

いかと思われる。床版と桁が協力してはたらく場合、合成桁、鉄筋コンクリートT桁橋等には従来の beam もしくは T-beam 式の計算では板の性質が全く入らないからこの点異方性板理論によるべきではなからうか。最後に連続板の解法との比較を考えてみる。この方法のすぐれたことはすでに成岡助教授が撓角法による解法を用いて種々の例を示し¹⁾、床組計算に対して床版と桁の相関剛比の導入の必要を説いておられる。厳密には桁の撓みも考慮に入れた連続板の解によるべきであろうが、桁の数が相当に多くなると撓角法によつてもやはり計算は複雑になるのをまぬかれない。異方性板理論によると桁の数に関係なく（むしろ多い方がよいわけである）1枚の板として扱うのでこの点問題はなく、また D_x/D_y が相関剛比の役目をするわけである。

以上を総合すると板の性質、T-beam の性質、連続版の性質等従来別々に扱われたものが一つの解の中にすべて含まれすぐれた方法と考える。少々理想的に表現しすぎたきらいがあるかも知れないが注目すべきものとする次第である。

5. 結 言

鋼版桁道路橋、鉄筋コンクリートT桁橋等の設計では従来桁と床版を分けて計算するか合成桁式に T-beam として計算している。これに対し桁と床版を一体にして異方性板理論による方法は合理的であり実応力に近い値を得るのではないかと考える。著者は特に合成桁の設計にこれを適用すべきではないかと考え研究を行つているが、ただ桁間隔にはどの程度までこれ

が適用できるか、曲げ剛さのとり方等実験的研究にまたねばならぬ問題も多く、目下この方面の実験を計画中である。また鋼床版にはぜひとも異方性板理論を適用せねばならぬものであり、この研究がこれからの橋梁の合理的設計の一助ともなれば著者の幸いとするところである。最後に御指導賜わつた京大小西教授、成岡助教授に深謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) M.T. Huber : Bauing. 1923, 1925
- 2) 井口鹿象 : 土木学会誌 V. 26 N. 10 (昭 5)
- 3) Olsen, Reinitzhuber : Die zweiseitig gelagerte Platte 2 Band 1951
- 4) W. Cornelius : Stahlbau 1952 Heft 2,3,4
- 5) H. S. Gedizle : Publications Eleventh Volume International Association For Bridge and Structural Engineering, 1951
- 6) S. Timoshenko : Theory of Plates and Shells p. 167
- 7) 1), 3), 4) 等参照
- 8) 木材の実測値を使った大久保氏の例でも $H^2 < D_x D_y$ となっている。機械学会論文集 V. 16 N. 55
- 9) 田辺平学 : 土木学会誌 V. 12 N. 2~3 の値を使った
- 10) 著 者 : 土木学会誌 V. 36 N. 10 (昭 26)
- 11) 倉西正詞 : 弾性学 p. 619
- 12) 井口鹿象 : 土木学会誌 V. 18 N. 7 (昭 7)
- 13) 大村 裕 : 土木学会誌 V. 38 N. 6 (昭 28)
伊木・大村・著者 : 土木技術 V. 8 N. 6 (昭 28)
- 14) 成岡昌夫 : 土木学会誌 V. 38 N. 7 (昭 28)
(昭.28.8.13)

橋梁床版の荷重分布作用について

准 員 大 村 裕*

ON THE LOAD DISTRIBUTIONS BY SLAB OF BEAM BRIDGES

(JSCE Jan. 1954)

Hiroshi Omura, C.E. Assoc. Member

Synopsis The author studied on the load-distributions by slab of beam bridges, using the method of calculating grillage beams. In this case, the slab is assumed continuous cross beams along the bridge axis. Further, the author compared this calculated values with values by the theory of thin elastic plate.

要旨 橋床を微小巾の横桁が連続するものと考え、このような横桁を有する格子桁として計算する方法に

ついて述べ、その結果を薄い弾性板理論による既往の計算結果と比較したものである。

* 京都大学助手、工学部土木工学教室

1. 概 説

著者は従来橋梁の実験応力解析学的研究の一部として、二、三の鋼上路プレートガーダー道路橋の応力測定を行ってきたのであるが、この結果によると主桁の実測応力値は、スラブ止めを Shear connector と考え、鋼桁断面を鉄筋コンクリート床版と合成した合成桁断面と考えても、慣用計算法による計算値の約50%にすぎないし、またその実測応力値の計算応力値に対する比も一定しない。これは慣用計算法が実際の応力状態に即していないためであるが、そのおもな要素の一つとして鉄筋コンクリート床版の荷重分布作用が考えられる。

床版の荷重分布作用については、すでに N.M. Newmark が I 桁橋に対して版理論にもとづいて分配法により、また京都大学成岡助教授は上路橋の床組構造に対して撓角法により綿密な計算を行っている。しかしながらこれらの方法によつて、種々の相関剛比の場合について、また多くの荷重状態に対して一般的に解くことは容易ではない。もし床版を微小巾の桁の連続するものと考えて、桁理論によつて解くことができれば問題は簡単となる。このような計算についてはすでに Emil Müller の研究がある。これは撓みを未知量にとり、従つて方程式中に4次微分係数を含み、計算はなお容易ではない。また支点反力を直接未知量にとり、荷重及び撓みをフーリエ級数で表わす簡単な格子計算法が M. Hetényi によつて発表されているが、これは主桁の数が3本または4本の場合に限られている。著者はこれらの点に鑑み、M. Hetényi の方法を任意の桁数を有する一般の場合に拡張しこれを床版の荷重分布作用の計算に適用し得べきことを述べたいと思う。

2. 公式の誘導

図-1 及び図-2 において次の記号を用いる。

図-1

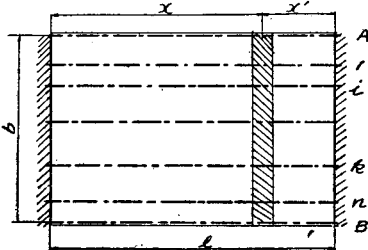
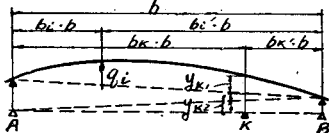


図-2



E_s : 主桁材料の弾性係数

E_c : 床版材料の弾性係数

I_s : 主桁の慣性モーメント

I_c : 単位巾の床版の慣性モーメント

l : 主桁スパン長

b : 外側主桁の間隔

また公式の誘導にあつて次の仮定を設ける。

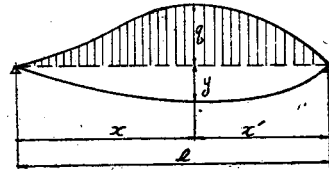
1. 各主桁の慣性モーメントは桁の全長を通じて一定とする。
2. 荷重は主桁上のみ作用する。

さて任意の荷重を受ける単純梁の撓み曲線は、

$$y = \sum_{m=1,2,3\dots} a_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

で表わされるが、この撓みが図-3の分布荷重 q によつて生ずるものとすれば、

図-3



$$q = \sum_{m=1,2,3} q_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

として表わされる。従つて $q = EId^4 y / dx^4$ より、次の関係を導き得る。

$$q = \frac{EI\pi^4}{l^4} \sum_{m=1,2,3\dots} a_m \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots (1)$$

$$y = \frac{l^4}{EI\pi^4} \sum_{m=1,2,3} \frac{1}{m^4} q_m \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots (2)$$

左支点より x の断面について考えよう。

図-2 において荷重を受けた床版が x 断面において分布反力 $q_1 \sim q_n$ を生じたものとする。 q_i による点 K の撓み y_{K1} は AB を支点沈下のない単純梁として次のように表わされる。

$$y_{K1} = - \frac{b^3}{E_c I_c} \times_{K1} \sum_{m=1,2,3\dots} q_{m1} \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots (3)$$

ただし

$$\times_{K1} = \begin{cases} \frac{b_K b_i'}{6} (1 - b_K^2 - b_i'^2) & b_K + b_i' \leq 1 \text{ のとき} \\ \frac{b_K' b_i}{6} (1 - b_K'^2 - b_i^2) & b_K + b_i \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

q_i による支点 A, B の反力は $q_i \cdot b_i', q_i \cdot b_i$ である。

従つて支点 A, B における q_i による撓みは、 $y = \frac{l^4}{\pi^4 EI}$

$$\times \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$y_{Ai} = -b_i' \cdot \frac{l^4}{\pi^4 E_S I_{SA}} \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mi} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$y_{Bi} = -b_i \cdot \frac{l^4}{\pi^4 E_S I_{SB}} \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mi} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

となる。故に q_i によつて生ずる点 A, B の支点沈下による点 K の撓みは、

$$y_{K2} = y_{Ai} \cdot b_{K'} + y_{Bi} \cdot b_K$$

$$= -\frac{l^4}{\pi^4 E_S} \left(\frac{b_i' b_{K'}}{I_{SA}} + \frac{b_i b_K}{I_{SB}} \right) \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mi} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

.....(4)

である。一方分布圧力 q_K であるときの主桁 K 点の撓みは、

$$y_{K'} = \frac{l^4}{\pi^4 E_S I_{SK}} \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mK} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \dots\dots(5)$$

$y_K = y_{K1} + y_{K2} = y_{K'}$ より点 K に関して次の方程式が成立する。

$$-\sum_{i=1}^n \frac{b^3}{E_c I_c} \chi_{Ki} \cdot \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mi} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$-\sum_{i=1}^n \frac{l^4}{\pi^4 E_S} \left(\frac{b_i' b_{K'}}{I_{SA}} + \frac{b_i b_K}{I_{SB}} \right) \cdot \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mi} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$= \frac{l^4}{\pi^4 E_S I_{SK}} \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mK} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \dots\dots(6_1)$$

荷重 P の作用する支点においては右辺に P による項が加わつて次のようになる。

$$-\sum_{i=1}^n \frac{b^3}{E_c I_c} \chi_{Ki} \cdot \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mi} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$-\sum_{i=1}^n \frac{l^4}{\pi^4 E_S I_{SK}} \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mK} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$= \frac{l^4}{\pi^4 E_S I_{SK}} \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} P_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \frac{l^4}{\pi^4 E_S I_{SK}}$$

$$\times \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mK} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \dots\dots(6_2)$$

また荷重 P が端主桁 A, B 上にある場合には、左辺に荷重 P による端主桁の撓みの影響を加えねばならない。たとえば A 主桁に荷重 P のある場合には、式 (6) は次のようになる。

$$b_{K'} \cdot \frac{l^4}{\pi^4 E_S I_{SA}} \cdot \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} P_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$-\sum_{i=1}^n \frac{b^3}{E_c I_c} \chi_{Ki} \cdot \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mi} \sin \frac{m\pi x}{l} *$$

$$q_{nb} = \frac{w_1 Y_2 Z_3 + w_2 Y_3 Z_1 + w_3 Y_1 Z_2 - w_1 Y_3 Z_2 - w_2 Y_1 Z_3 - w_3 Y_2 Z_1}{X_1 Y_2 Z_3 + X_2 Y_3 Z_1 + X_3 Y_1 Z_2 - X_1 Y_3 Z_2 - X_2 Y_1 Z_3 - X_3 Y_2 Z_1}$$

$$q_{nc} = \frac{X_1 w_2 Z_3 + X_2 w_3 Z_1 + X_3 w_1 Z_2 - X_1 w_3 Z_2 - X_2 w_1 Z_3 - X_3 w_2 Z_1}{X_1 Y_2 Z_3 + X_2 Y_3 Z_1 + X_3 Y_1 Z_2 - X_1 Y_3 Z_2 - X_2 Y_1 Z_3 - X_3 Y_2 Z_1} \quad \dots\dots(8)$$

$$* -\sum_{i=1}^n \frac{l^4}{\pi^4 E_S} \left(\frac{b_i' b_{K'}}{I_{SA}} + \frac{b_i b_K}{I_{SB}} \right) \cdot \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mi} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$= \frac{l^4}{\pi^4 E_S I_{SK}} \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} q_{mK} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \dots\dots(6_3)$$

(6₁), (6₂), (6₃) のような式が各中間支点 1~ n において成立する。一方未知量の数は $q_{m1} \sim q_{mn}$ で中間支点の数だけあるから、 m の各値について連立方程式を解いて q_m を求めることができる。実際の計算には $\sin \frac{m\pi x}{l}$ が消されて簡単となる。 q_m が得られると分布反力 q は

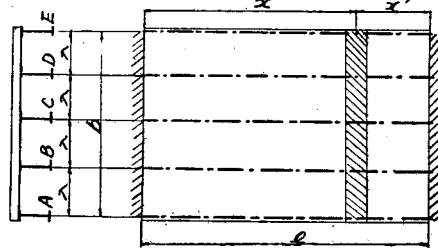
$$q = \sum_{m=1,2,3\dots} q_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

として求めることができる。これを積分することによつて主桁の曲げモーメント及び撓みを得られる。

3. 計算例及び N.M. Newmark 計算値との比較

図-4 に示すような等しい慣性モーメントを持つ5本主桁の構造について計算する。相関剛比及び寸法比

図-4



$$H = \frac{EI}{Nl} = \frac{EI}{E_c I_c} = 10, \quad \lambda/l = 0.1$$

(ただし EI : 主桁剛度, $E_c I_c$: 床版剛度)

をとす。はじめに荷重 P が A 桁中点に作用する場合について計算する。集中荷重 P はフーリエ級数によつて次のように表わされる。

$$\frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \cdot \sum_{m=1,2,3\dots} \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi d}{l} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l}$$

式 (6₁)~(6₃) で与えられる釣合方程式を各中間支点上について求め、これを次の形におく。

$$\left. \begin{aligned} X_1 q_{nb} + Y_1 q_{nc} + Z_1 q_{na} &= w_1 \\ X_2 q_{nb} + Y_2 q_{nc} + Z_2 q_{na} &= w_2 \\ X_3 q_{nb} + Y_3 q_{nc} + Z_3 q_{na} &= w_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

式 (7) の連立方程式を解いて、

$$qnd = \frac{X_1 Y_2 w_3 + X_2 Y_3 w_1 + X_3 Y_1 w_2 - X_1 Y_3 w_2 - X_2 Y_1 w_3 - X_3 Y_2 w_1}{X_1 Y_2 Z_3 + X_2 Y_3 Z_1 + X_3 Y_1 Z_2 - X_1 Y_3 Z_2 - X_2 Y_1 Z_3 - X_3 Y_2 Z_1}$$

を得る。相関剛比, 寸法比の関係を入れて計算し, $\frac{b^3}{E_0 I_0}$ を消し, $n'\pi' = \alpha$ とおくと式 (7) の各係数は表-1 ようになる。荷重がスパン中点に作用する場合

には m の偶数項は 0 となるので奇数項についてのみ計算する。また $m=11$ 以下の項は小さいので省略する。

表-1

	$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	$m=9$
$X_1 = Z_3$ $= 0.01172 \alpha + 2.53906$	3.68069	95.01119	716.05859	2743.59567	7492.78171
$X_2 = Y_1 = Y_3 = Z_2$ $= 0.01432 \alpha + 0.78125$	2.17614	113.76768	872.59010	3349.92209	9152.68182
$X_3 = Z_1$ $= 0.00911 \alpha + 0.58594$	1.47333	72.46487	555.20735	2131.21953	5822.77967
$Y_2 = 0.02083 \alpha + 2.34375$	4.37278	166.69482	1270.48469	4874.03395	13314.78013
$w_1 = 2.34375 \frac{P}{l} \sin \frac{m\pi d}{l}$	$2.34375 \frac{P}{l}$	$-2.34375 \frac{P}{l}$	$2.34375 \frac{P}{l}$	$-2.34375 \frac{P}{l}$	$2.34375 \frac{P}{l}$
$w_2 = 1.56250 \frac{P}{l} \sin \frac{m\pi d}{l}$	$1.56250 \frac{P}{l}$	$-1.56250 \frac{P}{l}$	$1.56250 \frac{P}{l}$	$-1.56250 \frac{P}{l}$	$1.56250 \frac{P}{l}$
$w_3 = 0.78125 \frac{P}{l} \sin \frac{m\pi d}{l}$	$0.78125 \frac{P}{l}$	$-0.78125 \frac{P}{l}$	$0.78125 \frac{P}{l}$	$-0.78125 \frac{P}{l}$	$0.78125 \frac{P}{l}$

表-1 の値を式 (8) に入れて計算すると各分布反力は次のようになる。

$$q_b = \frac{P}{l} \left(0.61660 \sin \frac{\pi d}{l} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + 0.07537 \sin \frac{3\pi d}{l} \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + 0.01159 \sin \frac{5\pi d}{l} \cdot \sin \frac{5\pi x}{l} + 0.00309 \sin \frac{7\pi d}{l} \cdot \sin \frac{7\pi x}{l} + 0.00101 \sin \frac{9\pi d}{l} \cdot \sin \frac{9\pi x}{l} \right)$$

$$q_c = \frac{P}{l} \left(0.09587 \sin \frac{\pi d}{l} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} - 0.04620 \sin \frac{3\pi d}{l} \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} - 0.00809 \sin \frac{5\pi d}{l} \cdot \sin \frac{5\pi x}{l} - 0.00217 \sin \frac{7\pi d}{l} \cdot \sin \frac{7\pi x}{l} - 0.00071 \sin \frac{9\pi d}{l} \cdot \sin \frac{9\pi x}{l} \right)$$

$$q_a = \frac{P}{l} \left(-0.09125 \sin \frac{\pi d}{l} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + 0.00605 \sin \frac{3\pi d}{l} \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + 0.00188 \sin \frac{5\pi d}{l} \cdot \sin \frac{5\pi x}{l} + 0.00053 \sin \frac{7\pi d}{l} \cdot \sin \frac{7\pi x}{l} + 0.00014 \sin \frac{9\pi d}{l} \cdot \sin \frac{9\pi x}{l} \right)$$

$d = x = l/2$ として上式を積分して, 荷重が主桁 A の中点に作用するときの各主桁中点の曲げモーメントを求めると次のようになる。

$$M_b = Pl (0.06247 + 0.00085 + 0.00004_6 + 0.00000_1 + 0.00000_0) = 0.06337 Pl$$

$$M_c = Pl (0.00971 - 0.00059 - 0.00003 - 0.00000_1 - 0.00000_0) = 0.00909 Pl$$

$$M_a = Pl (-0.00925 + 0.00007 + 0.00000_6)$$

$$+ 0.00000_1 + 0.00000_0) = -0.00917_4 Pl$$

M_b, M_c, M_d より M_a, M_e は次のように簡単に求まる

$$M_a = 0.201 Pl$$

$$M_e = -0.014 Pl$$

同様にして荷重が B 桁 C 桁に作用する場合について計算すると, 表-2 のようになる。

また $H = EI/NI = 5, \lambda/l = 0.1$ の場合について計算すると, 表-3 を得る。

表-2 主桁曲げモーメント ($H=10, \lambda/l=0.1$ の場合)

1/2 点 (曲げモーメントは下表の係数を Pl に乗じて得られる)

荷重位置 \ 桁	A	B	C	D	E
A	0.201 (0.189)	0.063 (0.063)	0.009 (0.013)	-0.009 (-0.005)	-0.014 (-0.011)
B	0.063 (0.063)	0.123 (0.119)	0.055 (0.053)	0.018 (0.019)	-0.009 (-0.005)
C	0.009 (0.013)	0.055 (0.053)	0.122 (0.116)	0.055 (0.053)	0.009 (0.013)

1/4点 (この場合の N.M. Newmark 計算値はない)

桁 荷重位置	A	B	C	D	E
A	0.090	0.044	0.007	-0.007	-0.009
B	0.044	0.038	0.036	0.014	-0.007
C	0.007	0.036	0.039	0.036	0.007

1/2点 表-3 主桁曲げモーメント (H=5, λ/l=0.1 の場合)

桁 荷重位置	A	B	C	D	E
A	0.189 (0.172)	0.071 (0.067)	0.019 (0.022)	-0.007 (0.000)	-0.022 (-0.014)
B	0.071 (0.067)	0.114 (0.107)	0.053 (0.050)	0.020 (0.021)	-0.007 (0.000)
C	0.019 (0.022)	0.053 (0.050)	0.107 (0.101)	0.053 (0.050)	0.019 (0.022)

1/4点

桁 荷重位置	A	B	C	D	E
A	0.083 (0.072)	0.048 (0.044)	0.015 (0.017)	-0.005 (-0.000)	-0.016 (-0.010)
B	0.048 (0.044)	0.035 (0.033)	0.032 (0.031)	0.015 (0.016)	-0.005 (0.000)
C	0.015 (0.017)	0.032 (0.031)	0.031 (0.029)	0.032 (0.031)	0.015 (0.017)

表中括弧内の数字は版理論による N.M. Newmark の計算値である。著者の計算結果と比較してみると若干の相違が認められるが、近似計算としてはこの程度で充分であろう。

表-2 及び表-3 からわかるように、床版の荷重分布作用を考慮することにより、主桁の曲げモーメントはいちじるしく減少する。たとえば表-2 に見られるように、荷重がC桁中央に作用するときのC桁中点における曲げモーメントは 0.122 Pl であつて、荷重分布を考慮しない場合の値 0.250 Pl の 1/2 以下である。もちろん、荷重分布を考慮した場合においては、普通の計算法に従う場合に計算に入らない他の桁上の荷重の影響が入ってくるので、実際設計上の荷重に対しては表-2, 表-3 に示されるようには減少されない。それにしても、荷重分布作用を考慮することにより主桁曲げモーメントはいちじるしく減少され、従来の計算法による応力比 50% の値は 70% 程度にはなるものと思われる。慣性モーメント及び荷重に関する最初の仮定に対して、桁の全長において慣性モーメントの異なる場合、またスパン荷重の場合についての問題がある。前者については、たとえば

$$J = \frac{I^3}{48 \int \frac{M_x^2}{I_x} dx}$$

等の式を用いて平均慣性モーメントを求めるとよい。

また後者については、各支点の剛性を無限大と仮定して荷重を配分し、この荷重を用いて上記の計算を行うなどの方法を用いるとよい。

4. 結 語

以上は橋床の荷重分布に関する近似計算法を提案し、これを版理論による N.M. Newmark 計算値と比較したものである。道路橋の応力解析において、鉄筋コンクリート床版の作用は等閑にできない大きな要素であり、これらについてはすでに厳密な解析が行われているが、実際の計算に当つての適用はきわめて困難である。このような意味において、本計算法は十分に厳密ではあり得ないにしても、その計算上の手数はきわめて簡単であり、道路橋の合理的な設計になんらかの役に立つものと思う。

本研究において、京都大学成岡助教授より懇切なる御指導を賜つた。附記して感謝の意を表する次第である。

参考文献

- 1) 成岡昌夫：土木学会誌，第 38 巻第 7 号 p.26
- 2) N.M. Newmark and C.P. Siess：University of Illinois Bulletin, No. 336 (1942)
- 3) F.E. Richart, N.M. Newmark, C.P. Siess：Proc. ASCE, 1948, Symposium.
- 4) E. Müller：Bauing. 1923, s. 489, s. 519.
- 5) M. Hetenyi：S. Timoshenko 60th Anniversary Volume (1938) p.60 (昭.28.8.18)