表—3

物理試験				化学成分							
比重	粉末度		必要水量標準セメントとの率	番号	Ig. Los.	SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	CaO	MgO	SO_3
	0.088 篩	見かけ表面積		1	1.09	59.56	32.15	3.15	1.89	1.34	—
2.0	2.6%	3.820cm²/G	98%	2	0.56	60.84	27.82	5.30	3.60	1.20	—
				3	1.20	58.26	26.32			1.22	0.45

表—4

混合比	軟モルタルによる強度試験							安定度試験				
	フロー	曲げ強度 kg/cm²			圧縮強度 kg/cm²			凝結		煮沸 (バット)	オートクレーブ試験 (膨脹率)	
		3 日	1 週	4 週	3 日	1 週	4 週	始発	終結		セメントペースト	モルタル
1 : 0	231	31.0	46.1	63.8	112	200.7	361	h m 2.24	h m 3.36	完	0.049	0.010
0 : 1												
1 :0.2	242	22.6	40.6	57.6	86	177	325	3.35	4.35	〃	0.035	0.007
1 :0.3	250	20.3	34.6	50.4	74	147	274	3.55	5.12	〃	0.006	0.008
1 :0.5	248	17.3	30.5	46.7	61	126	256	4.07	5.45	〃	0.017	0.007
1 :0.8	247	16.6	24.4	45.3	54	93	211	4.36	6.30	〃	—	
1 : 1	250	12.6	20.6	33.4	42	70	161	4.50	7.20	〃	0.053	0.007
1 : 2	238	8.8	12.4	24.8	24	42	100	5.35	8.25	〃	—	
		10以上	20以上	30以上	35以上	70以上	100以上					

率をあげるため最初より極微粉にして燃焼させていることと炭質に粘結性がなく灼熱で各粒子の融解をともなわないことに起因すると思われる。

V. 結　語

本文で述べた水中コンクリート工法は今後ドルフィン，デタッチドピヤー，岩盤上の防波堤等の港湾工事のほか，気圧潜函工法で施工されていた橋梁，建築の基礎工事にもそのまま応用できるであろうし，またフライアッシュについても今後コンクリートポンプによる施工やプレパクトコンクリート等が普偏化してコンクリートの流動性が今日以上に強く要求されることが想像されるので安価な滑材として高く評価されてよいと思われ一文を稿した次第である。

(昭.28.7.11)

曲梁の半径方向の垂直応力度公式

正員 大　野　諫*

FORMULA FOR RADIAL NORMAL STRESS OF CURVED BEAM[1)]

(JSCE Jan. 1954)

Isamu Ohno, C.E. Member

Synopsis This paper explains the author's formula for radial normal stress σ_r of curved beam.

$$\sigma_r=\frac{M}{bJ_0}\bar{\mathfrak{S}}+\frac{N}{bF}\bar{\mathfrak{F}}-\frac{N}{bJ_0}\bar{\mathfrak{F}}_s \quad \cdots\cdots (A)$$

$$=\frac{M}{bFe}\frac{r_0\bar{L}-\bar{F}}{r}+\frac{N}{bF}\frac{\bar{F}}{r}-\frac{N}{bFe}\frac{r_0}{r}\int_{r_1}^{r}\frac{r_g-\bar{r}}{r^2}\bar{F}dr \quad \cdots\cdots (A')$$

* 東京都立大学教授，工学部建設工学科

in which

$$J_0=r_0\int y^2\frac{dF}{r}=Fer_0\ ;\ e=r_g-r_0 \qquad \text{(a)}$$

$$r_0=\frac{F}{L}\ ;\ F=\int_{r_1}^{r_2} b\,dr,\quad L=\int_{r_1}^{r_2}\frac{b\,dr}{r} \qquad (b)$$

$$\bar{\mathfrak{S}}=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r} y\frac{r_0}{r}dF=\frac{r_0}{r}(r_0\bar{L}-\bar{F})\ ;\ \bar{F}=\int_{r_1}^{r} b\,dr,\quad \bar{L}=\int_{r_1}^{r}\frac{b\,dr}{r} \qquad \text{(c)}$$

$$\bar{\mathfrak{F}}=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}dF=\frac{\bar{F}}{r} \qquad \text{(d)}$$

$$\bar{\mathfrak{F}}_s=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r} S\,dr=\frac{r_0^2}{r}\int_{r_1}^{r}\frac{r_g-\bar{r}}{r^2}\bar{F}dr\ ;\ r_g=\frac{\int_{r_1}^{r_2} r\,dF}{F},\qquad \bar{r}=\frac{\int_{r_1}^{r} r\,dF}{\bar{F}} \qquad \text{(e)}$$

$$S=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\int_{r_1}^{r}(r_g-r)dF=\frac{r_0^2(r_g-\bar{r})\bar{F}}{r^2} \qquad \text{(f)}$$

Taking only the first term, Equation (A) becomes

$$\sigma_r=\frac{M}{bJ_0}\bar{\mathfrak{S}}=\frac{M}{bFe}\ \frac{r_0\bar{L}-\bar{F}}{r},$$

which is equivalent to Seely-Smith's formula :

$$\sigma_r=\frac{Ma'}{Rta(R+y)}\left(1-\frac{Z'}{Z}\right) \qquad \text{(B)}$$

in which

$$a'=\int_{-c}^{y}da,\quad Z'=-\frac{1}{a'}\int_{-c}^{y}\frac{yda}{R+y},\quad Z=-\frac{1}{a}\ \frac{yda}{R+y}$$

I. 緒　言

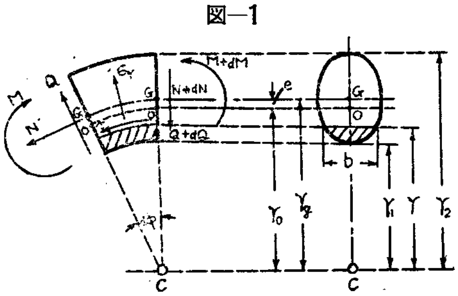
曲梁の応力度公式は元来 Crane hook のごときいわゆる Solid Section をもつ曲部材の計算の要求からたてられ，従つて横断面の垂直応力度すなわち Circumferential stress σ のみが問題とされてきたが，近時，半径方向の垂直応力度，すなわち radial stress σ_r がＩ形，またはＴ形断面の設計に対し重要視されるようになつた[2)]。しかし σ_r の公式に対しモーメントの影響のみが通常考えられ垂直力及び剪断力の影響は出されていない。これに反し著者提案の σ_r の公式[3)] はモーメントのみならず垂直力及び剪断力の影響をも省略することなく完結した形に表わされたものであつて，その第１項，すなわちモーメントに対応するものが従来の Grünning, Winslow-Edmonds, または Seely-Smith の σ_r に対する公式に等しい。

σ_r の一般式の誘導方法については，さきに本誌上に述べたので，今回はその公式中に導入されている常数 $\bar{\mathfrak{S}}$, $\bar{\mathfrak{F}}$ 及び $\bar{\mathfrak{F}}_s$ の計算式を示しさらに矩形，Ｔ形及びＩ形断面に対するこれらの常数値を求める方法を示すとともにモーメントの影響に比べ，垂直力及び剪断力の σ_r に及ぼす影響がどの程度のものか[4)]，またＴ形及びＩ形断面において半径方向の応力度 σ_r が重視さるべきゆえんを述べんとするものである。

常数 $\bar{\mathfrak{S}}$, $\bar{\mathfrak{F}}$ 及び $\bar{\mathfrak{F}}_s$ の値を求めんとする際，もしも積分困難な断面形ならば微小断面に分割して (a)～(f) 式に従い図解，または表計算を行えばよろしい。しかし普通出てくる断面形ではたやすく計算できる。

II. 曲梁の半径方向の応力度

図—1



σ_r に対する著者の公式

記号：(図—1)

σ_r：曲梁中心 c より r なる距離における断面の点の半径方向の垂直応力度

M：横断面にはたらく曲げモーメント

N: 横断面の重心にはたらく垂直力，すなわち軸力

Q: 剪断力

(M, N, Q は図—1に示す方向を正とする)

F: 全横断面

b: 曲率半径 r に対応する横断面の巾であつて，一般に r の函数とする。

r_g: 断面重心軸の曲率半径。

r_0: 横断面にモーメント M のみがはたらく場合の中立軸の曲率半径

e: 中立軸の重心軸に対する偏心距離

r: 考える断面の点の曲率半径

r_1: 内縁の曲率半径

r_2: 外縁の曲率半径

y: 中立軸より断面の点に到る距離（曲率中心の方向へ測つた距離を正にとる）

J_0: 修正慣性モーメント (Modified moment of inertia)

$\overline{\mathfrak{S}}$: 修正断面一次モーメント (Modified static moment)

$\overline{\mathfrak{F}}$: 修正断面 (Modified area)

$\overline{\mathfrak{F}}_s$: 修正断面一次モーメント図の面積

S: 修正断面一次モーメント

以上の記号を用うれば，曲梁の半径方向の垂直応力度 σ_r は一般に次式で表わされる[5]。すなわち

$$\sigma_r=\frac{M}{bJ_0}\overline{\mathfrak{S}}+\frac{N}{bF}\overline{\mathfrak{F}}-\frac{N}{bJ_0}\overline{\mathfrak{F}}_s$$
$$=\frac{M}{b}\frac{\overline{\mathfrak{S}}}{J_0}+\frac{N}{b}\left(\frac{\overline{\mathfrak{F}}}{F}-\frac{\overline{\mathfrak{F}}_s}{J_0}\right)\quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

ここに

$$J_0=r_0\int y^2\frac{dF}{r}=Fer_0\,;\ e=r_g-r_0\quad\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

$$r_0=\frac{F}{L}=\frac{F}{\displaystyle\int\frac{dF}{r}}\quad\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

$$\overline{\mathfrak{S}}=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}y\frac{r_0}{r}dF\quad\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

$$\overline{\mathfrak{F}}=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}dF\quad\cdots\cdots(\mathrm{d})$$

$$\overline{\mathfrak{F}}_s=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}Sdr\quad\cdots\cdots(\mathrm{e})$$

$$S=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\int_{r_1}^{r}(r_g-r)dF\quad\cdots\cdots(\mathrm{f})$$

(A) 式において第1項，$M\overline{\mathfrak{S}}/bJ_0$ はモーメントに対応する項であつて，第2及び3項 $N/b\cdot(\overline{\mathfrak{F}}/F-\overline{\mathfrak{F}}_s/J_0)$ は $dQ/d\phi=-N$ の関係から垂直力及び剪断力に対応する項であることがわかる。$dQ/d\phi=-N$ なる関係は直梁の場合にないものである。

III. 常数 $\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{F}}$ 及び $\overline{\mathfrak{F}}_s$ の計算

1. 公式 (A) の第1項において

$$\overline{\mathfrak{S}}=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}y\frac{r_0}{r}dF\quad\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

この式において積分記号の前の r 及び積分の上限値 r は考える応力度 σ_r に対応する点の曲率中心からの距離であつて，積分記号内に含まれる r は積分区域内の任意点の曲率中心からの距離を表わす。かような両方の r に対し記号を変えてもよいが，慣れれば混雑も起らず，かつこれは普通用いられる表わし方であるので，$\overline{\mathfrak{S}}$ に対してのみならず $\overline{\mathfrak{F}}, \overline{\mathfrak{F}}_s, S$ 等についてもこの表わし方を用いた。y は中立軸から積分区域内の任意点に到る距離であつて $y=r_0-r$ である。

(c) 式より

$$\overline{\mathfrak{S}}=\frac{r_0}{r}\int_{r_1}^{r}y\frac{dF}{r}=\frac{r_0}{r}\int_{r_1}^{r}(r_0-r)\frac{dF}{r}$$
$$=\frac{r_0}{r}\left(r_0\int_{r_1}^{r}\frac{dF}{r}-\int_{r_1}^{r}dF\right)$$

従つて

$$\overline{L}=\int_{r_1}^{r}\frac{dF}{r}=\int_{r_1}^{r}\frac{bdr}{r},\ \overline{F}=\int_{r_1}^{r}dF=\int_{r_1}^{r}bdr$$

と置けば

$$\overline{\mathfrak{S}}=\frac{r_0}{r}(r_0\overline{L}-\overline{F})\quad\cdots\cdots(\mathrm{c}')$$

を得る。ここに

$$r_0=\frac{F}{L}\,;\ L=\int_{r_1}^{r_2}\frac{dF}{r}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{bdr}{r},$$

$$F=\int_{r_1}^{r_2}dF=\int_{r_1}^{r_1}bdr$$

また

$$J_0=Fer_0,\ e=r_g-r_0$$

故に σ_r の第1項を $\sigma_{r,1}$ として表わせば

$$\sigma_{r,1}=\frac{M}{bJ_0}\overline{\mathfrak{S}}=\frac{M}{bFer_0}\frac{r_0}{r}(r_0\overline{L}-\overline{F})$$

$$=\frac{M}{bFe}\frac{r_0\overline{L}-\overline{F}}{r}\quad\cdots\cdots(1)$$

2. 公式 (A) の第2項において

$$\overline{\mathfrak{F}}=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}dF=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}bdr=\frac{1}{r}\overline{F}\quad\cdots\cdots(\mathrm{d}')$$

ここに $\overline{F}=\int_{r_1}^{r}bdr$ は考える σ_r に対する断面の点から内側にある横断面の部分（図—1）において影をつけて示した部分断面積を表わす。

故に σ_r の第2項を $\sigma_{r,2}$ で表わせば

$$\sigma_{r,2}=+\frac{N}{bF}\overline{\mathfrak{F}}=+\frac{N}{bF}\frac{\overline{F}}{r}\quad\cdots\cdots(2)$$

3. 公式(A)の第3項において

$$\overline{\mathfrak{F}}_s=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r} S\,dr \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{e})$$

しかして S は r の函数として次のごとく表わされる。すなわち

$$S=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\int_{r_1}^{r}(r_g-r)dF\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{f})$$

(f)式において積分記号の前の r 及び積分の上限値 r は(e)式における積分区域内の任意点の曲率中心からの距離であつて，(f)式の積分記号内の r はその任意点と断面の内縁点との間における任意点の曲率中心からの距離を表わす。これらの r をいちいち区別して表わしてもよいが，慣れれば混同することもないので慣例に従いこの表わし方にした。

(f) より

$$S=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\left(r_g\int_{r_1}^{r} dF-\int_{r_1}^{r} r\,dF\right)$$

$$=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\left(r_g\int_{r_1}^{r} b\,dr-\int_{r_1}^{r} b\,r\,dr\right)$$

故に

$$\overline{F}=\int_{r_1}^{r} dF=\int_{r_1}^{r} b\,dr,$$

$$\overline{r}\overline{F}=\int_{r_1}^{r} r\,dF=\int_{r_1}^{r} b\,r\,dr$$

と置けば

$$S=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2(r_g\overline{F}-\overline{r}\overline{F})=\frac{r_0^2(r_g-\overline{r})\overline{F}}{r^2}\quad\cdots(\mathrm{f}')$$

従つて(e)より

$$\overline{\mathfrak{F}}_s=\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}\frac{r_0^2(r_g-\overline{r})\overline{F}}{r^2}dr$$

$$=\frac{r_0^2}{r}\int_{r_1}^{r}\frac{r_g-\overline{r}}{r^2}\overline{F}dr\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{e}')$$

故に σ_r の第3項を $\sigma_{r,3}$ として表わせば

$$\sigma_{r,3}=-\frac{N}{bJ_0}\overline{\mathfrak{F}}_s=-\frac{N}{bFer_0}\frac{r_0^2}{r}\int_{r_1}^{r}\frac{r_g-\overline{r}}{r^2}\overline{F}dr$$

$$=-\frac{N}{bFe}\frac{r_0}{r}\int_{r_1}^{r}\frac{r_g-\overline{r}}{r^2}\overline{F}dr\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

従つて σ_r は(1)，(2)，(3)の和として次のごとく表わされる。すなわち

$$\sigma_r=\frac{M}{bJ_0}\overline{\mathfrak{S}}+\frac{N}{bF}\overline{\mathfrak{F}}=\frac{N}{bJ_0}\overline{\mathfrak{F}}_s\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

$$=\frac{M}{bFe}\;\frac{r_0\overline{L}-\overline{F}}{r}+\frac{N}{bF}\;\frac{\overline{F}}{r}$$

$$-\frac{N}{bFe}\;\frac{r_0}{r}\int_{r_1}^{r}\frac{r_g-\overline{r}}{r^2}\overline{F}dr\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}')$$

ここに

$$F=\int_{r_1}^{r_2}dF=\int_{r_1}^{r_2}b\,dr,\quad \overline{F}=\int_{r_1}^{r}dF=\int_{r_1}^{r}b\,dr$$

$$L=\int_{r_1}^{r_2}\frac{dF}{r}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{b\,dr}{r},$$

$$\overline{L}=\int_{r_1}^{r}\frac{dF}{r}=\int_{r_1}^{r}\frac{b\,dr}{r}$$

$$r_g=\frac{\int_{r_1}^{r_2}r\,dF}{F}=\frac{\int_{r_1}^{r_2}b\,r\,dr}{\int_{r_1}^{r_2}b\,dr},$$

$$\overline{r}=\frac{\int_{r_1}^{r}r\,dF}{\overline{F}}=\frac{\int_{r_1}^{r}b\,r\,dr}{\int_{r_1}^{r}b\,dr}$$

$$r_0=\frac{F}{L},\quad e=r_g-r_0$$

F 及び $\overline{F}$ はそれぞれ全断面及び部分面，L 及び $\overline{L}$ はそれぞれ全断面及び部分面に対する常数，r_g 及び $\overline{r}$ はそれぞれ全断面及び部分面の重心に対する曲率半径，b は横断面の任意点における巾で一般に r の函数である。

IV．矩形断面の曲梁

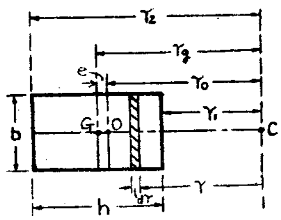
矩形断面 $(F=b\cdot h)$ に対しては断面巾 b が const. であるから

$$\overline{L}=\int_{r_1}^{r}b\frac{dr}{r}=b\int_{r_1}^{r}\frac{dr}{r}=b\,\ln\frac{r}{r_1}$$

$$=b(\ln_r-\ln_{r_1})$$

$$\overline{F}=\int_{r_1}^{r}b\,dr=b\int_{r_1}^{r}dr=b(r-r_1)$$

図—2



故に(1)より σ_r の第1項は

$$\sigma_{r,1}=\frac{M}{bFe}\;\frac{r_0\overline{L}-\overline{F}}{r}$$

$$=\frac{M}{Fe}\;\frac{r_0(\ln_r-\ln_{r_1})-(r-r_1)}{r}\quad\cdots\cdots(1')$$

ここに

$$e=r_g-r_0,\quad r_0=\frac{h}{\ln\frac{r_2}{r_1}}=\frac{h}{\ln_{r_2}-\ln_{r_1}}$$

また，(2)より σ_r の第2項は

$$\sigma_{r,2}=\frac{N}{bF}\;\frac{\overline{F}}{r}=\frac{N}{F}\;\frac{r-r_1}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$

次に

$$r_g\overline{F}=r_gb(r-r_1),$$

$$\bar{r}\bar{F}=\left(r_1+\frac{r-r_1}{2}\right)b(r-r_1)=\frac{b}{2}(r^2-r_1^2)$$

故に

$$\int_{r_1}^{r}\frac{r_g-\bar{r}}{r^2}\bar{F}dr=b\int_{r_1}^{r}\left\{\frac{r_g(r-r_1)}{r^2}-\frac{r^2-r_1^2}{2r^2}\right\}dr=b\int_{r_1}^{r}\left\{\frac{r_g}{r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{r_1^2}{2}-r_gr_1\right)-\frac{1}{2}\right\}dr$$

$$=b\left|r_g\ln r-\frac{1}{r}\left(\frac{r_1^2}{2}-r_gr_1\right)-\frac{r}{2}\right|_{r_1}^{r}$$

$$=b\left\{r_g(\ln r-\ln r_1)-\frac{r-r_1}{r}\left(r_g-\frac{r_1}{2}+\frac{r}{2}\right)\right\}$$

しかるに矩形断面の場合 $r_g=\frac{r_1+r_2}{2}$ なる故に，これを代入すれば

$$\int_{r_1}^{r}\frac{r_g-\bar{r}}{r^2}\bar{F}dr=b\left\{r_g(\ln r-\ln r_1)-\frac{(r-r_1)(r+r_2)}{2r}\right\}$$

となる。故に(3)より σ_r の第3項は

$$\sigma_{r,3}=-\frac{N}{bFe}\frac{r_0}{r}\int_{r_1}^{r}\frac{r_g-\bar{r}}{r^2}\bar{F}dr=-\frac{Nr_0}{Fe}\left\{\frac{r_g(\ln r-\ln r_1)}{r}-\frac{(r-r_1)(r+r_2)}{2r^2}\right\}\cdots\cdots(3')$$

故に矩形断面($F=bh$)に対する σ_r は(1′),(2′),(3′)の和として

$$\sigma_r=\frac{M}{Fe}\frac{r_0(\ln r-\ln r_1)-(r-r_1)}{r}+\frac{N}{F}\frac{r-r_1}{r}-\frac{Nr_0}{Fe}\left\{\frac{r_g(\ln r-\ln r_1)}{r}-\frac{(r-r_1)(r+r_2)}{2r^2}\right\}\cdots\cdots(A'')$$

ここに　$r_0=\frac{h}{\ln\frac{r_2}{r_1}}=\frac{h}{\ln r_2-\ln r_1}$, $e=r_g-r_0$

式((A″)より $r=r_1$ 及び $r=r_2$ にて σ_r は0となり σ_r の max. の位置は $d\sigma_r/dr=0$ より求められる。σ_r の max. は梁の高さの中央でなく内縁の方にかたよつて生ずる。

I形断面及びT形断面の場合も同様にして σ_r の公式を求めることができる。

V. σ_r に対する公式(A)の第1項が Seely-Smith の公式に等しいこと

公式(A)の第1項は

$$\sigma_r=\frac{M}{bJ_0}\mathfrak{S}=\frac{M}{bFe}\frac{r_0\bar{L}-\bar{F}}{r}\cdots\cdots(1)$$

ここに　$e=r_g-r_0$, $r_0=F/L=F\Big/\int_{r_1}^{r_2}\frac{dF}{r}$

この式(1)を書き直せば

$$\sigma_r=\frac{M}{bF(r_g-r_0)}\frac{r_0\bar{L}-\bar{F}}{r}=\frac{M}{bFr}\frac{r_0\bar{L}-\bar{F}}{r_g-r_0}=\frac{M}{bFr}\frac{\frac{F}{L}\bar{L}-\bar{F}}{r_g-\frac{F}{L}}$$

$$=\frac{M\bar{F}\left(\frac{F}{L}\frac{\bar{L}}{\bar{F}}-1\right)}{bFrr_g\left(1-\frac{F}{r_gL}\right)}\times\frac{\frac{r_gL}{F}}{\frac{r_gL}{F}}=\frac{M\bar{F}\left(\frac{r_g\bar{L}}{\bar{F}}-\frac{r_gL}{F}\right)}{bFrr_g\left(\frac{r_gL}{F}-1\right)}\cdots\cdots(1)'$$

ここで記号の変換を行うことにする。すなわち

著者の公式における記号	それに対応する Seely-Smith の記号
M	$-M$
r_g	R
r	$R+y$
b	t
F	a
$\bar{F}=\int_{r_1}^{r}bdr$	a'
$\frac{1}{\bar{F}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(r_g-r)}{r}dF=\frac{r_g\bar{L}}{\bar{F}}-1$	$-\frac{1}{a'}\int_{-c}^{y}\frac{yda}{R+y}=Z'$
$\frac{r_g\bar{L}}{\bar{F}}$	$Z'+1$
$\frac{1}{F}\int_{r_1}^{r_2}\frac{r_g-r}{r}dF=\frac{r_gL}{F}-1$	$-\frac{1}{a}\int_{-c}^{+c}\frac{yda}{R+y}=Z$
$\frac{r_gL}{F}$	$Z+1$

式(1)′を対応する Seely-Smith の記号で書きかえると

$$\sigma_r=\frac{-Ma'}{ta(R+y)R}\frac{Z'+1-(Z+1)}{Z}=\frac{Ma'}{Rta(R+y)}\left(1-\frac{Z'}{Z}\right)\cdots\cdots(B)$$

を得る。

著者の公式と Seely-Smith の公式(B)[6]の基本的な相違は前者が中立軸，後者が重心軸に関してたてられたものであり，従つて公式中に導入された常数が一方は中立軸に関するものであつて，他方は重心軸に関するもので表わされている。(B)式中の常数 Z は Bach の切線方向の応力度に対する公式における常数に等しいものである。

一般に円に関するものは半径 r の函数として表わした方が便利であるから Seely-Smith の公式(B)にお

ける常数を r の函数として書きかえててみると次のごとく表わされる。すなわち(B)式において

$$\kappa=\frac{r_gL}{F}-1=\frac{r_g}{F}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dF}{r}-1=\frac{r_g}{F}\int_{r_1}^{r_2}\frac{bdr}{r}-1$$

$$\bar{\kappa}=\frac{r_g\bar{L}}{\bar{F}}-1=\frac{r_g}{\bar{F}}\int_{r_1}^{r}\frac{bF}{r}-1=\frac{r_g}{\bar{F}}\int_{r_1}^{r}\frac{bdr}{r}-1$$

と置けば

$$\sigma_r=\frac{M\bar{F}}{bFr_gr}\left(\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}-1\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})'$$

VI. Anderson の論文における公式

Anderson によれば[7]，I 形または箱形断面の曲梁において，内側突縁と腹との連結点($r=b$)における半径方向の応力度を

$$\widehat{rr}_b=\widehat{\theta\theta}_{wm}\frac{t_1S_1'}{bS_2},$$

ここに $$\widehat{\theta\theta}_{wm}=\frac{M(R_n-r_m)}{A'(R_c-R_n)r_m}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{C})$$

として示しているが，$\widehat{\theta\theta}_{wm}$ を代入して計算し，まとめてゆくと著者の公式 (A′) の第1項の考える連結点における値に等しくなる。すなわち

$$\widehat{rr}_b=\frac{M(R_n-r_m)}{A'(R_c-R_n)r_m}\cdot\frac{bS_1'}{bS_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{C})'$$

ここで記号の変換を行うことにする。すなわち

Anderson の 記 号	これに対応する著者の記号
$\widehat{rr}_b$：内側突縁と腹との接続点における半径方向の応力度	$(\sigma_r)_{r=r'}$
M 曲げモーメント	M
A' 横断面（突縁鈑の撓曲を考えるものとする）	F
R_n 中立軸の曲率半径	r_0
$r_m=\dfrac{0.4343\,t_1}{\log_{10}\dfrac{b}{a}}$ 内側突縁の平均半径	$\dfrac{h_1}{\ln\dfrac{r'}{r_1}}$
R_c-R_n 中立軸の断面重心軸に対する偏心距	$r_g-r_0=e$
t_1 内側突縁鈑の厚さ	h_1
b 内側突縁と腹との連結点に対する曲率半径	r'
S_1' 内側突縁鈑の巾（有効巾とするものとする）	b_1
S_2 腹鈑の厚さ	b'

(C′)式をまず著者の記号にして書けば

$$(\sigma_r)_{r=r'}=\frac{M\left(r_0-\dfrac{h_1}{\ln r'/r_1}\right)\dfrac{h_1}{r'}\dfrac{b_1}{b'}}{Fe\dfrac{h_1}{\ln r'/r_1}}$$

となる。この分母分子を $h_1/\ln\dfrac{r'}{r_1}$ でわれば

$$(\sigma_r)_{r=r'}=\frac{M}{Fe}\left(\frac{r_0}{\dfrac{h_1}{\ln r'/r_1}}-1\right)\frac{h_1}{r'}\frac{b_1}{b'}$$

$$=\frac{M}{Fe}\frac{b_1}{b'}\frac{r_0\ln\dfrac{r'}{r_1}-h_1}{r'}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{C\,1})$$

これは公式(A′)の第1項（一般式）

$$\sigma_r=\frac{M}{bFe}\frac{r_0\bar{L}-\bar{F}}{r}\ ;\ \bar{L}=b_1\ln\frac{r}{r_1},\ \ \bar{F}=b_1(r-r_1)$$

において内側突縁と腹との連結点に対する値 $b=b'$, $r=r'$, $r'-r_1=h_1$ とおいたものに等しい。

なお Anderson は腹及び突縁の任意点に対する公式を示していないが，著者の公式(A′)は σ_r を任意点の曲率半径 r の函数として表わしているため $\max\sigma_r$ の位置も算出し得る。また Anderson は剪断応力度 τ の分布に関しては研究しておらず，ただ Winkler に従い近似的に同一断面をもつ直梁の剪断応力度公式を用いうると述べるにとどめているが，剪断応力度に対しても今後はその計算も面倒でないから曲梁自身の剪断応力度公式を用うるようありたいものである[8]。第一，断面内における $\max\tau$ の生ずる場所も異なる。

VII. むすび

以上半径方向の応力度 σ_r の公式についてのべたが，それらの公式を用い実際例に数値を入れて計算してみたがその結果は

1. σ_r の公式において第1項，すなわちモーメントに対応する項に比べ，第2及び第3項，すなわち垂直力及び剪断力に対応する項は実地上省略して差支えない程度に小なることがたしかめられた。従つて実地上 σ_r の値は第1項 $\sigma_r=\dfrac{M}{bFe}\dfrac{r_0\bar{L}-\bar{F}}{r}$ のみで充分満足である。

2. σ_r の max. は梁の高さの中央に生ぜず，それより内側にかたよつて生ずる。しかしてI形断面では突縁の面積が腹に比べ大なる場合は突縁と腹との接続点において切線応力度と同じ order の σ_r を生じ曲梁の強さを支配することがあり得る。

3. Kayser がかつて行つた実験[9]（鋼ラーメンの隅角部が曲梁でできているものに対する実験）結果において隅角部の対角線上の σ_r の分布及び σ_r の max. の位置は公式による計算の結果とよく合致することを認めた。なおラーメン隅角部の応力度分布の研究としては切線方向応力度及び剪断応力度とともに行うべきものであるから，これらについては次回にゆずりたいと思う。

以上掲げた σ_r の公式においては r_0 及び $e=r_g-r_0$ は最後まで残しておいたが，r_0 に F/L を代入し，常数として，$L, \bar{L}, \bar{F}$ だけを残すことにすれば公式(A′)は

$$\sigma_r=\frac{M}{br(r_gL-F)}\left(\bar{L}-\frac{\bar{F}}{F}L\right)+\frac{N}{br}\frac{\bar{F}}{F}-\frac{N}{br(r_gL-F)}\int_{r_1}^{r}\frac{r_g-\bar{r}}{r^2}\bar{F}dr\quad\cdots\cdots(\mathrm{A}''')$$

となる。しかし実際計算の上で特に便利ともならず，r_0 が中立軸の曲率半径としての意味もあるので，ここでは(A′)の形を採ることにしたのである。

脚　註

1) 昭和28年9月第3回応用力学連合講演会講演
2) C.G. Anderson : Flexural stresses in curved beams of I-and box sections, Proceedings Applied Mechanics, 1950, London.
Seely-Smith : Advanced Mechanics of Materials, 2nd Edition, 1952, p. 165.
H. Bleich : Spannungsverteilung in den Gurtungen gekrümmter Stäbe T-und I-förmigen Querschnitt, Stahlbau, 1933.
3) 著者：曲梁の剪断応力度及び半径方向の垂直応力度に対する新公式，土木学会誌，第37巻7号，著者の σ_r の公式と Grünning, Winslow-Edmonds の公式との関係はさきに述べたので今回は Seely-Smith の近刊書中の公式との関係についてのべる。なお σ_r の公式応用については著者：ラーメン隅角部の設計公式について，土木学会誌，第37巻7号参照
4) 前掲 1) Anderson の論文では σ_r に及ぼす垂直力の影響は考えていない，そしてそれは今後の研究課題の一つに数えているが，これは著者の公式によつて解決された。
5) 公式(A)の誘導については上記 3) 参照
6) 前記 2)において142頁 circmferential stress $\sigma=\dfrac{M}{aR}\left(1+\dfrac{1}{Z}\,\dfrac{y}{R+y}\right)$ が著者の公式では $\sigma=My/J,\ J=Fer$ に相当する。
7) 前掲 2)
8) 前掲 3) 剪断応力度公式 $\tau=\dfrac{QS}{bJ_0}=\dfrac{Qr_0}{bFe}\times\dfrac{(r_g-\bar{r})\bar{F}}{r^2}=\dfrac{Q}{b(r_gL-F)}\,\dfrac{(r_g-\bar{r})\bar{F}}{r^2}$
従来の公式を著者の形に書きかえると $\tau=\dfrac{QS'}{bJ_g'}=\dfrac{Q}{b(r_gL-F)}\,\dfrac{(r_g-\bar{r})\bar{F}}{r^2}$ ここに $J_0=Fer_0$,
$S=\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2\bar{F}(r_g-\bar{r}),\ r_0=\dfrac{F}{L},\ L=\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\dfrac{dF}{r}$,
$J_g'=r_g\displaystyle\int v^2\dfrac{dF}{r}=kFr_g{}^2,\ S'=\left(\dfrac{r_g}{r}\right)^2\bar{F}(r_g-\bar{r})$,
$\bar{r}\bar{F}=\displaystyle\int_{r_1}^{r} rdF$
日本建築学会鋼構造計算規準，同解説(第4版) 35条(ii)彎曲梁のところに剪断応力度計算に対し上記の曲梁自身に対する剪断応力度公式を補足したいものである。
9) Dr.Ing.Kayser : Versuche zur Klärung des Spannungsverlaufes in Rahmenecken ; Stahlbau, 12 Jahrgang, Heft 2. 1939

(昭.28.8.15)

直交異方性板理論による鋼道路橋床版および桁の曲げモーメントについて

正員　米　沢　　博*

ON THE BENDING MOMENT OF SLAB AND GIRDER OF STEEL HIGHWAY BRIDGE BY THE THEORY OF ORTHOGONALLY ANISTROPIC PLATE

(JSCE Jan. 1954)

Hiroshi Yonezawa, C.E. Member

Synopsis The auther induced the formulas of bending moment of rectangular plate of infinite length with simply supported edges under load in the form of rectangle by the theory of bending of anistropic plates, and computed the bending moment for various wheel loads and various values of D_x/D_y. By the use of these results he computed the bending moment of girder and slab of steel highway bridge, compared with the result computed by customary method, and pointed out this method is rational.

1. まえがき

直交異方性板の理論的解は M. T. Huber によつて誘導され，橋梁関係では鉄筋コンクリート床版等に応用された[1]。わが国にても代表的な例としては井口博士[2]により論ぜられているが，実際の道路橋にはあまり用いられた例をみなかつたようである。近時特に欧米においては橋梁の合理的設計に対する研究が盛んになり，その重量軽減等にいちぢるしい効果をあげている。そのための研究対象として連続板の計算，合成桁，

* 山口大学助教授，工学部土木工学教室