

粘弾性体の対称的載荷による変形挙動について

正 員 山 口 柏 樹*

ON THE DEFORMATION CHARACTERISTICS OF VISCO-ELASTIC BODY UNDER THE SYMMETRICALLY APPLIED LOAD

(JSCE April 1954)

Hakuju Yamaguchi, C.E. Member

Synopsis In this paper various surface deformation formulae of semi-infinite visco-elastic body are introduced under an increasing load and a dynamic load, assuming the stress strain and time relationships of Voigt-type, Maxwell-type and simplified Burger-type, in the following summarized form

$$w = At + Bt^2 + C(1 - e^{-Dt})$$

where A, B, C and D depend on the conditions of loading and are certain functions of rheological constants.

要旨 対称的な増加荷重並びに動的荷重を受ける半無限粘弾性体の表面変形式をその応力-歪-時間関係式が Voigt 型, Maxwell 型及び簡単化された Bürger 型であるとして導く。その式は要約すれば A, B, C, D を荷重様式及び流動学的常数により支配されるものとするとき

$$w = At + Bt^2 + C(1 - e^{-Dt})$$

の形をとる。

1. はしがき

粘性地盤を非可圧性 Voigt 型粘弾性体と考え、対称的漸増荷重の下での定常的沈下表式は始めて最上教授により理論的に求められ、それが粘性地盤の沈下に関する Housel の実験式と一致することが示され、あわせて粘性地盤の地耐力を規定することが広汎に議論された¹⁾。ある種の粘土が Voigt 型の変形機構でよく説明されることは石本博士等が粘性物質について行つた一連の実験の一つに報告されており²⁾、また Maxwell 型で土の力学的性質を表わすことを試みた人もある³⁾。別にこれ等の二つの基本の型、またはそれを組み合わせた機構で粘土の力学的性質が表示できるとして石井技官⁴⁾、篠原技官⁵⁾ は二次圧密現象を論じている。かくのごとく粘土がその名のごとく変形の特長として粘性の面が相当現われていることは、実験的にも理論的にも否定できないところであろう。もちろん塑性的な性質を無視して粘弾性的取扱いに終始することは片手落ちの感が深いのであるが、現在の段階においては粘弾性物質の各種の変形の挙動を調べることが先決と思われる。粘土のようなものは、いかなる型の粘弾性模型の組合せで表わすのが妥当(少なくともよい近

似)であるかを定める問題があるわけであるが、この種実験的な研究の予備知識としても前記の理論的な説明が必要となつてくるであろうし、これはまた通常比較的純粋な粘弾性物質と考えられているピッチ、パラフィン、ゼラチンのようなものから、高温における金属(タンゲステン⁶⁾等)の変形にも直接的応用の途があるであろう。

本文の計算においてはすべて慣性項を省略できるとした。この仮定の下での粘弾性体の解法は、もし同一の応力境界条件に対する純弾性体の変位成分が既知であるならば、それに粘弾性的オペレーターの逆演算を行うことにより遂行されるということは確かであるが、これはごく簡単な場合をのぞいては、実際上なかなか厄介である。以下は迂遠ではあるが変位の方程式を解く(云わば正攻法)方法による。紙数の関係で多くの場合式の導出法は省略した。

なお本文の一部(主に 2.)は昭和 28 年度土木学会年次講演会で述べたものである。

2. 可圧性 Voigt 型の変形

円壙坐標(r, θ, z)の z 軸は表面より粘弾性体内に向い、 r, z 方向の変位成分を u, w とすると変位の式は

$$\left. \begin{aligned} (L+K) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) &= 0 \\ (L+K) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ L &= \lambda + \lambda' \partial / \partial t \quad K = \mu + \mu' \partial / \partial t \end{aligned} \right\} \dots (2.1)$$

式中 λ, μ は Lamé の弾性常数であり λ', μ' は対応する粘性係数である。また Δ は膨脹で

* 東京大学大学院特別研究生, 工学部土木教室

$$A = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

(2.1) を解いて初期条件 $u|_{t=0}=0, w|_{t=0}=0$ なる解は

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} \left[B J_1(\alpha r) + \frac{e^{-\mu t/\mu'}}{2\mu'\alpha} \{ J_1(\alpha r) \right. \\ &\quad \left. - \alpha r J_0(\alpha r) \} \int_0^t e^{\mu t/\mu'} (L+K) A dt \right] d\alpha \\ w &= \int_0^\infty e^{-\alpha z} \left[\left(B - \frac{A}{\alpha} \right) J_0(\alpha r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\mu t/\mu'}}{2\mu'\alpha} \{ \alpha r J_1(\alpha r) - J_0(\alpha r) \} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t e^{\mu t/\mu'} (L+K) A dt \right] d\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.2)$$

J_0, J_1 はそれぞれ零次及び一次の Bessel 函数であり A, B は α, t の函数で境界条件より決まる。ただし $B|_{t=0}=0$ これより表面での応力成分を求めれば

$$\left. \begin{aligned} (\widehat{zz})_0 &= \int_0^\infty \left[\{ (2L+3K)A - 2\alpha KB \} \right. \\ &\quad \left. - (L+K) \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha A) \right] J_0(\alpha r) d\alpha \\ (\widehat{rz})_0 &= \int_0^\infty \{ (KA - 2\alpha KB) - (L+K) \} \\ &\quad \times \alpha \frac{\partial A}{\partial \alpha} J_1(\alpha r) d\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3)$$

境界条件として $r=0$ にその中心を一致させる半径 a の円形撓性載荷板による一様強度の載荷状態を考えると荷重強度が $p(t)$ で与えられるとき

$$\left. \begin{aligned} (\widehat{zz})_0 &= -ap(t) \int_0^\infty J_1(\alpha a) J_0(\alpha r) d\alpha \\ (\widehat{rz})_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.4)$$

をとることができる。(2.3)と(2.4)を比べて A, B は

$$\begin{aligned} A &= \frac{-a J_1(\alpha a)}{\lambda' + \mu'} e^{-\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'}\right)t} \int_0^t p(t) e^{\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'}\right)t} dt \\ B &= \frac{ae}{2\mu'} \int_0^t \left[\frac{-J_1(\alpha a)}{\alpha(\lambda' + \mu')} \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'}\right)t} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t p(t) e^{\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'}\right)t} dt + p(t) \frac{\partial J_1(\alpha a)}{\partial \alpha} \right] \\ &\quad \times e^{\frac{\mu t}{\mu'}} dt \end{aligned}$$

のごとくなり (2.2) から

$$\begin{aligned} (w)_0 &= \frac{a\xi}{2} \left[\frac{e^{-\frac{\mu t}{\mu'}}}{\mu'} \int_0^t e^{\frac{\mu t}{\mu'}} p(t) dt + \frac{e^{-\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'}\right)t}}{\lambda' + \mu'} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t e^{\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'}\right)t} p(t) dt \right] \dots\dots\dots(2.5) \end{aligned}$$

ただし

$$\xi = \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha a) J_0(\alpha r)}{\alpha} d\alpha$$

上式第二項は圧縮性を考えに入れた場合の変位の増加に寄与する項であつてこの項は非可圧性 ($\lambda \rightarrow \infty$) のときは消失する。具体的変形を求めるために

$$p(t) = p_0 + p_1 t \quad (p_0, p_1: \text{常数})$$

とすれば (2.5) は

$$\begin{aligned} (w)_0 &= \frac{a\xi}{2} \left[\frac{1}{\mu} \left\{ (p_0 + p_1 t - \frac{\mu'}{\mu} p_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-\frac{\mu t}{\mu'}} \left(p_0 - \frac{\mu'}{\mu} p_1 \right) \right\} + \frac{1}{\lambda + \mu} \left\{ (p_0 + p_1 t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\lambda' + \mu'}{\lambda + \mu} p_1) - e^{-\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'}\right)t} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(p_0 - \frac{\lambda' + \mu'}{\lambda + \mu} p_1 \right) \right\} \right] \dots\dots\dots(2.6) \end{aligned}$$

これは過渡解 (非定常解) であつて定常的解を $\delta = (w)_0|_{t \rightarrow \infty}$ とすると

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{a\xi}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(p_0 + p_1 t - \frac{\mu'}{\mu} p_1 \right) + \frac{1}{\lambda + \mu} \left(p_0 + p_1 t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\lambda' + \mu'}{\lambda + \mu} p_1 \right) \right\} \dots\dots\dots(2.7) \end{aligned}$$

また非可圧性沈下を $(\bar{w})_0, \bar{\delta}$ にて表わせば上式から

$$\begin{aligned} (\bar{w})_0 &= \frac{a\xi}{2\mu} \left[p_1 t + \left(p_0 - \frac{\mu'}{\mu} p_1 \right) \left(1 - e^{-\frac{\mu t}{\mu'}} \right) \right] \\ &\quad \dots\dots\dots(2.6') \end{aligned}$$

$$\bar{\delta} = \frac{a\xi}{2\mu} \left(p_0 + p_1 t - \frac{\mu'}{\mu} p_1 \right) \dots\dots\dots(2.7')$$

最後の式は最上教授が初めて見出された Housel の実験公式に対応するところのものである。(2.6), (2.6') で $p(t) = p_1 t$ に対する式を作りそれを

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{(w)_0}{\xi} x + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} p_1 \\ &\quad \times \left\{ \frac{\mu'}{\mu^2} \left(1 - e^{-\frac{\mu t}{\mu'}} \right) + \frac{\lambda' + \mu'}{(\lambda + \mu)^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - e^{-\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'}\right)t} \right) \right\} \dots\dots\dots(2.8) \end{aligned}$$

$$p(t) = \frac{\mu(\bar{w})_0}{\xi} x + \frac{\mu'}{\mu} p_1 \left(1 - e^{-\frac{\mu t}{\mu'}} \right) \dots\dots\dots(2.8')$$

ただし $x = 2/a$: 周積分

のごとく改めるとこれ等がこの場合の Housel 式となる。定常的な場合と異なり (2.8), (2.8') の第二項は常数でなく時間の函数であるから、広い意味ではまた沈下によつて変り得るような性質を持つものと云える。上記諸式内の積分 ξ は、しばしば現われる値であるが、最上教授が一部 (*印) を求められている。

r/a	(1)	1/2	3/4	1.0	2	3	4	∞
ξ	1.000*	0.935*	0.856*	0.637*	0.302	0.179	0.129	0

その値は前表のごとくである。

(2.6') で $p_1=0$ または $p_0=0$ に応ずる

$$\overline{(w)}_0 = \frac{a\xi}{2\mu} p_0 \left(1 - e^{-\frac{\mu t}{\mu'}}\right) \dots\dots\dots (2.9)$$

$$\overline{(w)}_0 = \frac{a\xi}{2\mu} p_1 \left\{ t - \frac{\mu'}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{\mu t}{\mu'}}\right) \right\} \dots\dots\dots (2.10)$$

を 図-1 及び 図-2 に示す。(2.9) は定荷重の下での流動現象を表わしている。粘性の効くほど (μ'/μ の値の大きいほど) 流動はなかなか完結しにくいわけである。また可圧性はこれを助長する傾向にある(式 2.6 参照)。なおこの μ'/μ 値は石本博士の白粘土に関する実験値²⁾を参照した。

図-1

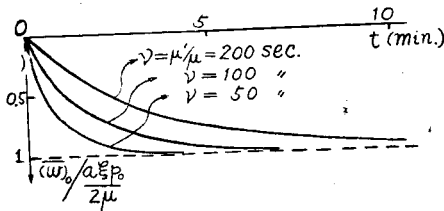
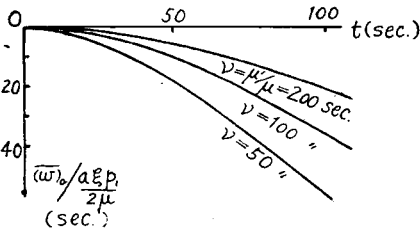


図-2



3. 非可圧性 Maxwell 型の変形*

剪断記号による Maxwell 型の応力-歪-時間関係式は

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \mu e^{-\frac{t}{\zeta}} \int_0^t e^{\frac{t'}{\zeta}} \frac{\partial r}{\partial t'} dt' = Mr \\ \zeta &: \text{弛緩時間 (relaxation time)} \\ M &= \mu e^{-\frac{t}{\zeta}} \int_0^t e^{\frac{t'}{\zeta}} \frac{\partial r}{\partial t'} dt' \end{aligned} \right\} (3.1)$$

このような M が前節の L または K の代りに行われる。非可圧性変位から可圧性変位への移行は比較的容易である(2.参照)ので、簡単のため非可圧性を仮定する。式の取扱いは前とほとんど軌を一にするので最後の結果を記せば

$$\overline{(w)}_0 = \frac{a\xi}{2\mu} \left\{ p(t) + \frac{1}{\zeta} \int_0^t p(t') dt' \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

となる。いま (3.1) を省みると $\tau|_{t=0} = 0$ であるから、これは $r|_{t=0} = 0$ を意味し、従つて $(w)_0|_{t=0} = 0$ または (3.2) から荷重強度が $p(0) = 0$ なることが要請される。これは $p(t)$ が常数の場合など矛盾を感じ

られるようであるがこの場合は、

$$p(t) = p_0(1 - e^{-kt}) \quad (k: \text{十分大きい正量})$$

のごとく解釈すれば瞬時荷重の難点も避けられる。

さて (3.2) は $p(t) = p_0 + p_1 t$ に対して $p_1 t = P$ とおくと

$$\overline{(w)}_0 = \frac{a\xi}{2\mu} \left(p_0 + \frac{p_0 t}{\zeta} + P + \frac{P^2}{2\zeta p_1} \right) \dots\dots\dots (3.3)$$

$p_0 = 0$ のときは $P \equiv p(t)$ であるから

$$\overline{(w)}_0 = \frac{a\xi}{2\mu} \left\{ p(t) + \frac{p(t)^2}{2\zeta p_1} \right\} \dots\dots\dots (3.4)$$

で $\overline{(w)}$ と $p(t)$ の関係は拋物線的になる。一般に ζ はかなり大きな値であり、従つて比較的急激に荷重を増してゆく場合 t の広い範囲で $\overline{(w)}_0 \approx a\xi p(t)/2\mu$ のとき弾性変位を示す。 $p_1 = 0$ のときは定荷重の下でも変形は t とともに直線的に増加を続ける。これはクリープ*の現象である。当然予期されることであるが $\overline{(w)}$ を定値に保つためには $(\partial w_0 / \partial t = 0)$ (3.2) から

$$p(t) = Ae^{-\frac{t}{\zeta}} \quad (A: \text{初期荷重強度})$$

の形を採るべきである。

4. 非可圧性 Burger 型 (簡単化された場合) の変形

図-3 弾性及び粘性を模型化するスプリング及びダッシュポットを、図-3のごとく組合せた場合 (3.1) に対応する剪断応力-歪の関係式は

$$\left. \begin{aligned} \tau &= Nr \\ N &= \frac{\mu\zeta}{\zeta + \nu} e^{-\frac{t}{\zeta + \nu}} \int_0^t e^{\frac{t'}{\zeta + \nu}} \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \nu \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) dt' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1)$$

$\nu = \mu'/\mu$: 粘弾性比

これももちろん $\zeta \rightarrow \infty$ に対して Voigt 型、また $\nu \rightarrow 0$ に対しては Maxwell 型になる。従前どおりの初期条件の下で

$$\overline{(w)}_0 = \frac{a\xi(\zeta + \nu)}{2\mu\zeta\nu} e^{-\frac{t}{\zeta + \nu}} \int_0^t e^{\frac{t'}{\zeta + \nu}} \int_0^{t'} \left\{ \frac{p(t'')}{\zeta + \nu} + \frac{dp(t'')}{dt''} \right\} dt'' dt' \dots\dots\dots (4.2)$$

を得る。しかして $p(t) = p_0 + p_1 t$ に対して

$$\overline{(w)}_0 = \frac{a\xi}{2\mu\zeta} \left[p_0 \left\{ t + \zeta \left(1 - e^{-\frac{t}{\zeta + \nu}}\right) \right\} + p_1 \left\{ (t^2 - 2\nu t + 2\nu^2) - \nu^2 e^{-\frac{t}{\zeta + \nu}} \right\} \right]$$

* 流動もクリープも本来同義語である。漸近の変形を流動(式 2.10 参照)、直線の変形をクリープと称したがこのような区別はここだけのものに過ぎない。

$$+ (\zeta + \nu) \left(t - \nu + \nu e^{-\frac{t}{\nu}} \right) \Big] \dots\dots\dots (4.3)$$

これは $\zeta \rightarrow \infty$ に対し (2.6') にまた $\nu \rightarrow 0$ に対し (3.2) に帰着する。まづ $p_0 = 0$ とすると

$$\overline{(w)}_0 = \frac{ae\xi}{2\mu} \left[\left\{ p(t) - \nu p_1 + \nu p_1 e^{-\frac{p(t)}{\nu p_1}} \right\} + \frac{p(t)^2}{2\zeta p_1} \right] \dots\dots\dots (4.4)$$

$$\overline{\delta} = \frac{ae\xi}{2\mu} \left\{ p(t) - \nu p_1 + \frac{p(t)^2}{2\zeta p_1} \right\} \dots\dots\dots (4.4')$$

(4.4') から ζ の大きな値に対して近似的に

$$p(t) \doteq \mu \delta x / \xi + \nu p_1 \dots\dots\dots (4.5)$$

となりこの場合 Housel の式が大体成立つとみてよい。定荷重 ($p_1 = 0$) のとき (4.3) は

$$\overline{(w)}_0 = \frac{ae\xi}{2\mu} p_0 \left\{ \left(1 - e^{-\frac{t}{\nu}} \right) + \frac{t}{\zeta} \right\} \dots\dots\dots (4.6)$$

図-4

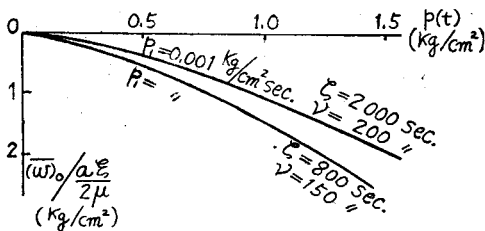
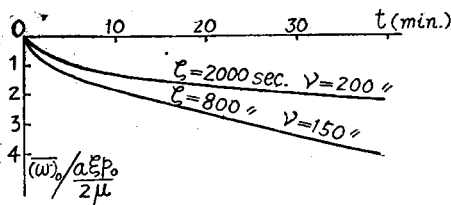


図-5



上式第一項は過渡項であり第二項は終局の沈下を支配する。すなわち $\overline{(w)}$ は流動部分とクリープ部分の和となり、あたかも粘土の一次圧密と三次圧密変形と同様な変形挙動を示している。式 (4.4) 及び式 (4.6) の一形態を 図-4,5 に示す。

5. 衝撃荷重の下での変形

ここで取扱う衝撃荷重は $t = 1/k$ (これを τ_m とする) で最大値 p_0 となるような

$$p(t) = p_0 e k t e^{-kt} \dots\dots\dots (5.1)$$

とする。これは $t = 0$ より τ_m まで急激に増大しそれから以後緩減少する性質の函数で、 k が大きいほど曲線の山は急となり、また k は衝撃増加速度の平均値に等しい量で衝撃係数と呼んでよいと思われる。慣性項を無視した本報告で衝撃作用がどの程度の誤差を招来するかの量的な議論はできないが粘性が十分大きい (k が大か ν が小) 場合はこの誤差はかなり小さいものと

思われるので前諸節の変位式を適用できるとする。

I) 非可圧性 Voigt 型 式 (2.5) で第一項だけをとり $p(t)$ に (5.1) を用いれば $k \gg 1/\nu$ の仮定が許されるとみて

$$\begin{aligned} \overline{(w)}_0 &= \frac{ae\xi}{2\mu} p_0 \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{e^{-\frac{t}{\nu}} - e^{-kt}}{k} - t e^{-kt} \right\} \\ &\equiv \frac{ae\xi}{2\mu} p_0 \varphi(t, \nu, k) \dots\dots\dots (5.2) \end{aligned}$$

φ は第二項の $\frac{1}{\nu} \left\{ \right\}$ で変位係数と呼ぼう。 $\overline{(w)}$ の最大となる時間 (t_m で表わし遅れ時間と称す) は大体 $e^{kt} = t \nu k^2 \dots\dots\dots (5.3)$

で与えられる。 ν 及び k の数種の値に対する t_m 及び t_m/τ_m (これは遅れの程度) を 図-6 に示す。この図より遅れの程度は i) 粘性とともに増し ii) 衝撃とともに増す。また遅れの時間は iii) 粘性とともに増すが iv) 衝撃大となると減つてきてかつ増加率 (勾配) もだんだん小さくなりだんだん粘性に無関係となるが見られる。i) iii) の理由は粘性の本質として明らかであり ii) iv) の場合は大きな衝撃に対しては粘性抵抗が大きい (これは Voigt 型の特性!) ために起り得る変形は主として弾性によるものであることを考えれば理解される。すなわちむしろ弾性的変形挙動を行うのである。

(5.2) の $\varphi(t, \nu, k)$ の一例を 図-7 に示す。この変形曲線は定性的には実験結果と一致している⁷⁾。ただしこの場合十分時間がたてば変形の回復が完全に行われて、いわゆる残留変形は現われない。数多の φ の図から φ_{max} の値を求め $\varphi_{max} \sim k$ を 図-8 に示す。これより i) 一定の ν に対し φ_{max} (これは $\overline{(w)}_0, max$ に比例する) は k の増大にともない減少する。あたかも剛体 (または弾性体) に撃力を及ぼした瞬間の変位はないのと類似的現象である。この場合妥当な理由としては大きい衝撃の場合ほど粘性流動の余地が少ないことが考えられる。ii) φ_{max} は ν が小さいほど k に対する減少率が大きい。より弾性的になりやすい状態におかれているからである。 ν が大きくなるにつれて φ_{max} の減少率がだんだん小さくなることも上記理由にもとづく。iii) また φ_{max} が ν の増加とともに減少するのは自明のことである。

なお大体

$$\varphi_{max} \cdot \nu \cdot k = \text{一定}$$

の関係、及び荷重と φ の増加する部分での時間的均等を \overline{p} (実は k)、 $\overline{\varphi}$ とするとほぼ

$$\overline{p} / \varphi_{oc} \nu k \text{ または } \overline{\varphi} \propto 1/\nu$$

が成立つ。上記の二の式から粘性が衝撃変形において

占める役割の程度がうかがわれるであろう。

II) 非可圧性 Maxwell 型 (3.2) と (5.1) より

$$\overline{(w)}_0 = \frac{ae\xi}{2\mu} p_0 \frac{1}{k\zeta} \left\{ 1 - e^{-kt}(1 + kt - \zeta k^2 t) \right\} \dots\dots\dots (5.4)$$

$$\bar{\delta}_0 = ae\xi p_0 / 2\mu\zeta k \dots\dots\dots (5.4')$$

図-6

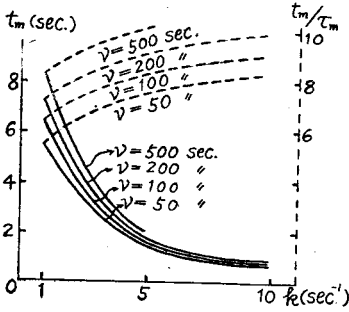


図-7

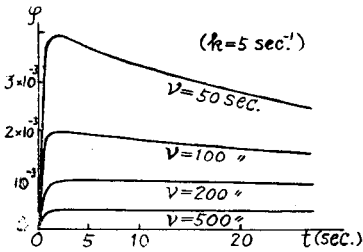
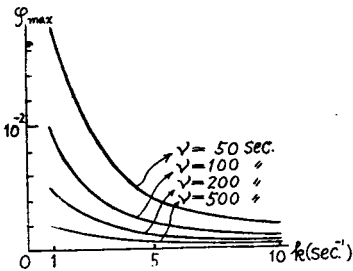


図-8



この型では (5.4') なる量の残留変形 (永久沈下) が起り、これは衝撃の程度により変り一定の p_0 に対しては緩徐なる衝撃を作用させるほど大きくなる。遅れ時間 t_m はほとんど τ_m に等しく通常の粘弾性物質では衝撃直後の変形曲線の位相は荷重曲線のそれに比べてきわめて僅少な遅れを示すのみではほぼ相似したものとなる。なお t_m において十分な近似で

$$\overline{(w)}_{0 \max} = a\xi p_0 / 2\mu \dots\dots\dots (5.5)$$

となりこれは静荷重 p_0 に対する弾性的変位にほかならない。

III) 非可圧性 Burger 型 式 (4.2) より

$$k \gg 1/\nu \quad \zeta + \nu \gg 2/k^2 \quad \zeta k \gg 1$$

とみなしてよい場合に

$$\begin{aligned} \overline{(w)}_0 &= \frac{ae\xi}{2\mu} p_0 \frac{1}{\nu} \left\{ \left(1 + \frac{\nu}{\zeta} \right) e^{-\frac{t}{\nu}} - e^{-kt} \right. \\ &\quad \left. - te^{-kt} + \frac{\nu}{\zeta} \left(1 - e^{-\frac{t}{\nu}} \right) \right\} \\ &= \frac{ae\xi p_0}{2\mu} \psi(k, t, \nu, \zeta) \dots\dots\dots (5.6) \end{aligned}$$

上式 { } 内の末項が残留変形の項であつてその値は (5.2) に同じである。遅れ時間を与える式は

$$\left(\frac{\nu}{\zeta} + kt \right) k\nu = e^{kt} \dots\dots\dots (5.7)$$

でこの式を満たす t を t_M とすると前の t_m との間に

$$\Delta t = t_M - t_m \approx \nu / \zeta k^2 t_m \dots\dots\dots (5.9)$$

が成立ち、 ζ の存在のため遅れの時間はさらに増大する。 τ_m はもちろん t_m が大体 k に逆比例する (図-6 参照) ことから上式は

$$\Delta t / \tau_m \propto \nu / \zeta$$

となり遅れの程度の増分は k に無関係である。

(5.6) の変位係数 ψ の最大値を ψ_{\max} とすると $\psi_{\max} / \varphi_{\max}$ は一定の k に対し ν がが増すほど、また ζ が小さくなるほど大きくなり一定の ν に対しては k の大くなるほど小さくなりいずれもほぼ直線的関係にある。

6. 結び

$p(t) = p_0 + p_1 t$ の対称的荷重を受ける非可圧性粘弾性体の表面の沈下は、 A, B, C , を載荷板半径 a , 荷重強度に比例して剛性率, または弛緩時間に逆比例的に関係するよう量とし

$$\overline{(w)}_0 = At + Bt^2 + C \left(1 - e^{-\frac{t}{\nu}} \right) \dots\dots\dots (6.1)$$

の形で一般に表わされる。ここで ν は粘弾性比である。

i) Voigt 型では $B=0$, さらに $p_1=0$ のとき $A=0$ となり流動的変形を示し、これは粘性が大きくなるほど顕著である。可圧性の影響は新たなる附加項 $c \left(1 - e^{-\frac{t}{\nu}} \right)$ で表わされる。

ii) Maxwell 型では $\nu \rightarrow 0$ とする。しかし $p_1=0$ のときは $B=0$ なるクリープを示す粘性の大きいほどその勾配は大きい。また $p_0=0$ のとき較荷強度と沈下量は抛物線関係にある。

iii) Burger 型では一般の式 (6.1) が行われ i) ii) をそれぞれ特別の場合として含む。

$p(t) \propto te^{-kt}$ なる衝撃荷重に対する変形は衝撃及

び粘性係数によつて変り、粘性が増すにつれ遅れ時間が増し最大変位はへる。また衝撃が大きくなるにつれ遅れの程度は増し最大変位は小さくなる。なお Voigt 型では見られぬが Maxwell 型では残留変形が生じ、これは衝撃に逆比例する。

まだここで述べた以外の多くの問題（有限な層、斜めの層の問題、不均一な場合への拡張、内部応力の考察等）があるが、これ等はすべて別の機会に譲る。

本研究に関して終始重要な御示唆を賜りかつ懇切な御指導を頂いている東京大学教授最上博士に対し深く感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 最上武雄：東大理工研報告 第1巻第5.6号 (1947) または Proc. 2nd Int. Conf. Soil Mech. & Found. Eng. vol. I, 1948.
- 2) 石本巳四雄・飯田汲事：東大震研彙報第14巻、第15巻
- 3) 宮部直巳：同上第14巻 p. 543
- 4) 石井靖丸：最新土質工学 (昭和25年)
- 5) 篠田仁吉：土木学会誌第38巻第5号
- 6) 最新金属学大系：第1巻 p. 246
- 7) A. Casagrande & W.L. Shannon : Proc. 2nd Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng. vol. V, 1948. (昭.28.11.9)

層状軟弱地盤の圧密沈下の近似計算法

准員 梶原光久*

ON AN APPROXIMATE CALCULATION METHOD OF THE CONSOLIDATION SETTLEMENT OF A STRATIFIED SOFT FOUNDATION

(JSCE April 1954)

Mitsuhsa Kajiwara, C.E. Member

Synopsis We cannot use the approximate calculation method of the consolidation settlement of a uniformly soft foundation when the coefficient of consolidation is different in each layer. The author has found that the pore water pressure curve approximately forms a parabola in each layer of a soft specimen that has two layers and equal stress at every depth. So he proposes an approximate method by which the consolidation settlement can be calculated drawing parabolas to satisfy the initial and boundary conditions.

要旨 各層で圧密係数が異なる軟弱地盤の圧密沈下を計算する場合には、単一層の近似計算法をそのまま適用することはできない。本文は二層の場合間隙水圧曲線が各層で近似的に抛物線を形成することを利用して、これらが初期及び境界条件を満足するよう適当に修正して圧密沈下を計算する方法を述べたものである。

1. 緒言

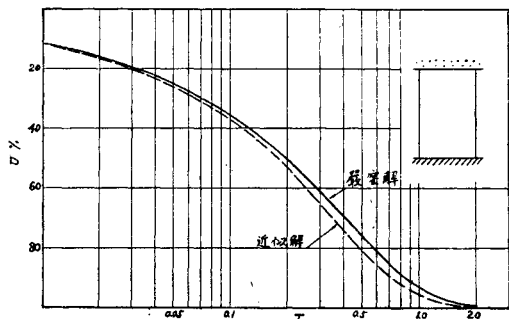
K. Terzaghi によつて単一層の圧密に関する巧妙な理論が発表されてより、この方面の研究が活発となり、この理論の三次元拡張¹⁾や、二次圧密のような粘土の本質に関する研究²⁾にまで発展してきた。しかし実際の構造物による地盤の沈下は弾性沈下、塑性流動による沈下等を含めたもので、これらを計算して実測値と比較検討することは相当面倒であるが、最も根本的な障害の一つは軟弱地盤が層状で各層の状態が異なることであろう。このため単一層の近似解は適用さ

れず、やむをえず各層の諸常数の平均値を採用し単一層として沈下を計算している。筆者は九州土質基礎工学会の一員として有明海中の人工島³⁾の沈下の問題に関係したが、以下に述べることは当時の報告を再検討して取りまとめたものである。

2. 単一層圧密の厳密解と近似解の比較

単一層圧密の厳密解は次の基本方程式を、初期及び境界条件を満足するよう解いて得られる。

図-1 矩形荷重面、単一層の $\log T-U$



* 徳島大学講師，工学部土木工学教室