

鋼ラーメン隅角部の応力度分布

正員 大野 諫*

STRESS DISTRIBUTION OF CORNER OF STEEL RIGID FRAME

(JSCE Feb. 1954)

Isamu Ohno, C.E. Member

Synopsis This paper deals with the stress distribution on the diagonal section of the curved corner of steel rigid frame with rectangular cross section basing on the author's formulas for radial, tangential and shearing stresses of curved beam.

I. 緒言

著者はこれまでに曲梁に対する切線方向応力度、半径方向応力度及び剪断応力度に対する新公式を提案したが、いまその用法を示すために、鋼ラーメン隅角部が曲梁をなす場合、その隅角部の対称線断面における応力度分布を求めてみよう。著者の公式は左右対称な任意断面形の曲梁に対して適用できるものであるが、まず最初に公式応用の理解を容易ならしめるため断面矩形の曲梁について計算を示したい。この場合は2次元弾性論の精密値との比較もでき、それによつて提案の公式の信頼度もわかるであろう。そのうち切線方向応力度分布に対する双曲線公式(著者の公式と実質において相等しい)と弾性理論式との比較は弾性論の著書にも出ているが¹⁾、半径方向応力度に対する場合の比較はこれまでほとんど見ないから、これらの比較も有意義のことと思う。

II. 研究題と計算の目的

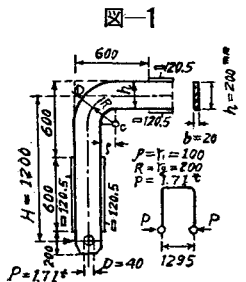


Bild 1 Probekörper mit Rechteckquerschnitt.

合である。

ラーメン隅角部の応力度分布は実験からもわかるように、桁または柱の直線部材と隅角部の曲梁の接続部近傍は応力度分布に乱れを生ずるが、それは局部的影響であつて少なくとも対角線断面では、曲梁に対する応

力度公式が適用し得られるものである。

さて応力度計算に先だちその目的を述べておこう。

1) Kayser はまず切線応力度 σ の計算には Winkler の公式

$$\sigma = \frac{My}{Fe(r_0 - y)}, \quad (r_0 \text{ は } \int \frac{y dF}{r_0 - y} = 0 \text{ よりきめる})$$

及び2次元弾性論における Airy 函数による式を用いて計算し、それらと彼の実験値とを比較している。しかし弾性論による場合、断面におけるモーメントだけに対する解を用い、断面における垂直力及び剪断力の影響は述べていない。故にここでは Airy 函数から出した解による計算においても、曲梁の一端にモーメント及び集中力がはたらいた2つの場合の和として、対角線断面におけるモーメント、垂直力、及び剪断力の影響を省略しない精密値を出し、それを著者の公式による計算結果と比較することにする。

2) Kayser は半径方向の応力度分布に対してはモーメントを受ける場合の Airy 函数より出した解による計算値だけを示している。しかしここでは垂直力及び剪断力の影響をも含む著者の σ_r の公式とともに Airy 函数による解においてもモーメント及び集中力が曲梁の一端に作用した場合の2つの作用の和として求め、両者の結果を比較することにする。

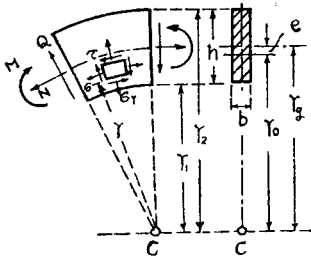
3) Kayser の論文では剪断応力度 τ に対する計算式は掲げていないが計算値として示せる剪断応力度 τ の分布曲線が梁の中央で最大になり、かつ上下対称になっている(Kayer: Bild 9)のを見ると多分直梁に対する剪断応力度公式により算出したものと思われる。何となれば曲梁に対する剪断応力度公式による $\max \tau$ は梁の中央に生ぜず内側に偏して生ずるからである。しかしてこれは実験の結果からもそうなっている。ここでは著者の剪断応力度公式とともに Airy 函数による解から τ の値を求めて両者を比較することにする。

III. 計算に用いる公式

1) 著者の公式(図-2)

* 東京都立大学教授, 徳島大学名誉教授

図-2



a) 切線方向応力度 $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{My}{J}$
 内縁応力度 $\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{My_1}{J_1} \dots (1)$
 外縁応力度 $\sigma_2 = \frac{N}{F} + \frac{My_2}{J_2} \dots (2)$

ここに

$J = reF, J_1 = r_1eF, J_2 = r_2eF \dots (3)$

$e = r_2 - r_1, r_0 = \frac{h}{\ln r_2 - \ln r_1} = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \dots (4)$

b) 半径方向応力度

$\sigma_r = \sigma_{r,1} + \sigma_{r,2} + \sigma_{r,3} = \frac{M}{Fe} \frac{r_0(\ln r - \ln r_1) - (r - r_1)}{r}$
 $+ \frac{N}{F} \frac{r - r_1}{r} - \frac{Nr_0}{Fe} \left\{ \frac{r_0(\ln r - \ln r_1)}{r} - \frac{(r - r_1)(r + r_2)}{2r^2} \right\} \dots (5)$

c) 剪断応力度 $\tau = \frac{QS'}{bJ_0} = \frac{Qr_0}{Fe} \frac{(r - r_1)(r_2 - r)}{2r^2} \dots (6)$

2) 著者の公式の形に書きかえられた従来の重心軸に関する公式 従来、曲梁の応力度に対し σ, σ_r, τ の3つの公式をそろえて掲げている書が見当たらないようであるから、いまここにその3つをそろえてかつ著者の公式の形に整えたものを示そう。一般に円に関する問題は半径 r の関数として処理すると簡潔になるもので、曲梁の公式においてもやはり次のごとく r の関数としての常数 L 及び \bar{L} を導入すれば計算が便利になる⁶⁾。すなわち

a) 切線方向応力度⁷⁾

$\sigma = \frac{N'}{F} + \frac{Mv}{J'}; N' = N - \frac{M}{r_0}$

$J' = r \int_{r_1}^{r_2} v^2 \frac{dF}{r} = rr_0(r_0L - F)$

$L = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dF}{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{bdr}{r} \dots (7)$

内縁応力度 $\sigma_1 = \frac{N'}{F} + \frac{Mv_1}{J'_1}; J'_1 = r_1r_0(r_0L - F)$

v_1 は重心からの内縁距離 $\dots (8)$

外縁応力度 $\sigma_2 = \frac{N'}{F} + \frac{Mv_2}{J'_2}; J'_2 = r_2r_0(r_0L - F)$

v_2 は重心からの外縁距離 $\dots (9)$

v は断面の重心軸より考える点に到る距離であつて、 N' 及び J' は前には N 及び J と書いてきたものである。

b) 半径方向応力度⁸⁾

$\sigma_r = \frac{M}{b(r_0L - F)} \frac{\bar{L} - L}{r} \frac{\bar{F}}{F} + \frac{N}{bF} \frac{\bar{F}}{r}$
 $- \frac{N}{b(r_0L - F)} \frac{1}{r} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r_0 - \bar{r}}{r^2} \bar{F} dr \dots (10)$

ここに $L = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dF}{r}, \bar{L} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dF}{r}$

$\bar{F} = \int_{r_1}^{r_2} dF = \int_{r_1}^{r_2} bdr \dots (11)$

c) 剪断応力度⁹⁾

$\tau = \frac{QS'}{bJ'_0} = \frac{Q}{b(r_0L - F)} \frac{(r_0 - \bar{r})\bar{F}}{r^2} \dots (12)$

ここに $J'_0 = r_0 \int_{r_1}^{r_2} v^2 \frac{dF}{r} = r_0^2(r_0L - F) \dots (13)$

$S' = \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \bar{F}(r_0 - \bar{r}) \dots (14)$

3) 2次元弾性論における平面曲線の応力度公式¹⁰⁾

(公式記号は Timoshenko : Theory of elasticity による)。(図-3)

図-3

a) モーメント M がはたら

く場合 (図-4)

盤の厚さは1にとろう。

$\sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} \right)$

$= -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} - b^2 \log \frac{b}{r} - a^2 \log \frac{r}{a} \right) \dots (15)$

$\sigma_\theta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right)$

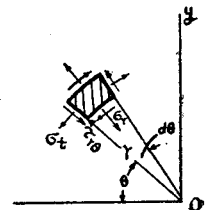
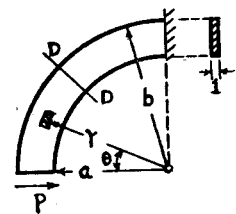
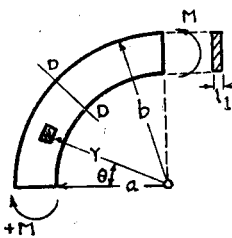


図-4

図-5



$$= -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} - b^2 \log \frac{b}{r} - a^2 \log \frac{r}{a} + b^2 - a^2 \right) \dots (16)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \dots \dots \dots (17)$$

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\log \frac{b}{a} \right)^2 \dots \dots \dots (18)$$

b) 集中力 P がはたらく場合 (図-5)

盤の厚さは1にとろう。

$$\sigma_r = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta \dots \dots \dots (19)$$

$$\sigma_\theta = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta \dots \dots \dots (20)$$

$$\tau_{r\theta} = - \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \cos \theta \dots \dots \dots (21)$$

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a} \dots \dots \dots (22)$$

故に $A = \frac{P}{2N}$, $B = -\frac{Pa^2 b^2}{2N}$, $D = -\frac{P}{N}(a^2 + b^2)$,

$$\sigma_r = \frac{P}{N} \sin \theta \left(r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \dots \dots (23)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{N} \sin \theta \left(3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \dots (24)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{N} \cos \theta \left(r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \dots (25)$$

$\theta = 45^\circ$ の場合 $\sin \theta = \cos \theta = 0.707$

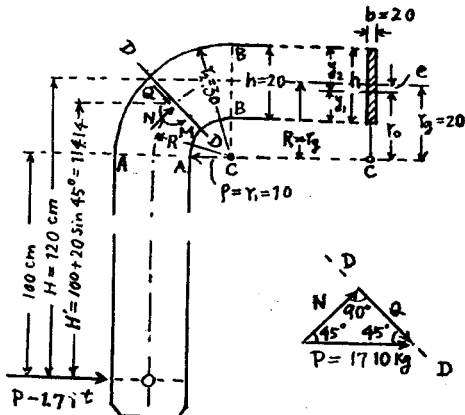
σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ は 図-3 に示す向を正とする。

IV 著者の公式による計算 (図-6)

図-6 に示すラーメン隅角部の対角線断面 D-D における応力度分布の研究

1) 切線方向応力度 σ 内縁半径 $\rho = r_1 = 10$ cm, 重心軸半径と梁高との比 $R/h = r_0/h = 20/20 = 1$

図-6



横断面 D-D におけるモーメント M , 垂直力 N , 及び剪断力 Q は

$$M = -1710 \times 114.14 = -195180 \text{ kg-cm}$$

$$N = -1710 \times \sin 45^\circ = -1710 \times 0.707 = -1210 \text{ kg}$$

$$Q = -1710 \times \cos 45^\circ = -1710 \times 0.707 = -1210 \text{ kg}$$

横断面積 F 及び中立軸の曲率半径 r_0 は

$$F = bh = 2 \times 20 = 40 \text{ cm}^2$$

$$r_0 = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{20}{\ln \frac{30}{10}} = \frac{20}{\ln 3} = \frac{20}{1.09861} = 18.205 \text{ cm}$$

故に中立軸の重心軸に対する偏心距 e 及び中立軸より内縁及び外縁に到る距離 y_1 及び y_2 は

$$e = r_0 - r_1 = 20 - 18.205 = 1.795 \text{ cm}, \quad y_1 = r_0 - r_1 = 1.795 \text{ cm}$$

$$y_2 = r_0 - r_2 = 18.205 - 30 = -11.795 \text{ cm}$$

また内縁及び外縁に対応する常数 J_1 及び J_2 は

$$J_1 = r_1 e F = 10 \times 1.795 \times 40 = 718 \text{ cm}^4,$$

$$J_2 = r_2 e F = 30 \times 1.795 \times 40 = 2154 \text{ cm}^4$$

故に内縁及び外縁における切線方向応力度 σ_1 及び σ_2 は式 (1) 及び (2) より

$$\sigma_1 = -\frac{1210}{40} - \frac{195180 \times 8.205}{718} = -30 - 2230 = -2260 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = -\frac{1210}{40} - \frac{195180 \times (-11.795)}{2154} = -30 + 1070 = +1040 \text{ kg/cm}^2$$

(参考のため直梁に対する公式により計算して見ると断面係数 $W = bh^2/6 = 133.3 \text{ cm}^3$ なるから

$$\sigma_1 \text{ または } \sigma_2 = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = -\frac{1210}{40} \mp \frac{195180}{133.3} = -30 \mp 1464 = -1490 \text{ または } +1430 \text{ kg/cm}^2 \text{ となる。}$$

Kayser の論文 Bild 5, または Bild 15 によれば実験値 (以下 Kayser の実験値を単に実験値と呼ぶことにし Bild Nr は同論文の図番号を表わすものとする) は $\sigma_1 = -2300 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_2 = +1040 \text{ kg/cm}^2$ と上の計算値と充分一致している。

次に切線方向応力度 σ の零の位置を求めると

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{My}{J} = -\frac{1210}{40} - \frac{195180(18.205 - r)}{r(1.795 \times 40)} = -30 - 2718.40 \left(\frac{18.205}{r} - 1 \right) \dots \dots (26)$$

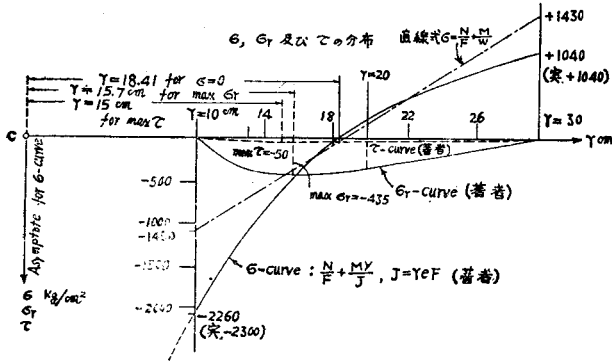
故に $\sigma = 0$ と置いて r を求めれば $r = 18.41 \text{ cm}$ となりこれも実験値と充分一致する (Bild 5)。

また切線応力度 σ の分布曲線を求めると, 式 (26) より r の各値に対し次の値を得る。

表-1 Tangential Stress σ

$r = 10$	14	18	18.41	20	22	26	30 cm
$\sigma = -2260$	-846	-61	0	+214	+439	+785	+1040 kg/cm ²
(実験値)							(+1040)
$= -(2300)$							

図-7



これを図示すれば 図-7 のごとくなる。σ 曲線の基線に垂直に曲率中心、C を通る直線は σ 曲線の漸近線となる。

2) 半径方向の応力度 σ_r 矩形断面に対し σ_r の第1項, すなわちモーメントによつて生ずる項は, (5) 式より

$$\sigma_{r,1} = \frac{M r_0 (\ln r - \ln r_1) - (r - r_1)}{Fe} = -\frac{195180}{40 \times 1.795} \frac{18205(\ln r - \ln 10) - (r - 10)}{r}$$

$$= -2718.37 \frac{18.205 \ln \frac{r}{10} - (r - 10)}{r} \dots (27)$$

式 (27) より半径 r の各項に対し $\sigma_{r,1}$ を求めると次のごとくなる。

表-2 Radial Stress $\sigma_{r,1}$

$r=10$	14	15.70	18	20	22	26	30 cm
$\sigma_{r,1}=0$	-413	-435	-408	-356	-290	-146	0 kg/cm ²

max. $\sigma_{r,1}$ の位置 ($\sigma_{r,2}$ 及び $\sigma_{r,3}$ の値は以下に示すごとくきわめて小であるから実地上これは max. σ_r の位置を与える) を求めると

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{18.205}{r} \ln \frac{r}{10} - 1 + \frac{10}{r} \right\} = 0 \text{ より}$$

$\ln r = 2.75335$, $r = 15.70$ cm を得る。以上の計算値を図示すると 図-8 において実線のごとき $\sigma_{r,1}$ 曲線が得られる。

次に垂直力及び剪断力に対する項 $\sigma_{r,2}$, $\sigma_{r,3}$ を求めれば次のごとくなる。

式 (5) より

$$\sigma_{r,2} = \frac{N}{F} \frac{r - r_1}{r} = \frac{1210}{40} \frac{r - 10}{r}$$

$$= -30.25 \left(\frac{r - 10}{r} \right) \dots (28)$$

$$\sigma_{r,3} = -\frac{Nr_0}{Fe} \left\{ \frac{r_0 (\ln r - \ln r_1)}{r} - \frac{(r - r_1)(r + r_2)}{2r^2} \right\}$$

$$= +\frac{1210 \times 18.205}{40 \times 1.795} \left\{ \frac{20(\ln r - \ln 10)}{r} - \frac{(r - 10)(r + 30)}{2r^2} \right\}$$

$$= +306.80 \left\{ \frac{20}{r} \ln \frac{r}{10} - \frac{(r - 10)(r + 30)}{2r^2} \right\} \dots (29)$$

式 (28) 及び (29) より半径 r の各値に対し $\sigma_{r,2}$, $\sigma_{r,3}$ を求めれば次のごとくなる。 $\sigma_{r,2} + \sigma_{r,3}$ と $\sigma_{r,1}$ との和をとれば σ_r が求まる。

図-8 $\sigma_{r,1}$ の分布

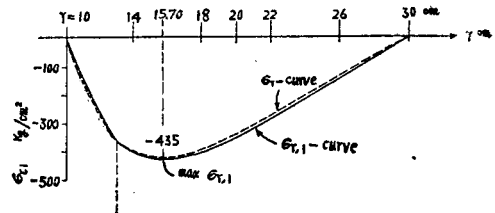


図-9 $\sigma_{r,2}$ 及び $\sigma_{r,3}$ の分布

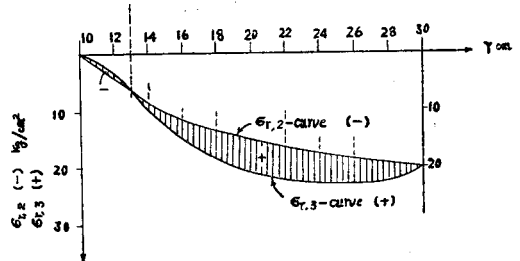


図-9 は $\sigma_{r,2}$ 及び $\sigma_{r,3}$ 曲線及び $\sigma_{r,2} + \sigma_{r,3}$ 面(影を付けて示す)を表わす。図-8 における点線は $\sigma_{r,1}$ に補正 $\sigma_{r,2} + \sigma_{r,3}$ を施して得た σ_r 曲線を示す。これ

表-3 Radial Stress $\sigma_{r,2}$ and $\sigma_{r,3}$

$r=10$	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$\sigma_{r,2}=0$	-5.0	-8.6	-11.3	-13.4	-15.1	-16.5	-17.6	-18.6	-19.4	-20
$\sigma_{r,3}=0$	+3.7	+9.8	+14.9	+18.6	+20.9	+22.1	+22.48	+22.5	+22.3	+20
$\sigma_{r,2} + \sigma_{r,3}=0$	-1.3	+1.2	+3.6	+5.2	+5.8	+4.6	+4.9	+3.9	+2.9	0
表-2 より $\sigma_{r,1}=0$		-413		-408	-356	-290		-146		0
$\sigma_r = \sigma_{r,1} + \sigma_{r,2} + \sigma_{r,3}=0$		-412		-403	-350	-286		-142		0

らの図からわかるように σ_r に対し垂直力及び剪断力の及ぼす影響はきわめて小であつて、実地上、 σ_r の値として $\sigma_{r,1}$ をとれば充分満足なことがわかる。このことは断面が I 形の場合も同様なることが認めらる。

σ_r の max. は梁の高さの中央でなく内縁の方に偏して生ずる。実験値 (Bild 5) はその数値が原文に記入してないので表-3 にそれを併記することはできないが図の尺度からみるとかなりよく一致していることは認めらる。

図-7 において上の計算による σ_r 曲線を示してあるがそれによつて切線方向応力度 σ に比べその値のなほは小なることが明らかにわかる (しかしこのことは断面が I 形の場合には必ずしもそうでない)。

3) 剪断応力度 τ

式 (6) より

$$\tau = \frac{QS}{bJ_0} = \frac{Qr_0}{Fe} \frac{(r-r_1)(r_2-r)}{2r^2}$$

$$= -\frac{1210 \times 18.205}{40 \times 1.795} \frac{(r-10)(30-r)}{2r^2}$$

$$= -306.80 \frac{(r-10)(30-r)}{2r^2} \dots \dots \dots (30)$$

式 (30) より r の各値に対し剪断応力度 τ を求めれば次のごとくなる。

表-4 Shearing Stress τ

$r=10$	12	14	18	20	22	26	30 cm
$\tau=0$	-38	-50	-45	-38	-30	-14	0 kg/cm ²

max. τ の位置を求めれば

$$\frac{d}{dr} \frac{(r-10)(30-r)}{r^2} = 0 \text{ より } r = 15 \text{ cm}$$

を得る。従つて

$$\text{max. } \tau = -306.80 \frac{(15-10)(30-15)}{2 \times 15^2}$$

$$= 50.7 \approx 50 \text{ kg/cm}^2$$

ここに剪断応力度の符号は著者の公式では図-2 に示す向を正としている。

参考のため直梁に対する剪断応力度公式

$$\tau = \frac{QS}{bI} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{1210}{40}$$

$$\left[1 - \left(\frac{2y}{20} \right)^2 \right] = 45.377 \left[1 - \frac{y^2}{100} \right] \dots \dots (31)$$

により計算すれば次に示すごとくなり、最大値は梁の中央に生じその値は $\text{max. } \tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} = 45.377 \approx 45 \text{ kg/cm}^2$ となる。

表-5 Shearing Stress τ for Straight Beam

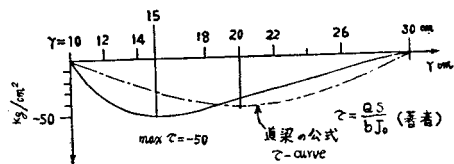
$y=10$	4	2	0 cm
$\tau=0$	38	44	45 kg/cm ²

これに反し曲梁の場合 $\text{max. } \tau$ は内縁にかたよつて生じ、その値も直梁の場合の $\text{max. } \tau$ に対し 11% だけ大きくなる。

図-10 の実線は曲梁公式による τ の分布曲線、鎖線は直梁の公式による値を示す。

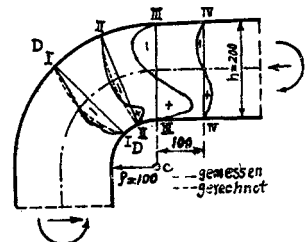
実験結果図-11 (Bild 9) を見ると計算値として点線で示す τ の曲線が重心軸上で $\text{max. } \tau$ を与え、それから内外に対称になつてゐるから、直梁の公式によつたものと思われる。また Kayser は弾性論により切線方向応力度 σ_θ と半径方向応力度 σ_r は計算結果を示しているが、モーメントのみ考へては $\tau_{r\theta} = 0$ となり、 τ は出てこない。故に著者は後で示すごとくモーメントと集中力の作用の和として対角線断面における剪断応力度 τ を出し著者の公式による表-5 の値と比較することにする。なお図-11 (Bild 9) を見ると直梁と曲梁との接続により剪断応力度分布も相当乱れを生じているが、これについては今後の研究に残すものとする¹¹⁾。

図-10 τ の分布



剪断応力度 τ について 図-11 各断面の剪断応力度

については実験値 (Bild 9) の数値が記入してないので数値を表-5 に併記して比べることができないが、尺度からよむと分布の傾向は大體合つてゐる。しかし実験によると τ は D-D 断面まで小々乱れを生じてゐることを知る。



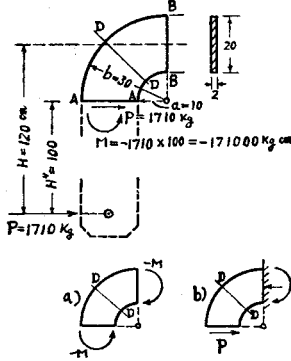
(Bild 9)

図-7 において点線にて示す τ 曲線を見れば切線応力度 σ 、半径方向応力度 σ_r 及び剪断応力度 τ の大きい order の比較が一目でわかる。すなわち剪断応力度はきわめて小で実地上省略しうる程度のものであることがわかる。

V. 2 次元弾性論による計算 (図-12)

ラーメン隅角部の対角線断面 D-D の応力度分布を 図-12 a) 及び b) に示すごとくモーメント M と集中力 P による応力度の和として計算する。しからば横断面 D-D に対しモーメント、垂直力及び剪断力に

図-12



よる影響が省略され
ることなしに算出さ
れる。

1) モーメント

$$M = -1710 \times 100 = -171000 \text{ kg-cm}$$

よる応力度 前掲
Airy 函数による解
式 (15) ないし (25)
は単位厚さに対する
ものであるから公式
中の M としては、

梁の厚さ $b=2 \text{ cm}$ であるから、 $M = -171000 \div 2 = -85500 \text{ kg-cm}$ をとる。

まず半径方向応力度 σ_r は (18) 式より常数 N は

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2(\log b/a)^2 = (30^2 - 10^2)^2 - 4 \times 10^2 \times 30^2 (\log 30/10)^2 = 205500$$

$$\log b/a = \log 30/10 = \log 3 = 1.09861 \dots (32)$$

故に (15) 式より

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} - b^2 \log \frac{b}{r} - a^2 \log \frac{r}{a} \right) \\ &= +\frac{4 \times 85500}{205500} \left(\frac{100 \times 900}{r^2} \times 1.09861 - 900 \log \frac{30}{r} - 100 \log \frac{r}{10} \right) = 1.6642 \left(\frac{98874.90}{r^2} - 900 \log \frac{30}{r} - 100 \log \frac{r}{10} \right) \dots (33) \end{aligned}$$

また、切線方向応力度 σ_θ は (16) 式及び (32) 式より

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} - b^2 \log \frac{b}{r} - a^2 \log \frac{r}{a} + b^2 - a^2 \right) = +1.6642 \left(-\frac{98874.90}{r^2} - 900 \log \frac{30}{r} - 100 \log \frac{r}{10} + 800 \right) \dots (34) \end{aligned}$$

剪断応力度 $\tau_{r\theta}$ は単純モーメント (Pure moment) の場合

$$\tau_{r\theta} = 0 \dots (35)$$

上式 (33) 及び (34) より r の各値に対し σ_r 及び σ_θ を求めれば次のごとくなる (M に対する値なることを示すため $\sigma_{r,M}$, $\sigma_{\theta,M}$ として表わす)。

表-6 Stress σ_r and σ_θ due to M

$r=10$	14	18	20	22	26	30 cm
$\sigma_{r,M}=0$	-358	-355	-311	-256	-130	0 kg/cm ²
$\sigma_{\theta,M}=-1959$	-706	-39	+197	+396	+715	+966 "

2) 集中荷重 $P=1710 \text{ kg}$ による応力度 梁の厚

位厚さに対し $P=1710 \div 2=855 \text{ kg}$

式 (22) よりこの場合の常数 N の値は

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log b/a = 10^2 - 30^2 + (10^2 + 30^2) \log 30/10 = 298.61$$

故に式 (23) 及び (24) より σ_r 及び σ_θ は次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{N} \sin 45^\circ \left(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \\ &= \frac{855}{298.61} \cdot 0.707 \left(r + \frac{10^2 \times 30^2}{r^3} - \frac{10^2 + 30^2}{r} \right) \\ &= 2.0243 \left(r + \frac{90000}{r^3} - \frac{1000}{r} \right) \dots (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{P}{N} \sin 45^\circ \left(3r - \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \\ &= 2.0243 \left(3r - \frac{90000}{r^3} - \frac{1000}{r} \right) \dots (37) \end{aligned}$$

また式 (25) より $\tau_{r\theta}$ は

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{N} \cos \theta \left(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \\ &= -\frac{855}{298.61} \cdot 0.707 \left(r + \frac{90000}{r^3} - \frac{1000}{r} \right) \\ &= -2.0243 \left(r + \frac{90000}{r^3} - \frac{1000}{r} \right) \dots (38) \end{aligned}$$

上式 (36), (37) 及び (38) より r の各値に対し σ_r , σ_θ 及び $\tau_{r\theta}$ を求めれば次のごとくなる。力 P に対する値なることを示すため $\sigma_{r,P}$, $\sigma_{\theta,P}$, $\tau_{r\theta,P}$ として表わす。

表-7 Stress σ_r , σ_θ and $\tau_{r\theta}$ due to P

$r=10$	14	18	20	22	26	30 cm
$\sigma_{r,P}=0$	-50	-45	-38	-30	-15	0 kg/cm ²
$\sigma_{\theta,P}=-324$	-126	-34	-3	+24	+70	+108 "
$\tau_{r\theta,P}=0$	50	45	38	30	15	0 "

$\tau_{r\theta}$ の符号であるが著者の式の規約では負になるところである。

3) モーメント M 及び集中荷重 P による応力度の和としての対角線断面 D-D における応力度 表-6 及び 表-7 より次の値を得る。比較のため著者の公式による値を併記する。表-6, $\sigma_{r,M}$ と表-7, $\sigma_{r,P}$ の和として弾性論による σ_r が求まり、表-6, $\sigma_{\theta,M}$ と表-7, $\sigma_{\theta,P}$ の和として弾性論による σ_θ が求まる。 $\tau_{r\theta,M}=0$ であるから $\tau_{r\theta,P}$ がそのまま弾性論による $\tau_{r\theta}$ を与える。

表-8 からわかるように Airy 函数による解と著者の公式による各応力値はよく一致することを認める。

2次元弾性論による計算の場合 D-D 断面のモーメントを用いてモーメントに対する解のみでせつかく精密計算しても τ の値が出せないのよくない。

表-8 Stress σ_r , σ_θ and $\tau_{r\theta}$

	$r =$	10	14	18	20	22	26	30 cm
弾性論,	$\sigma_r =$	0	-408	-400	-349	-286	-145	0 kg/cm ²
著者, 表-3,	$\sigma_r =$	0	-412	-403	-350	-286	-142	0 "
" 表-2,	$\sigma_{r,1} =$	0	-413	-408	-356	-290	-146	0 "
弾性論,	$\sigma_\theta = -2283$ (計算-2245) Kayser		-832	-73	+194	+420	+785	+1074 " (計算+1060)
著者, 表-1,	$\sigma = -2260$ (実験-2300)		-846	-61	+214	+439	+785	+1040 " (実験+1040)
弾性論,	$\tau_{r\theta} =$	0	50	45	38	30	15	0 "
著者, 表-4,	$\tau =$	0	-50	-45	-38	-30	-14	0 "

VI. 著者の公式の形に書きかえられた従来の重心軸に関して立てられた公式による計算

従来の公式を r の函数としての常数 L を導入した式に書きかえたが計算も容易なることをこの例について示そう。

まず式 (8) 及び (9) により内縁及び外縁の応力度 σ_1, σ_2 は

$$F = 2 \times 20 = 40 \text{ cm}^2, \quad L = b \ln r_2/r_1 = 2 \ln 30/10 = 2 \times 1.09861 = 2.19722,$$

$$\text{故に } J'_1 = r_1 r_0 (r_0 L - F) = 10 \times 20 (20 \times 2.19722 - 40) = 10 \times 78.888 = 788.9 \text{ cm}^4$$

$$J'_2 = r_2 r_0 (r_0 L - F) = 30 \times 20 (20 \times 2.19722 - 40) = 30 \times 78.888 = 2366.6 \text{ cm}^4$$

$$N' = N - M/r_0 = -1210 + 195180/20 = 8549 \text{ kg}$$

$$M = -195180 \text{ kg-cm}, \quad v_1 = 10 \text{ cm}, \quad v_2 = -10 \text{ cm}$$

$$\text{故に } \sigma_1 = \frac{N'}{F} + \frac{Mv_1}{J'_1} = \frac{8549}{40} - \frac{195180 \times 10}{788.9} = +213.7 - 2474.0 = -2260 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{N'}{F} + \frac{Mv_2}{J'_2} = \frac{8549}{40} + \frac{195180 \times 10}{2366.6} = +213.7 + 824.3 = +1040 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{一般に } \sigma = \frac{N'}{F} + \frac{Mv}{J'} = \frac{N'}{F} + \frac{M(r_0 - r)}{r r_0 (r_0 L - F)} = \frac{8549}{40} - \frac{195180(20-r)}{78.888 r} = 213.7 - 247.4 \frac{20-r}{r} \dots\dots\dots (39)$$

式 (39) により r の各値に対し σ の値が求まり前の著者の中立軸についてたてた公式による値と等しくなる。

半径応力度公式 (10) 及び剪断応力度公式 (12) は r_0 の代りに $r_0 = F/L$ を入れたものであるから公式 (5) 及び (6) と全く同様の計算になるからこれ以上述べない。

VII. むすび

以上、著者の曲梁に対する応力度公式の用法を示すとともに 2次元弾性論による精密解並びに実験値とも

比較し¹²⁾、提案の公式が実地上充分満足であることを認める。

矩形断面の曲梁において、1) 剪断応力度 τ はきわめて小さい。2) 半径方向応力度 σ_r は甚小であるが τ に比べ一桁大である。3) 著者の半径方向応力度公式において第2, 第3項までとれば精密値にきわめてよく一致するが第1項に比べそれらは微細な値であつて、半径方向応力度公式として実際には第1項のみとればよい。4) 半径方向応力度及び剪断応力度は内縁にかたよつて最大値を生ずる。5) 著者の公式及びこれにならつて書きかえた従来の公式の特長は式の形が簡潔で親しみやすくかつ積分計算の容易な半径 r の函数としての常数 $L = \int \frac{dF}{r}$ をもととし、すべてが計算できるにある。

半径方向応力度は I 形断面に対し突縁部の撓曲を誘起し重要であるが、これらの研究は次回にのべる。

参考文献

- 1) 例えば Timoshenko: Theory of Elasticity, 1934, p.61 and p. 119 または倉西正嗣: 弾性学 (昭和 23 年版) p. 223 及び p. 224
- 2) Dr.-Ing. Kayser: Versuche zur Klärung des Spannungsverlaufes in Rahmenecken, Stahlbau, 12 Jahrgang, Heft 2, 1939 Dissertation T.H. Darmstadt, 1938
- 3) 曲梁と直梁との接続部近傍の Local effect の理由については著者: "ラメン隅角部の応力" と題して講演したことがある (昭和 27 年第2 回応用力学連合講演会において)
- 4) $\ln r_2 - \ln r_1$ 及び $\ln \frac{r_2}{r_1}$ は実際計算においては場合に依りいずれか計算のたやすい方で行う。
- 5) 著者: 曲梁の剪断応力度及び半径方向の垂直応力度に対する新公式, 土木学会誌 37 巻 7 号, 著者: 曲梁の半径方向の垂直応力度 (昭和 28 年 9 月第3 回応用力学連合講演会にて講演)
- 6) 同上及び著者: 曲梁の垂直応力度並に弾性重量の公式について, 土木学会誌, 第 27 巻第 8 号, ただし該論文における式 (6) の N' 及び Z は N' 及び J' に改めることにした。

- 7) これは Bach の式 $\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\kappa fr} \frac{\eta}{r+\eta}$;
 $\kappa = -\frac{1}{5} \int \frac{\eta}{r+\eta} df$ または Müller-Breslau の
 式 $\sigma = \frac{\mathfrak{R}}{F} + \frac{Mv}{Z} \frac{r}{r-v}$; $\mathfrak{R} = N - \frac{M}{r}$,
 $Z = \int v^2 \frac{r}{r-v} dF$ に相当する。
 8) 従来公式には完全に表わしたものが無いよう
 で、この式の第1項が Grünning の式
 $\sigma_r = \frac{1}{b(r-y)} \frac{M}{Z} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[\int_{y_0}^{h_0} y_0 b dy + \frac{1}{r_0} \int_{y_0}^{h_0} y_0^2 b dy \right]$
 または Seely-Smith の式
 $\sigma_r = \frac{Ma'}{R+a(R+y)} \left(1 - \frac{Z'}{Z} \right)$, $Z' = -\frac{1}{a'} \int_{-c}^y y da$,

$$Z = -\frac{1}{a} \int \frac{y da}{R+y}$$

- 9) 例えば Kappus の式 $\tau = \frac{Q}{\kappa F} \frac{S(y)}{b(y)(r-y)^2}$,
 (κ は Bach の σ の公式中の常数) に相当する (Kappus: Der Stahlbau, 21 Jahrgang, Heft 7, 1952)
 10) Timoshenko: Theory of Elasticity, 1934, p.52, Fig.37; p.60, Eq. (44); p.71, Eq. (55) and p.71, Eq. (g)
 11) この問題については一部を著者: 講演 (前掲3)
 12) ここでは一つの例, $r_2/r_1 = 3$ の場合についてのべたことになるが、一般に実用的に満足であると思われる。 σ_t の比較については前掲1)参照。
 (昭.28.8.15)

携帯用反射式光弾性装置による応力測定

正員 丹 羽 義 次*

MEASUREMENT OF STRESS WITH A PORTABLE PHOTO-ELASTIC APPARATUS OF REFLECTION TYPE

(JSCE Feb. 1954)

Yoshiji Niwa, C.E. Member

Synopsis In order to determine the stresses of concrete structures, for instance, dams and tunnels, the author investigated a method of photo-elasticity, and made the portable photo-elastic apparatus of reflection type. The explanation of this apparatus and some fundamental experimental results are described in this paper.

要旨 コンクリート構造物、例えばダム及びトンネル覆工等の応力を測定するために、著者は光弾性学的測定法について研究を行い、携帯用の反射式光弾性装置を試作した。本文はこの装置の概略を説明し、二、三の基礎的な実験結果を掲げたものである。

1. 緒言

コンクリート構造物を合理的に設計するためには、これに作用する応力を正確に把握しなければならない。従来多数の研究者によつて合理的な安全度を有する経済的構造物に対する応力の計算法が提案せられ、さらに実際の境界条件に最もよく適合するように次第に計算法が改善せられ、構造工学の発展に多大の貢献がなされてきた。しかしながら複雑な実際条件のすべてを計算過程に導入し、完全な解析を行うことはほとんど不可能な場合が多い。それゆえ実際構造物の応力を実測してこれを系統的に解析し、環境条件の及ぼす

影響を究明し、今後の設計に資することははなはだ意義のあることである。近年応力の測定に抵抗線歪計が広く利用せられ、設計応力と実際応力との比較検証が行われている。この歪計は温度、湿度の影響をいちじるしくうけるため長年月にわたる測定には適していない。この点に鑑みコンクリート構造物、例えばダム、トンネル覆工等の応力測定を目的として、著者は光弾性学的測定法について研究を行った。この方法を簡単に説明すれば、構造物の所要の位置に円孔を有するガラス試験片を埋設し、載荷後これに偏光を投射し、ガラス片の裏面で反射して再び表面に射出する反射偏光の状態から円孔の周辺の応力を求め、これより実際にコンクリートに作用している応力を解析しようとするものである。この場合設計によつてえられた各点の応力の大きさを参照して、光弾性学的応力解析に適切なガラス試験片の厚さと、構造物の大きさに適した適当な大きさを定める必要がある。

このようにすれば、あらかじめ理論または実験によ

* 京都大学助教授、工学研究所