

壁厚が直線的変化をなす円筒形水槽の応力実用計算式

正員 工学博士 酒井 忠明*

PRACTICAL STRESS CALCULATION FORMULAE OF CYLINDRICAL TANKS WITH LINEAR VARING WALL THICKNESS

(JSCE June 1954)

Dr. Eng., Tadaaki Sakai, C.E. Member

Synopsis Many authorities have presented various method of solution for the cylindrical tanks with linear varying wall thickness, however, these methods still require complicated and tedious calculation. So, in this paper, the author gives the practical calculation formulae from which the required stresses can be directly and quickly determined at any point in the wall of tank.

要旨 下部固定の円筒形水槽の壁厚が深さに比例して増す場合の応力解法は、従来すでに求められているところであるがこれ等の解法による数値計算はきわめて煩雑な手数を要するものである。本文においてはこれ等の解法を整理して壁厚が一定の場合と同程度に近い手数をもつて容易に任意点の応力を求めることのできる応力計算式を誘導したものである。

1. 著者の誘導した応力実用計算式

下部固定の円筒形水槽において壁厚が直線的変化をなす場合 図-1 に示すごとく原点 O を選び、

l : 水槽の高さ, a : 壁体の中心までの半径,

t_0 : 壁体の上端の厚さ, t_u : 壁体の下端の厚さ,

L : 原点 O より壁体の下端までの高さ,

γ : 水槽中の液体の単位体積の重量,

E, ν : 材料の弾性係数及びポアソン比,

x : 原点 O から壁体任意点までの絶対距離,

x' : 下端から壁体任意点までの絶対距離すなわち

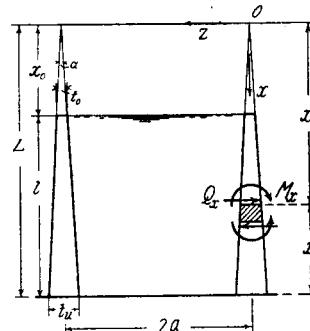
$$x' = L - x,$$

x_0 : 原点 O から壁体上端までの絶対距離,

M_x : 壁体の単位巾に作用する曲げモーメント,

Q_x : 壁体の単位巾に作用する剪断力,

図-1



N_φ : 単位高の壁体の垂直断面に作用する水平引張周辺力,

としそのほか 図-1 に示すとき記号を用いるとき、著者の誘導した応力実用計算式は次のとくである。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \gamma l^3 K_1 \\ Q_x &= \gamma l^2 K_2 \\ N_\varphi &= \gamma a l \left(\frac{x - x_0}{l} - K_3 \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2 \beta l^2} e^{-X} \sqrt{Y} \frac{1}{D} \left[\left\{ \left(1 - \frac{1}{\beta l} + \frac{1}{16 \beta l} \frac{l}{L} \right) Y \right\} \cos X - \left\{ Y - \frac{1}{\beta l} \left(2 + \frac{3}{16} \right) \frac{l}{L} \sqrt{Y} \right\} \sin X \right] \\ K_2 &= \frac{1}{\beta l} e^{-X} \sqrt{Y} \frac{1}{D} \left[\left\{ \left(1 - \frac{1}{2 \beta l} - \frac{1}{32 \beta l} \frac{l}{L} \right) \sqrt{Y} - \frac{1}{2 \beta l} \frac{l}{L} \left(1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{\beta l} \right) \right\} \cos X \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{2 \beta l} \left(1 - \frac{1}{16} \frac{l}{L} \right) \sqrt{Y} - \frac{1}{2 \beta l} \frac{l}{L} \left(1 - \frac{1}{16} \right) \right\} \sin X \right] \\ K_3 &= e^{-X} \sqrt{Y} \frac{1}{D} \left[\left\{ 1 - \frac{3}{16 \beta l} \frac{l}{L} \frac{1}{\sqrt{Y}} \right\} \cos X + \left\{ 1 - \frac{1}{\beta l} + \frac{1}{16 \beta l} \frac{l}{L} \right\} \sin X \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

* 北海道大学教授、工学部土木教室

前式において

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\beta l} &= \frac{1}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t_u}{a}} \\ Y &= \frac{x}{L} = 1 - \frac{x'}{L} = 1 - \frac{l}{L} \frac{x'}{l} \\ X &= 2\beta l \frac{L}{l} (1 - \sqrt{Y}) \\ D &= 1 - \frac{3}{16\beta l} \frac{l}{L} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

2. 従来の解法

従来の解法には種々あるがここには著者の応力実用計算式の誘導に使用した S. Timoshenko の “Theory of Plates and Shells”¹⁾ なる参考書に記載の解法の概略を述べる。円筒体中心線方向の水平変位 w を与える微分方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2w}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 a^2} x w \\ = - \frac{12(1-\nu^2)r(x-x_0)}{Ea^3} \end{aligned} \dots\dots\dots(4)$$

この解は

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\sqrt{x}} [C_1 Z_1'(\xi) + C_2 Z_2'(\xi) + C_3 Z_3'(\xi) \\ &\quad + C_4 Z_4'(\xi)] - \frac{ra^2}{Ea} \frac{x-x_0}{x} \end{aligned} \dots\dots\dots(5)$$

ただし

$$\xi = 2\rho\sqrt{x}, \quad \rho = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\sqrt{aa}} \dots\dots\dots(6)$$

また $C_1 \sim C_4$ は限界条件により決める積分常数であり $Z_1'(\xi) \sim Z_4'(\xi)$ は次式によつて定義せられる $Z_i(\xi)$ ～ $Z_i'(\xi)$ の導函数である。

$$\left. \begin{aligned} Z_1(\xi) &= +\frac{1}{2} [J_0(\xi\sqrt{+i}) + J_0(\xi\sqrt{-i})] \\ Z_2(\xi) &= -\frac{i}{2} [J_0(\xi\sqrt{+i}) - J_0(\xi\sqrt{-i})] \\ Z_3(\xi) &= +\frac{1}{2} [H_0^{(1)}(\xi\sqrt{+i}) + H_0^{(2)}(\xi\sqrt{-i})] \\ Z_4(\xi) &= -\frac{i}{2} [H_0^{(1)}(\xi\sqrt{+i}) - H_0^{(2)}(\xi\sqrt{-i})] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

ここに J_0 はベッセル函数, $H_0^{(1)}$ 及び $H_0^{(2)}$ はハンケルの函数を表わす。(5) 式より M_x, Q_x 及び N_{φ} はそれぞれ次のとくなる。

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{Ea^3}{48(1-\nu^2)} \sqrt{x} [C_1 \{ \xi^2 Z_2'(\xi) - 4\xi Z_2(\xi) \\ &\quad + 8Z_1'(\xi) \} - C_2 \{ \xi^2 Z_1'(\xi) - 4\xi Z_1(\xi) \\ &\quad - 8Z_2'(\xi) \} + C_3 \{ \xi^2 Z_4'(\xi) - 4\xi Z_4(\xi) \\ &\quad + 8Z_3'(\xi) \} - C_4 \{ \xi^2 Z_3'(\xi) - 4\xi Z_3(\xi) \\ &\quad - 8Z_4'(\xi) \}] - \frac{ra^2 a^2 x_0}{6(1-\nu^2)} \end{aligned} \dots\dots\dots(8)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{Ea^3 \rho^2}{24(1-\nu^2)} \sqrt{x} [C_1 \{ \xi Z_1(\xi) + 2Z_2'(\xi) \} \\ &\quad + C_2 \{ \xi Z_2(\xi) - 2Z_1'(\xi) \} + C_3 \{ \xi Z_3(\xi) \\ &\quad + 2Z_4'(\xi) \} + C_4 \{ \xi Z_4(\xi) - 2Z_3'(\xi) \}] \end{aligned} \dots\dots\dots(9)$$

$$\begin{aligned} N_{\varphi} &= -\frac{Ea}{a} \sqrt{x} [C_1 Z_1'(\xi) + C_2 Z_2'(\xi) \\ &\quad + C_3 Z_3'(\xi) + C_4 Z_4'(\xi)] + ral \left(\frac{x-x_0}{l} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots(10)$$

また傾斜角は

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{2x\sqrt{x}} [C_1 \{ \xi Z_2(\xi) - 2Z_1'(\xi) \} \\ &\quad - C_2 \{ \xi Z_1(\xi) + 2Z_2'(\xi) \} + C_3 \{ \xi Z_4(\xi) \\ &\quad - 2Z_3'(\xi) \} - C_4 \{ \xi Z_3(\xi) + 2Z_4'(\xi) \}] \\ &\quad - \frac{ra^2}{Ea} \frac{x_0}{L^2} \end{aligned} \dots\dots\dots(11)$$

しかしして積分常数は高い水槽または壁体の下半部における応力を求めるときは C_3 及び C_4 は 0 とみなすことができ、 C_1 及び C_2 は壁体の下端において水平変位及び傾斜角が 0 なる条件よりきめる。すなわち、 $x=L$ における ξ を ξ_0 とすればこの条件式は次のとくなる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{L}} [C_1 Z_1'(\xi_0) + C_2 Z_2'(\xi_0)] &= \frac{ra^2}{Ea} \frac{l}{L} \\ \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L\sqrt{L}} [C_1 \{ \xi_0 Z_2(\xi_0) - 2Z_1'(\xi_0) \} \\ &\quad - C_2 \{ \xi_0 Z_1(\xi_0) + 2Z_2'(\xi_0) \}] = \frac{ra^2}{Ea} \frac{x_0}{L^2} \end{aligned} \dots\dots\dots(13)$$

なお、同書には $Z_1(\xi)$ 及び $Z_2(\xi)$ の計算には $\xi \leq 6$ なる場合には数値表、 $\xi > 6$ の場合は次の近似計算式を用いるよう述べてある。

$$\left. \begin{aligned} Z_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \\ Z_2(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \\ Z_1'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \\ Z_2'(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

3. 著者の応力実用計算式の誘導法

前節に述べた方法によつて数値計算をなすにはきわめて煩雑な手数を要し、また $Z_1(\xi)$, $Z_2(\xi)$ 等の数値

表としては前記参考書に記載の $\xi \leq 6$ の場合のほかに $\xi = 10$ までのものもあるが、実際この種構造物における ξ は 10 より大なる場合が通常であり従つて $Z_1(\xi)$, $Z_2(\xi)$ 等の計算には数値表によることができない。

(12) 及び (13) より C_1 及び C_2 を求めこれを (8) 式～(10) 式に代入すると次のとくくなる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{\tau \alpha^2 a^2}{48(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{x}{L}} \frac{N_1}{D_0} - \frac{\tau \alpha^2 a^2 x_0}{6(1-\nu^2)} \\ Q_x &= \frac{\tau \alpha^2 a^2 \rho^2}{24(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{x}{L}} \frac{N_2}{D_0} \\ N_\varphi &= -\tau a \sqrt{\frac{x}{L}} \frac{N_3}{D_0} + \tau a l \left(\frac{x-x_0}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ただし

$$D_0 = Z_1(\xi_0)Z_1'(\xi_0) + Z_2(\xi_0)Z_2'(\xi_0) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= l\xi^2 [Z_1(\xi_0)Z_2'(\xi) - Z_2(\xi_0)Z_1'(\xi)] \\ &\quad + 4l\xi [Z_2(\xi_0)Z_1(\xi) - Z_1(\xi_0)Z_2(\xi)] \\ &\quad + 8l[Z_1(\xi_0)Z_1'(\xi) + Z_2(\xi_0)Z_2'(\xi)] \\ &\quad + 2\frac{\xi^2}{\xi_0} L [Z_1'(\xi_0)Z_1(\xi) + Z_2'(\xi_0)Z_2(\xi)] \\ &\quad - 8\frac{\xi}{\xi_0} L [Z_1'(\xi_0)Z_1(\xi) + Z_2'(\xi_0)Z_2(\xi)] \\ &\quad + 16\frac{L}{\xi_0} [Z_2'(\xi_0)Z_1'(\xi) - Z_1'(\xi_0)Z_2'(\xi)] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} N_2 &= l\xi [Z_1(\xi_0)Z_1(\xi) + Z_2(\xi_0)Z_2(\xi)] \\ &\quad + 2l[Z_1(\xi_0)Z_2'(\xi) - Z_2(\xi_0)Z_1'(\xi)] \\ &\quad + 2\frac{\xi}{\xi_0} L [Z_2'(\xi_0)Z_1(\xi) - Z_1'(\xi_0)Z_2(\xi)] \\ &\quad + 4\frac{L}{\xi_0} [Z_2'(\xi_0)Z_2'(\xi) + Z_1'(\xi_0)Z_1'(\xi)] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} N_3 &= l[Z_1(\xi_0)Z_1'(\xi) + Z_2(\xi_0)Z_2'(\xi)] \\ &\quad + 2\frac{L}{\xi_0} [Z_2'(\xi_0)Z_1(\xi) - Z_1'(\xi_0)Z_2(\xi)] \end{aligned} \quad (19)^*$$

$$\begin{aligned} {}^+ N_1 &= -pp_0 \left[\frac{l\xi^2}{\sqrt{2}} (\cos X - \sin X) + 4l\xi \sin X - \frac{8l}{\sqrt{2}} (\cos X + \sin X) - 2\frac{\xi^2}{\xi_0} L \cos X \right. \\ &\quad \left. + 8\frac{\xi}{\xi_0} L \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos X - \sin X) + 16\frac{L}{\xi_0} \sin X \right] \\ N_2 &= pp_0 \left[l\xi \cos X + \sqrt{2} l (\sin X - \cos X) - \sqrt{2} \frac{\xi}{\xi_0} L (\sin X + \cos X) + 4\frac{L}{\xi_0} \cos X \right] \\ N_3 &= pp_0 \left[\frac{l}{\sqrt{2}} (\cos X + \sin X) - 2\frac{L}{\xi_0} \sin X \right] \end{aligned} \quad (23)$$

これ等を (15) 式に代入し、さらに

$$\beta = \frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{\sqrt{a t_u}} \quad (24)$$

とし

$$\rho = \beta \sqrt{2L}, \quad \xi = 2\sqrt{2} \beta \sqrt{Lx}, \quad \xi_0 = 2\sqrt{2} \beta L^{++} \quad (25)$$

* $Z_1(\xi)$, $Z_2(\xi)$ 等を前述の理由により (14) 式の近似式を用いることとし、

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} = p, \quad \frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi_0} e^{\frac{\xi_0}{\sqrt{2}}} = p_0 \quad (20)$$

なる記号を用いれば上式において、

$$\left. \begin{aligned} Z_1(\xi_0)Z_1'(\xi_0) + Z_2(\xi_0)Z_2'(\xi_0) &= p_0^2/\sqrt{2} \\ Z_1(\xi_0)Z_2'(\xi) - Z_2(\xi_0)Z_1'(\xi) &= pp_0 \sin(X - \pi/4) \\ Z_2(\xi_0)Z_1(\xi) - Z_1(\xi_0)Z_2(\xi) &= -pp_0 \sin X \\ Z_1(\xi_0)Z_1'(\xi) + Z_2(\xi_0)Z_2'(\xi) &= pp_0 \cos(X - \pi/4) \\ Z_1'(\xi_0)Z_1'(\xi) + Z_2'(\xi_0)Z_2'(\xi) &= pp_0 \cos X \\ Z_1'(\xi_0)Z_1(\xi) + Z_2'(\xi_0)Z_2(\xi) &= pp_0 \cos(X + \pi/4) \\ Z_2'(\xi_0)Z_1'(\xi) - Z_1'(\xi_0)Z_2'(\xi) &= -pp_0 \sin X \\ Z_1(\xi_0)Z_1(\xi) + Z_2(\xi_0)Z_2(\xi) &= pp_0 \cos X \\ Z_2'(\xi_0)Z_1(\xi) - Z_1'(\xi_0)Z_2(\xi) &= -pp_0 \sin(X + \pi/4) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ただし

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_0 - \xi)$$

さらに

$$\begin{aligned} \sin(X + \pi/4) &= \cos(X - \pi/4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos X + \sin X) \\ \sin(X - \pi/4) &= -\cos(X + \pi/4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin X - \cos X) \end{aligned} \quad (22)$$

なる関係に留意し $N_1 \sim N_3$ は次のとくなる。[†]

^{††} なる関係を用いれば次のとくなる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \tau l^3 \left(K_1 - \frac{1}{2\beta^4 l^4} \frac{x_0}{L} \frac{l}{L} \right) \\ Q_x &= \tau l^2 K_2 \\ N_\varphi &= \tau a l \left(\frac{x-x_0}{l} - K_3 \right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ただし

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2\beta^2 l^2} e^{-X} \sqrt[4]{Y} \left[\left\{ \left(1 - \frac{1}{\beta l} \right) Y - \frac{1}{\beta^2 l^2} \frac{l}{L} \left(\frac{l}{L} - \sqrt[4]{Y} \right) \right\} \cos X - \left\{ Y - \frac{2}{\beta l} \frac{l}{L} \sqrt[4]{Y} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\beta^2 l^2} \frac{l}{L} \left(\frac{l}{L} + \sqrt[4]{Y} \right) - \frac{1}{\beta^3 l^3} \frac{l^2}{L^2} \right\} \sin X \right] \\ K_2 &= \frac{1}{\beta l} e^{-X} \sqrt[4]{Y} \left[\left\{ \left(1 - \frac{1}{2\beta l} \right) \sqrt[4]{Y} - \frac{1}{2\beta l} \frac{l}{L} \left(1 - \frac{1}{\beta l} \right) \right\} \cos X + \frac{1}{2\beta l} \left(\frac{l}{L} - \sqrt[4]{Y} \right) \sin X \right] \\ K_3 &= e^{-X} \sqrt[4]{Y} \left[\cos X + \left(1 - \frac{1}{\beta l} \right) \sin X \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{x}{L} = 1 - \frac{l}{L} \frac{x'}{t_l}, \quad X = 2\beta l \frac{L}{l} (1 - \sqrt[4]{Y}) \\ \beta l &= \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{l}{a} \sqrt{\frac{a}{t_u}} \end{aligned} \quad (28)$$

壁厚一定の場合には

$$\frac{l}{L} = 0, \quad Y = 1, \quad X = \beta x'$$

となり、従つて

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{rl^3}{2\beta^2 l^2} e^{-\beta x'} \left[\left(1 - \frac{1}{\beta l} \right) \cos \beta x' - \sin \beta x' \right] \\ Q_x &= \frac{rl^2}{\beta l} e^{-\beta x'} \left[\left(1 - \frac{1}{2\beta l} \right) \cos \beta x' - \frac{1}{2\beta l} \sin \beta x' \right] \\ N_\phi &= ral \left[\left(1 - \frac{x'}{l} \right) - e^{-\beta x'} \left\{ \cos \beta x' + \left(1 - \frac{1}{\beta l} \right) \sin \beta x' \right\} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

以上の応力計算式は $Z_1(\xi)$, $Z_2(\xi)$, $Z_1'(\xi)$ 及び $Z_2'(\xi)$ に近似式として (14) 式を用いている関係上、壁厚一定の場合のごとく ξ が無限大となるときは正解を与えるが、 ξ が 10 前後なる特殊な場合には 10 % 前後の誤差を与えるので $Z_1(\xi) \sim Z_2'(\xi)$ の近似式として,*

$$\begin{aligned} *Z_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \left[L_0(\xi) \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right. \\ &\quad \left. - M_0(\xi) \sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \left[M_0(\xi) \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right. \\ &\quad \left. + L_0(\xi) \sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \left[S_0(\xi) \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right. \\ &\quad \left. - T_0(\xi) \sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2'(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \left[T_0(\xi) \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right. \\ &\quad \left. + S_0(\xi) \sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

ただし

$$L_0(\xi) = 1 + \frac{1}{8\xi} \cos \frac{\pi}{4},$$

$$M_0(\xi) = -\frac{1}{8\xi} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$S_0(\xi) = 1 - \frac{3}{8\xi} \cos \frac{\pi}{4},$$

$$T_0(\xi) = \frac{3}{8\xi} \cos \frac{\pi}{4}$$

上式を整理すれば次のごとくなる。†

$$\begin{aligned} +Z_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \left[\cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) + \frac{1}{8\xi} \sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right] \\ Z_2(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \left[\sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) - \frac{1}{8\xi} \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right] \\ Z_1'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \left[\cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) - \frac{3}{8\xi} \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right] \\ Z_2'(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi\xi} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \left[\sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) - \frac{3}{8\xi} \sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

なお、トムソン函数と称せられる $ber(\xi)$ 及び bei る。
(ξ) と $Z_1(\xi)$ 及び $Z_2(\xi)$ との関係は次のごとくである。

$$Z_1(\xi) = ber(\xi), \quad Z_2(\xi) = -bei(\xi),$$

$$Z_1'(\xi) = ber'(\xi), \quad Z_2'(\xi) = -bei(\xi) \quad \text{次のとくなる。}$$

この(31)式を(14)式の代りに用いると(21)式は

$$\begin{aligned} Z_1(\xi_0)Z_1'(\xi_0) + Z_2(\xi_0)Z_2'(\xi) &= \frac{p_0^2}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{3\sqrt{2}}{8\xi_0} - \frac{3}{64\xi_0^2} \right] \\ Z_1(\xi_0)Z_2'(\xi) - Z_2(\xi_0)Z_1'(\xi) &= pp_0 \left[\sin\left(X - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{8\xi} \sin X - \frac{1}{8\xi_0} \cos X + \frac{3}{64\xi_0\xi} \cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ Z_2(\xi_0)Z_1(\xi) - Z_1(\xi_0)Z_2(\xi) &= pp_0 \left[-\sin X - \frac{1}{8\xi} \cos\left(X - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8\xi_0} \cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{64\xi_0\xi} \sin X \right] \\ Z_1(\xi_0)Z_1'(\xi) + Z_2(\xi_0)Z_2'(\xi) &= pp_0 \left[\cos\left(X - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{8\xi} \cos X + \frac{1}{8\xi_0} \sin X - \frac{3}{64\xi_0\xi} \sin\left(X + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ Z_1'(\xi_0)Z_1'(\xi) + Z_2'(\xi_0)Z_2'(\xi) &= pp_0 \left[\cos X - \frac{3}{8\xi} \cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{8\xi_0} \cos\left(X - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{9}{64\xi_0\xi} \cos X \right] \\ Z_1'(\xi_0)Z_1(\xi) + Z_2'(\xi_0)Z_2(\xi) &= pp_0 \left[\cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8\xi} \sin X - \frac{3}{8\xi_0} \cos X + \frac{3}{64\xi_0\xi} \sin\left(X - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ Z_2'(\xi_0)Z_1'(\xi) - Z_1'(\xi_0)Z_2'(\xi) &= pp_0 \left[-\sin X + \frac{3}{8\xi} \sin\left(X + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8\xi_0} \sin\left(X - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{9}{64\xi_0\xi} \sin X \right] \\ Z_1(\xi_0)Z_1(\xi) + Z_2(\xi_0)Z_2(\xi) &= pp_0 \left[\cos X - \frac{1}{8\xi} \sin\left(X - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8\xi_0} \sin\left(X + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{64\xi_0\xi} \cos X \right] \\ Z_2'(\xi_0)Z_1(\xi) - Z_1'(\xi_0)Z_2(\xi) &= pp_0 \left[-\sin\left(X + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8\xi} \cos X + \frac{3}{8\xi_0} \sin X + \frac{3}{64\xi_0\xi} \cos\left(X - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

ただし

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}}, \quad p_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi_0}} e^{\frac{\xi_0}{\sqrt{2}}},$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_0 - \xi)$$

これ等の結果を(15)式に代入し、(24)～(25)の関係に留意さらに微小項を省略すれば結局第1節に示した応力実用計算式をうることができる。なお(15)式の M_x の第2項も微小でありこれも省略してある。実用計算式の誘導にあたり積分常数 $C_1 \sim C_4$ の決定には水槽の下端条件のみを使用し從つて水槽の下半部の諸応力の計算にのみ適用すべきとくなるが、実際問題としては上半部に対しては(1)式の係数 $K_1 \sim K_3$ を0として計算してもさしつかえない。

4. 計算例

比較的 ξ の数値の小なる場合の例として $a=l$, $a=20t_u$, $t_0=0$ なる寸法の水槽を考える。 ν は0とする。参考のため水槽の下端及び中央における ξ の値はそれぞれ 16.64 及び 11.77 である。この例題においては、 $x_0=0$, $L=l$ であり、また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta l} &= \frac{1}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t_u}{a}} = 0.16990, \\ \beta l &= 5.8858 \end{aligned}$$

である。 $x/l=1$, 0.8 及び 0.6 なる壁体下半部諸点の応力を計算するものとする。

$x/l=1$ においては、

$$Y=1, X=0, \cos X=1, \sin X=0, e^{-X}=1*$$

* $x/l=0.8$ においては、

$$Y=0.8, X=1.2427, \cos X=0.32224,$$

$$\sin X=0.94665, e^{-X}=0.28860,$$

$$\sqrt{Y}=0.89443, \sqrt[4]{Y}=0.9457$$

$x/l=0.6$ においては、

$$Y=0.6, X=2.6533, \cos X=-0.88311,$$

$$\sin X=0.46911, e^{-X}=0.07042,$$

$$\sqrt{Y}=0.77460, \sqrt[4]{Y}=0.8801$$

これ等の値を用いれば(1)～(3)の応力実用計算式より表-1に示す結果となる。

表-1

x/l	M_x	Q_x	N_ϕ	摘要
1	$1.2533 \times 10^{-2} \tau l^3$	$0.14820 \tau l^2$	0 τal	(1) 式
0.8	-0.1075 "	0.01193 "	0.4880 "	
0.6	-0.0547 "	-0.00605 "	0.6290 "	
1	1.2632 "	0.14980 "	0 "	正解
0.8	-0.1101 "	0.01193 "	0.4872 "	
0.6	-0.0564 "	-0.00611 "	0.6288 "	
1	1.1981 "	0.14348 "	0 "	(26) 式
0.8	-0.1196 "	0.01157 "	0.4976 "	
0.6	-0.0549 "	-0.00584 "	0.6306 "	

表-1 中にはその中央欄に正解による結果を示し、またさらに参考のため下欄に $Z_1(\xi)$, $Z_2(\xi)$ 等の近似式として(14)式を用いて得たる(26)式による結果を附記した。

この計算例題においては壁体下端の最大なる M_t 及び Q_x の値は、著者の誘導せる応力実用算式(1)式によるとき正解に比し、1%以内の誤差を有するに過ぎず、また一般に壁体の上端の厚さ t_0 は0ではなく水槽の高さもその半径より大なる場合にはさらに誤差は僅少となる。

なおこの応力実用計算式は地中埋設の水槽等の土圧による応力を計算する場合にも使用できる。ただしこの場合には γ の代りに $-\gamma(1 - \sin \phi)/(1 + \sin \phi)$ とし γ は土の単位重量、 ϕ は土の摩擦角である。

参考文献

- 1) Ferd. Schleicher : Kreisplatten auf elastischer Unterlage.
- 2) S. Timoshenko : Theory of Plates and Shells.
- 3) British Association Report, 1912.
- 4) Dwight : Tables of Integrals and other Mathematical Data.

松村・中西：弾性地盤上の円形水槽、土木試験所報告 第38号

(昭. 29.3.10)

土木学会刊行物

土木工学論文抄録 第3集	A 4判 230頁	実費 500円	(送料 60円)
" 第4集	A 4判 173頁	" 450円	(" 60円)
土木学会論文集 第3号	B 5判 183頁	" 160円	(" 30円)
" 第4号	B 5判 134頁	" 200円	(" 30円)
" 第5号	B 5判 140頁	" 250円	(" 30円)
" 第6号	B 5判 140頁	" 250円	(" 30円)
" 第9号 (小西博士)	B 5判 9頁	" 20円	(" 10円)
" 第10号 (岡本博士・久保慶三郎)	B 5判 18頁	" 40円	(" 10円)
" 第11号 (林 泰造)	B 5判 11頁 (英文)	" 50円	(" 10円)
" 第12号 (沼田・丸安・黒崎)	B 5判 26頁	" 60円	(" 10円)
" 第14号	B 5判 54頁	" 120円	(" 10円)
" 第15号 (結城博士)	B 5判 9頁 (英文)	" 60円	(" 10円)
" 第16号	B 5判 66頁	" 120円	(" 10円)
" 第17号 (猪股俊司)	B 5判 90頁	" 250円	(" 20円)
" 第18号	B 5判 66頁	" 120円	(" 10円)
" 第19号	B 5判 58頁	" 120円	(" 10円)
コンクリート標準示方書 (昭和26年度)	B 6判 266頁	" 180円	(" 30円)
コンクリート標準示方書解説	B 5判 167頁	" 300円	会員特価240円 (" 30円)
最新土質工学	B 5判 138頁	実費 150円	(" 30円)
土木製図基準(I)	B 5判 46頁	" 200円	(" 30円)
第6回年次学術講演会講演概要	B 5判 100頁	" 150円	会員特価100円 (" 20円)
第7回	B 5判 120頁	実費 200円	会員特価120円 (" 20円)
第8回	B 5判 103頁	実費 150円	(" 20円)
第9回	B 5判 115頁	" 150円	(送 料 共)
第10回	B 5判 140頁	" 150円	(")
昭和26年 夏季講習会パンフレット I コンクリートとダム	B 5判 66頁	" 150円	会員特価120円 (")
II 橋 梁	B 5判 92頁	実費 200円	会員特価150円 (")
昭和27年 夏季講習会パンフレット 建設機械化	B 5判 176頁	実費 300円	(送料 30円)
昭和28年 夏季講習会パンフレット プレストレストコンクリートと構造力学	B 5判 190頁	" 300円	(" 30円)
昭和28年度土木学会名簿	A 5判 472頁	" 200円	会員特価100円 (" 45円)
学術用語集 土木工学篇	B 6判 416頁	実費 315円	(" 35円)

土木学会

東京都千代田区大手町2丁目4番地
振替 東京 16828・電話 (20) 3945・4078