してえられる。なお疑問の点も多く残されており、また実際の橋梁に対してこの理論をそれぞれの場合に適用して設計することも、現実の問題としては相当手数を要すると思われる、実際的な簡便計算法の研究の必要を感じる。これらに関しては現在研究を行つている。

最後に終始御指導頂いた京大教授小西博士、成岡博士並びに実験に対し種々便宜を与えて頂いた山口大学工学部鉱山学教室に対し感謝の意を表する。

参考文献その他

- 1) 米沢 博：土木学会誌 39 卷 1 号（昭.29.1）
- 2) M.T. Huber：Bauing. 4, (1923) S. 354, 392
- 3) W. Cornelius：Stahlbau, 21 Jahrgang H. 2, 3, 4 (1952)
- 4) H. Olsen, F. Reinitzhuber：Die zweizeitig gelagerte Platte. 1 Band (1951)
- 5) $D_x/D_y > 300$ という値は厳密な理論の根拠によるものではなく、普通の寸法の橋梁ではおそらくこれをこえるものはないと考える。例えば実存の鉄筋コンクリート橋で支間 15~20 m のもの 5 つの場合につき計算した値はどれも 50~70 になった。鋼橋では一例にすぎぬが、支間 19 m, 桁高 1.39 m のものについて計算した値が約 120 になった。実存の橋梁では極端なもの以外はここにあげた例に近い値をとるものが多いと思う。
- 6) これは模型に対する結論、すなわち桁高がスパンの $1/2.5 \sim 1/4$ のごとく高い場合にこのままの適用は無理であろうとの意味である。従つて長大スパンの橋梁では D_x/D_y が大になつても適用できるのではないかと考える。

（昭.29.9.15）