

# 軌条の腹部応力について

正員 八十島 義之助\*

## ON THE STRESSES OF RAIL WEB

(JSCE Dec. 1953)

Yoshinosuke Yasoshima, C.E. Member

**Synopsis** The Author induced an method of calculation of rail web vertical stresses, and he explained results of laboratory rail experiments and field track tests. It was recognized that calculating method had good agreement in laboratory rail experiments. At field tests, beside expected stress corresponding to results of calculation, another widely distributed stresses was measured.

**要旨** 軌条腹部垂直応力について、理論誘導の方法を述べ、室内実験と野外試験の結果を説明した。今回の理論に基づく計算と室内実験の結果はほぼ合致したので理論誘導の基礎となる考え方は大体正しいことがわかった。実際の試験軌道を対象とする野外実験では今回の理論で説明できると考えられる応力波形が現われたが、それ以外に予期しなかつた影響範囲の広い応力波形の存在も認められた。

### I 前言

在来の軌条断面が腹部においてやや弱体であつたことは最近の内外の実験結果により明らかにされた。その対策もある程度樹立され A.R.E.A. においては標準軌条断面の変更に際して腹部強化が計られた。しかし腹部強度の理論的な裏づけは未だほとんど行われていない。筆者は腹部応力解析の緒口を把握すべくその理論誘導を試み、かつて本会年次講演会で報告したが<sup>1)</sup>、それに若干の修正を加えさらに室内実験でそれを検討した。試験軌道における敷設軌条でも活荷重による腹部応力の測定結果を得た。本文はそれらの報告である。なお本文中で扱う腹部応力は軌条断面对称軸に平行すなわち縦向きのものである。

### II 理論誘導

1. 条件 まず次の条件を設けて問題を単純化する。a) 軌条断面は頭部、腹部、底部の3部に区分して考えることができること：b) 軌条延長軸についての偶力は軌条内で頭部と底部が伝える：c) 軌条断面对称軸についての曲げは頭部と底部が伝える：d)  $\delta x$  の厚さをもつた軌条断片を取り出した場合、軌条延長軸についての曲げは腹部にのみ生じる：e) 軌条断面での対称軸方向の力及びそれに直交する軸についての曲げは別途に考えることにする：f) 軌条断面における頭部と底部は変形をしないとす。以上各条件は近似的には物理的に認め得ると考える。

\* 東京大学助教授，工学部土木工学教室

2. 軌条断片における平衡式 軌条の延長軸方向に  $\delta x$  の長さを取りそれを厚さとする断片について考える。腹部はその一端が頭部に接続しているが、それより受ける力は端モーメント  $m_{H0}$  と横力  $p$  である。同様の関係は他の一端で底部との間にも存在する。そして腹部としては、前述の条件のもとにおいてそれ以外の外力は有り得ない。すなわち腹部は軌条断面内に働らく端モーメントと端部横力のみを受ける梁と云うことになる。

腹部をこのように梁と考え任意点の曲げモーメント  $M_w$  を算出するには次の式を計算すればよい。

$$M_w = -p(z_0 + a_B - z) - m_{H0} - p a_H \dots \dots \dots (1)$$

ただし、 $p$ ：頭部及び底部より腹部端部に加えられ横力、 $m_{H0}$ ：頭部より腹部に加えられ端モーメント、その他の記号は図-1参照。

腹部の撓み角を求めるには(1)式を積分すればよい。

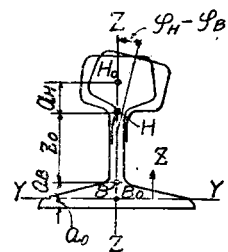
$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{EI_w} \int \frac{p}{2} z^2 - \left[ (z_0 + a_B + a_H) p + m_{H0} \right] dz + \left( z_0 + \frac{a_B}{2} + a_H \right) p a_B + m_{H0} a_B + \varphi_B \dots \dots (2)$$

ただし、 $E$ ：軌条材料の弾性係数、 $I_w$ ：腹部の  $\delta x$  巾断片の軌条延長軸方向中立軸についての断面2次モーメントで  $z_0$  の間は一定であるとする、 $\varphi_B$ ：腹部と底部の接続点Bにおける撓み角。

(2)式を積分して撓みを求める。

$$y = \frac{p}{6 EI_w} z^3 - \frac{1}{2 EI_w} \left[ (z_0 + a_B + a_H) p + m_{H0} \right] z^2 + \left\{ \frac{a_B}{EI_w} \left[ \left( z_0 + \frac{a_B}{2} + a_H \right) p + m_{H0} \right] - \varphi_B \right\} z$$

図-1



$$+y_B - \frac{a_B^2}{6EI_w}(a_B + 3z_0 + 3a_H)p - \frac{a_B^2}{2EI_w}m_{H0} - a_B\varphi_B \dots\dots\dots(3)$$

腹部と頭部の接続点 H における撓み角  $\varphi_H$  と撓み  $y_H$  は (2) (3) 式において  $z = a_B + z_0$  と置くことにより求められる。

$$\varphi_H = \frac{z_0}{EI_w} \left[ -\left(\frac{z_0}{2} + a_H\right)p - m_{H0} \right] + \varphi_B \dots\dots(4)$$

$$y_H = -\left(2z_0 + 3a_H\right) \frac{z_0^2}{6EI_w} p - \frac{z_0^2}{2EI_w} m_{H0} + z_0\varphi_B + y_B \dots\dots\dots(5)$$

次に、頭部の横変位  $y_{H0}$  と腹部の関係を見る。腹部は軌条延長軸方向に連続的に頭部を支承していることになるから、頭部横変位の 4 次の微係数は支承反力、すなわちこの場合の腹部に加わる横力  $p$  に比例することになり次式が成立つ。

$$\frac{d^4 y_{H0}}{dx^4} = \frac{p}{EI_H \delta x} \dots\dots\dots(6)$$

ただし、 $I_H$ ：頭部の軌条断面对称軸についての断面 2 次モーメント。

頭部図心  $H0$  と腹部と頭部の接続点 H の横変位を近似的に等しいとすると (6) 式は次のようになる。

$$\frac{d^4 y_H}{dx^4} = \frac{p}{EI_H \delta x} \dots\dots\dots(7)$$

(7) 式と同様の関係が腹部と底部の間にも成立つ。すなわち

$$\frac{d^4 y_B}{dx^4} = -\frac{p}{EI_B \delta x} \dots\dots\dots(8)$$

ただし、 $I_B$ ：底部の軌条断面对称軸についての断面 2 次モーメント。

次に、頭部の内を軌条延長軸方向に伝わる偶力について考える。ある軌条断面において頭部は偶力  $M_{H0}$  とねじれ  $\varphi_H$  の間に次の関係を有している。

$$M_{H0} = C_H \frac{d\varphi_H}{dx} \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 $C_H$ ：頭部のねじり剛性。

またそれより  $\delta x$  へだたつた軌条断面においては、

$$M_{H0}' = \frac{dM_{H0}}{dx} \delta x + M_{H0} \dots\dots\dots(10)$$

(9) (10) 式より

$$M_{H0}' - M_{H0} = \frac{dM_{H0}}{dx} \delta x = C_H \frac{d^2\varphi_H}{dx^2} \delta x \dots\dots(11)$$

(11) 式の右辺は  $\delta x$  巾の間に残された偶力の差であるが、頭部に接続している腹部がそれを支えておりしかもその量は腹部が端モーメントとして受けている  $m_{H0}$  に等しいわけである。それ故

$$\frac{d^2\varphi_H}{dx^2} = \frac{m_{H0}}{C_H \delta x} \dots\dots\dots(12)$$

(12) 式と同様の関係は底部と腹部の間にも成立つ。すなわち、

$$\frac{d^2\varphi_B}{dx^2} = \frac{m_{B0}}{C_B \delta x} \dots\dots\dots(13)$$

ただし、 $C_B$ ：底部のねじり剛性。

なお、腹部両端モーメントの関係は (1) 式より、

$$m_{B0} = -\left[z_0 + a_B + a_H\right]p + m_{H0} \dots\dots\dots(14)$$

以上で、腹部両端におけるモーメント、撓み角、撓みをあらわす (14)(5)(4) 式、頭部、底部の横変位、ねじれをあらわす (7)(8)(12)(13) 式の合計 7 式が得られたが、これが  $\delta x$  の厚きをもつ軌条断片の平衡の基本式となるわけである。

3. 両端固定支持された軌条の中央頭部に荷重が加わつた場合の理論 この場合を解くにあたつては前節で述べた基本式、すなわち 7 個の式よりなる連立方程式の一般解に標題の条件にもとづく境界条件を入れればよい。しかし過程を簡略化するために近似的な方法を用いる。すなわち、本節の条件で扱う場合に、軌条のねじり中心の変位、ねじれは、断面変形を考慮しない場合と近似的には一致するものだとする。断面変形を考慮しない場合のねじれの一般式はかつて筆者が説明したように<sup>2)</sup> 次のようになる。

$$\varphi = \frac{C_1}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{C_2}{\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{M_T}{C} x + C_3 \dots\dots\dots(15)$$

ただし、 $\alpha = [C(I_H + I_B)/Eh^2 I_H I_B]^{1/2}$ 、 $h = a_H + z_0$

$+ a_B$ 、 $\varphi$ ：ねじれ角 rad、 $x$ ：軌条延長軸方向座標、

$M_T$ ：軌条内を伝わるねじりモーメント、 $C_1, C_2,$

$C_3$ ：積分常数、 $C$ ：軌条のねじり剛性

本節の場合は図-2 のような条件をあらわしているのだが境界条件は、 $x=0$  で  $(d\varphi/dx)=0$ 、 $x=l$  で、 $\varphi = (d\varphi/dx)=0$ 、また  $M_T = (M/2)$  となり、これらを (15) 式に適用すると、

$$\varphi = \frac{-M}{4C\alpha \sinh \alpha l} \left\{ (1 - e^{-\alpha l})e^{\alpha x} - (1 - e^{\alpha l})e^{-\alpha x} - 2\alpha x \sinh \alpha l + [e^{\alpha l}(\alpha l - 1) + e^{-\alpha l}(-1 - \alpha l) + 2] \right\} \dots\dots\dots(16)$$

ねじり中心の撓みについては、

$$y = \frac{P_y l^3}{2EI_y} \left( \frac{4x^2}{l^2} - \frac{x^3}{6l^3} \right) \dots\dots\dots(17)$$

$$z = \frac{P_z l^3}{2EI_z} \left( \frac{4x^2}{l^2} - \frac{x^3}{6l^3} \right) \dots\dots\dots(18)$$

ただし、 $I_{y,z}$ ：軌条断面のその対称軸、その直交中立軸についての断面 2 次モーメント、 $z, y$ ：軌条断面内の対称軸方向、その直交軸方向の撓み。

$y, \varphi$  と  $y_{H,B}, \varphi_{H,B}$  との間には次の関係が近似的に成立つとする。

$$y = \frac{I_B}{I_H + I_B} y_B + \frac{I_H}{I_H + I_B} y_H \dots\dots\dots (19)$$

$$\varphi = \frac{I_B}{I_H + I_B} \varphi_B + \frac{I_H}{I_H + I_B} \varphi_H \dots\dots\dots (20)$$

(19)(20) 式を用いて前節各式より  $\varphi_B, y_B$  を消去する。(4) 式より、

$$\varphi_H + A_1 p + A_2 m_{H0} = F_1(x) \dots\dots\dots (21)$$

(5) 式より、

$$\varphi_H + A_3 y_H + A_4 p + A_5 m_{H0} = F_2(x) \dots\dots\dots (22)$$

(7)(12) 式を再記する。

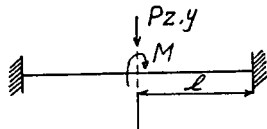
$$y_H^{(4)} = A_6 p \dots\dots\dots (23)$$

$$\varphi_H^{(2)} = A_7 m_{H0} \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 $A_1 = [z_0(z_0 + 2\alpha_H)]/4EI_w$ ,  $A_2 = (z_0/2EI_w)$ ,  $A_3 = [(I_H + I_B)z_0I_H]$ ,  $A_4 = [I_B z_0(2z_0 + 3\alpha_H)]/6EI_w I_H$ ,  $A_5 = (I_B z_0/2EI_w I_H)$ ,  $A_6 = (1/EI_H \delta x)$ ,  $A_7 = (1/C_H \delta x)$ ,  $F_1(x) = [(I_H + I_B)\varphi/2I_B]$ ,  $F_2(x) = [(I_H + I_B)(z_0\varphi + y)/z_0 I_H]$

(21)~(24) 式が本節の標題に示す状態における基本式である。前節では基本式として7個が必要であつたものを、近似的な考えを導入して本節では4個の非齊次常微分方程式としたわけである。

図-2



4. 軌条底面がその横変位、回転に対して弾性的に支持されている場合の理論 この場合はあたかも枕木に支持されている軌条部分の状態にあたるわけであるが、II-2 で得た各式の一部を変更しなくてはならない。軌条底部の横変位をあらわす(8)式には、次のように横変位に比例する支承体反力の項を加える。

$$\frac{d^4 y_B}{dx^4} = -\frac{1}{EI_B \delta x} (p + K_1 y_B) \dots\dots\dots (25)$$

ただし、 $K_1$ : 軌条支承体横変位と横反力間の比例常数。

また軌条底部の回転、すなわちねじれをあらわす(13)式には、次のように回転に比例する支承体反偶力の項を加えなくてはならない。

$$\frac{d^2 \varphi_B}{dx^2} = \frac{1}{C_B \delta x} (m_{B0} + K_2 \varphi_B - K_1 y_B \alpha_0) \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 $K_2$ : 軌条支承体回転と反偶力間の比例常数。上式括弧内第3項は軌条底下面に加わる横反力によつて軌条底部図心に作用する偶力成分をあらわしており、他の項に較べると無視し得る大きさとなるかも知れない。II-2 の7個の基本式の内(8)(13)式を(25)

(26) 式に交替させると本節標題の場合の基本式となるわけである。 $K_1, K_2$  は枕木などの軌条支承体の特性として求められるものである。

5. 軌条底面が固定支持されている場合の理論 軌条が一般の枕木に支持されていても近似的には固定支持と考えてよい場合が有り得る。特に、コンクリート枕木、固定道床が使用されている場合はその傾向が強いと見てよいだろう。

この場合は軌条底不動と見られるから(4)(5)式において、 $\varphi_B = y_B = 0$  と置き次のように書きかえることができる。

$$\varphi_H = \frac{1}{EI_w} \left[ -\left(\frac{z_0}{2} + \alpha_H\right) z_0 p - m_{H0} z_0 \right] \dots\dots\dots (28)$$

$$y_H = -\left(2z_0 + 3\alpha_H\right) \frac{z_0^2}{6EI_w} p - \frac{z_0^2}{2EI_w} m_{H0} \dots\dots\dots (29)$$

上の2式と(7)(12)式の4個の式が本節標題の場合の基本式となるわけである。

以上数節にわたつて理論誘導を試みた。II-3 におけるものは、室内実験によつて理論の適否を検討するのに用いるものである。もし理論誘導の基礎となる考え方の適性がそれによつて確かめられたならば、同じ考え方から出発した他の各節の妥当性も裏づけられる。

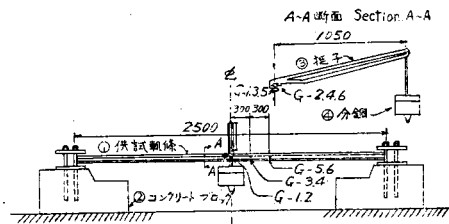
### III 実験

II-3 と同じ条件で室内実験を行つて誘導した理論を検討し、また試験軌道の敷設軌条において腹部応力の状況を観察したのでそれらを説明する。

1. 室内実験 長さ2.5mの軌条両端をコンクリート・ブロックにボルトで礎着しておき、その中央頭部に偶力と垂直または水平横荷重を加え、その際に荷重点近辺の腹部に生ずる応力を抵抗線歪計<sup>3)</sup>を用いて静的に測定した。第1回実験では偶力と垂直荷重を加え、第2回実験では偶力と水平横荷重を加えたが、前者の装置の概要は図-3のとおりで、荷重としては5~20kgの分銅を用いた。図中G-1...は歪計番号と

図-3 室内実験装置 (第1回実験)

Equipments of Indoor Experiments. (First Experiment)

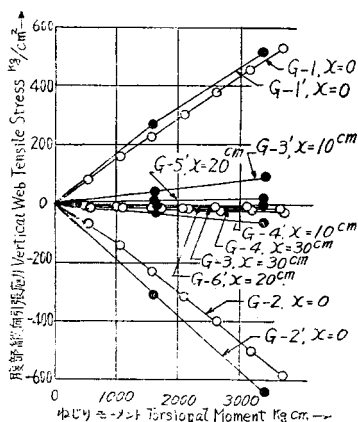


その貼付位置を示している。後者の場合は垂直に立つ長さ約 70 cm の挺子とそれに続いて水平に張られたロープを介してヒッパラーによつて荷重を加えた。その大きさは張力計によつて読み取つた。軌条は 9 kg 軌条を用い、その両端は一度山型鋼の短片に溶接し、それを 30 mm 厚の鋼板で挟んだ上で 30 ϕ アンカーボルト各 4 本でコンクリート・ブロックに錠着した。

以上のような方法で行つた実験の結果は図-4 のとおりである。

図-4 室内実験における、ねじりモーメント-腹部縦向応力曲線

Torsional Moment-Vertical Web Stress, in Indoor Experiments.



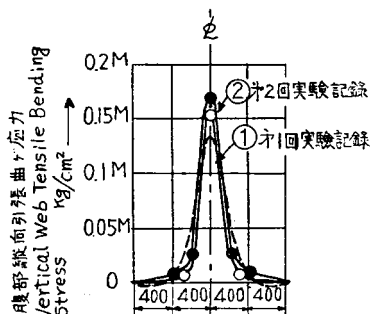
G-1 ~ G-4 : 第 1 回実験記録 (Records of 1st Experiment)

G-1' ~ G-6' : 第 2 回実験記録 (Records of 2nd Experiment)

x : 荷重点, 測点間距離 (Distance between Loading Point and Gage Point)

本図でわかるように各点の応力は、荷重の小さな間はやや曲線であるが全体的には大体直線的に荷重とともに変化する。G-5,6 はほとんど応力 0 であつたので図示しなかつた。歪計番号の 1 と 2, 3 と 4, 5 と 6 は各同一軌条断面の腹部両側に位置しているから各の差からは曲げモーメントに比例する値を、また平均値からは垂直圧力に比例する値を求めることができる。それにもとづいて分布図を画いたのが図-5 である。同図の破線は II-3 における理論より計算にて求めた曲線だが、大体傾向的には実験結果と一致していることがわかる。軌条断面が規格品でありながら対称ではなかつたこと、装置特に荷重を加える部分が必ずしも完全でなかつたことなどが、両者の完全な一致を妨げたのではないかと考える。いずれにせよ、腹部応力の分布は非常に狭い部分に限られていることは疑う余地がない。

図-5 室内実験における荷重点近辺腹部縦向曲げ応力分布図  
Distributions of Vertical Web Bending Stress Near Loading Point, in Indoor Experiments.



① Records of 1st Experiment

② Records of 2nd Experiment

M : ねじりモーメント Torsional Moment kg-cm

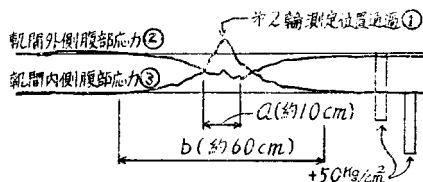
破線 : 計算値

Broken Line : Calculated Value

2. 野外実験 軌間 1 067 mm, 10% 下り勾配, 直線, 25 kg 軌条使用の試験軌道において軌距 1 070 mm 輪径 370 mm の 4 輪台車を若干の速度段階で走行せしめ、その間軌条の一定断面の腹部などで活荷重応力を測定した。一定断面としては支間 144 cm の枕木間隔中央と支間平均 72 cm の枕木直上とをえらんだ。歪計は抵抗線歪計を用い<sup>3)</sup>、軌条腹部の中央に貼り記録は電磁オシログラフに自記させた<sup>4)</sup>。オシログラム代表例の第 2 車輪通過時の部分をトレースしたものが図-6, 7 である。

図-6 野外実験におけるオシログラム代表例のトレース (a. 測定位置が枕木間隔中央の場合)

Trace of Typical Record of Oscillogram in Field Test. (a. Gage Location—Center of Tie Space.)



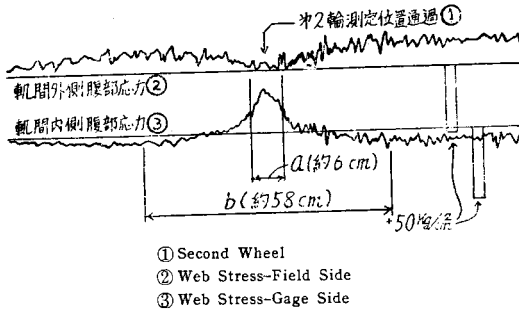
① Second Wheel

② Web Stress-Field Side

③ Web Stress-Gage Side

図-3, 7 において観察の結果共通して見られることは、測定位置を車輪が通過する前後に、軌間内外両側に、絶対値はほぼ等しく方向相反する応力を生ずる区間  $b$  が存在すること。またごく短小区間には相反する方向の応力に重なつてもに圧縮方向の応力を生ずる区

図-7 野外実験におけるオシログラム代表例のトレース (b.測定位置が枕木直上の場合)  
Trace of Typical Record of Oscillogram in Field Test.  
(b. Gage Location—On Tie)



間  $a$  の存在することである。 $a$  区間は約 60 cm,  $b$  区間は約 6~10 cm であった。枕木間隔中央におけるこのような性質の存在は、かつて筆者が測定結果を報告した<sup>5)</sup>が枕木直上においても存在することが今回判明した。一方枕木直上の測定結果が枕木間隔中央部のそれと異なる点を図-6.7 より求めると、前者には  $a, b$  両区間が存在すること以外にさらに長い区間にわたって一つの応力の波が存在していることである。すなわち軌間外側については圧縮応力として、また内側においてはわずかながらも引張応力として存在している<sup>6)</sup>。このことは今後検討を要する。上述の  $b$  区間が腹部に曲げの生じている状態をあらわしているのだが、前章で取扱った腹部応力はこの区間の問題に対応するわけである。なお、台車は 0.4~3.8 m/sec の速度で走行したが、車輪通過時の応力値はその間ほとんど変動しなかつた。

以上の実験作業は本年 1~3 月に行つた。

IV 結 言

横枕木としての敷設軌条に今回の理論を簡単な形で適用すること、隅角部応力の概算、腹部垂直圧力にもとづく応力についての理論などは今回はふれなかつたが今後検討を要する点であろう。

本作業を行うにあたり終始沼田教授の御指導御援助をおおいだ。室内実験のための器具その他について国有鉄道星野技師より、野外試験を行うにあたり運輸省高橋憲雄技官より多大の便宜を計つていただいた。実験作業について東京大学の中島義明君、当時の在學生天野礼二君、建部恒彦君にお世話になつた。ここに深甚の謝意を表する次第である。なお本作業に要した費用の一部は文部省科学研究費によつたことを附記する。

脚 註

- 1) 八十島義之助：敷設レールの局部応力について、第7回年次学術講演会講演概要：1951年5月、土木学会
- 2) 八十島義之助：レールのねじれの理論について、土木学会誌、35 卷 11 号、昭 25-11
- 3) 標点距離 9 mm 紙ベースのを用いる。発振、増巾等は共和無線研究所製 DM 式を用いる。
- 4) 歪計は標点距離 20 mm であるほか 3) と同じ、なおオシログラムは三栄測機株式会社製のものを用いる。
- 5) 八十島義之助他：敷設レールの活荷重応力について、土木学会誌、35 卷 9 号、昭 25-9
- 6) 東京急行株式会社所轄の営業線路において昭和 27 年 12 月に測定した際も枕木直上軌条腹部に、この影響範囲の広い応力分布があらわれた。

(昭.28.7.24)

電話 増 設 について

12月1日より学会に新電話が増設されましたので、徒来電話と合わせて御利用下さるようお願いいたします。新電話 和田倉 (20) 4078 番、徒来電話 和田倉 (20) 3945 番

ダムに関する文献の残部について

サベージ博士寄贈のダムに関する文献の頒布は、ほぼ完了いたしました。なお次の点数が少しづつ残部がありますので、御希望の方は至急学会あて定価、送料をつけて御申込下さい。

Trial-Load Analysis of Stress Condition in Ross Dam raised to a top elevation	75	円
Foundation Bearing Tests at Davis Dam	55	円
Treatise on Dams, chapter 9, Gravity Dams	440	円
Treatise on Dams, 1, Compendium	370	円
Treatise on Dams, chapter 4, Basic Consideration	370	円
Treatise on Dams, chapter 12, Spillways	260	円
Treatise on Dams, chapter 13, Outlet Works	260	円
Determination of Stress from Measurements in concrete Dams	85	円
Seismic Stability of Earth Dam	130	円