

工学材料の模型解析

正員 樋口 芳朗*

ON THE MODEL ANALYSIS OF ENGINEERING MATERIALS

(JSCE Sept. 1953)

Yoshirō Higuchi, C. E. Member

Synopsis It is useful to represent the engineering materials with the combination of mechanical model units and to explain the stress-strain relation. In this paper, a brief historical review of this field was developed, and its future prospect was considered. As the applications of this model analysis, the non-destructive test for the estimation of the strength of concrete, and the analysis of the transverse resonance of a member made of materials of simplified Bürger's model, were described.

要旨 工学材料を力学的模型単位の組合せで代表させその応力歪関係の特性を調べることは有用な工学の一分野であるが、本文はこの模型解析の歴史を概述するとともに、模型解析の見地からすれば取扱いの容易な工学上の問題の多いことを指摘し、応用例として模型解析によるコンクリートの強度の判定につき述べ、最後に一般工学書に採用されている Kelvin の模型より一步進んだ Bürger の模型をもととして部材の撓み共鳴振動を論じたものである。

1. 模型解析の意義

弾性限界内においては応力歪間に直線的の関係が成立つが、非弾性領域において一体どのような関係が成立つかといえば、降伏、歪硬化、クリープ、Bauschinger 効果、弾性余効、ヒステレシス、等によつて代表される複雑な現象が出てきて、一見各材料によつて異なる力学が樹立されるようにも思われるし、また系統的にこれ等の現象を説明することは容易でないようと思われる。しかし、模型解析、すなわち 3 つの力学的模型単位——バネ、ピストン、マサ——の組合せとして工学材料を考えれば、多くの非弾性領域の現象の解釈が容易となる¹⁾。従来、模型解析の方法が古典的なものであるとみなされてきたきらいのあつたことは全く不当なことであつて、現代のすぐれた科学者であり技術者である Freudenthal²⁾ や Eyring & Halsey³⁾ は、模型解析が、非弾性変形の分子的及び原子的機構究明にあたり応力歪の関係より有効なことがしばしばあると指摘している。

2. 模型解析の過去と将来

模型解析の歴史は、もちろん完全弾性体の模型として提唱された Hooke の模型に始まる。その後、本節で述べるように多くの人が独自の模型を提唱し、各相当の貢献をしてきたが、Prandtl⁴⁾ や Eyring &

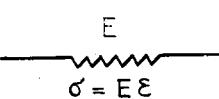
Halsey⁵⁾ により提唱された双曲函数模型を数学的解析の困難を理由として除外すれば、すべて、完全弾性体のバネ（図-1）、完全粘性体のピストン（図-2）、完全塑性体の固体マサ（図-3）の 3 つの組合せから成立つているのに気がつく。

次に創始者の名前を冠せられた有名な模型を列挙しておこう（完全弾性体のバネが Hooke の模型と呼ばれ、完全粘性体のピストンが Newton の模型と呼ばれるのは周知の事実である）。

Maxwell の模型（図-4）：これは本質的に流体である。

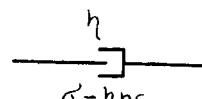
Kelvin の模型（図-5）：往々にして Voigt の模型とよばれるが、歴史的にみると Kelvin の方がさきに提唱している⁶⁾。時間的のずれはあるが、荷重をかけるとある一定値で変形は停止し、荷重をと

図-1 Hook の模型



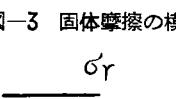
$$\sigma = E \varepsilon$$

図-2 Newton の模型



$$\eta = h p e$$

図-3 固体摩擦の模型



$$\sigma < \sigma_r, \dots, \varepsilon = 0$$

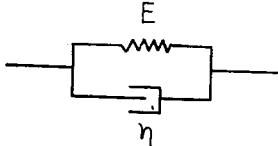
$$\sigma = \sigma_r, \dots, \varepsilon: \text{不定}$$

σ_r ：限界固体摩擦常数

図-4 Maxwell の模型



図-5 Kelvin の模型



* 日本国鉄道、鉄道技術研究所

ると載荷前の状態にかえる。

Bürger の模型 (図-6)¹⁾: Bürger はバネとピストンの組合せを示したが、その代表的なものは図-6 に示した、Maxwell の模型と Voigt の模型を直列に結んだものである。この Bürger の模型によれば、大槻の工学材料の粘性変形が明快に説明される。

Saint Venant の模型 (図-7)²⁾: これは、完全弾性体のバネと完全塑性体の固体マサツを直列に結んだものである。

Jenkin の模型 (図-8)³⁾: Saint Venant の模型をいくつか並列に結んだものである。これによれば Bauschinger 効果、歪硬化等の現象が明快に説明できる。

Reiner の模型 (図-9)³⁾: 歪硬化の現象を説明するために、だんだん小さくなる固体マサツをゆるい糸で結んだものである。このゆるい糸は、Reiner のいうところによると W. Fuchs の示唆によるものであり大きな利点を持つというが、こんなものを導入しなくとも、Jenkin の模型で十分歪硬化の説明は行える。

Drucker の模型 (図-10)⁴⁾: これは図-10 に示したとおり、バネと固体マサツを直列 (Saint Venant の模型) または並列に結んだものと同じである。Drucker は固体マサツの値が変化するとしたが、これは Reiner や Jenkin のように多くの模型を並列に結んで考えた方がわかりやすいと思われる。

図-6 Bürger の模型

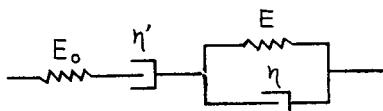


図-7 Saint Venant の模型

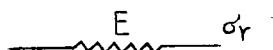


図-8 一般化された Jenkin の模型

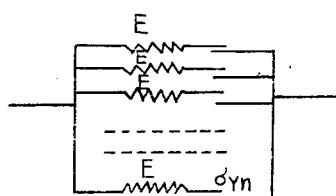
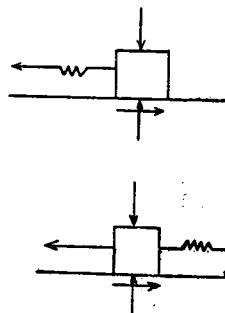


図-9 Reiner の模型



図-10 Drucker の模型



以上で双曲函数模型を除いた模型解析の歴史を概観したが、以下においてこの模型解析が将来どのような方面に発展すべきか、またどのような方面に応用され得るべきかということを考えてみよう。

まず最初に考えられるのは、ある工学材料を形成する模型単位の常数を知ることにより、その工学材料の性質を判定することである。現在この方面的研究はあまり進んでいないようであるが、非破壊試験によって工学材料の性質を判定するというようなことを組織的に行うには、このことが非常に重要となろう。応用例として次節にあげた模型解析によるコンクリート強度の判定は、Kelvin の模型をもととしていること等に不満は残るが、この方面的研究が成果を生む可能性を持つということを明らかにしていると思われる。

次に考えられるのは、適切な模型をえらぶことにより工学現象を矛盾なく説明することである。例えば、ある工学材料をある模型で代表させた場合、その模型を構成する各模型単位の常数は、供試体の寸法や荷重速度等によって変化するものであつてはならない。しかるに現在の振動工学書が粘弹性体の模型として採用している Kelvin の模型をもととし、振動現象から弾性係数（バネ常数に関連）と対数減衰率（バネ常数とピストン常数に関連）を求めるとき、これらが供試体の寸法や固有振動数（荷重速度ともいいうる）によって変化するという不愉快な現象に逢着する。この矛盾はかつて篠田氏⁵⁾も示唆されたように、もととした模型が不適当であつたということに帰着させるのが最もすらが通つていると判断される。この間の事情は Kelvin の模型をもつて代表させるべき工学材料を Hooke の模型で代表させたときにおこる矛盾を考えれば明らかとなる。この場合、常数なるべき Hooke の模型のバネ常数は荷重速度の増加につれて増大するであろう。応用例として次節にあげた Bürger の模型をもととした部材の撓み共鳴振動の解析は、Kelvin の模型をもととしたために生ずる矛盾から脱却する過程として行

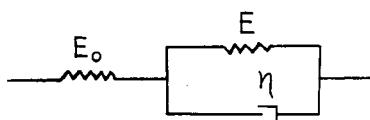
つたものであるが、単に数学的解析の展示にとどめた。Kelvin の模型から Bürger の模型に移つただけで解析はやや困難となり、共鳴曲線から各模型単位の常数を求めることが相当困難となる。この方面的研究が有効であることが明らかとなつた場合は、電気的な相似回路¹⁾⁶⁾を本格的に検討し、常数の算定を容易ならしめるべきである。

3. 応用例

模型解析が非弾性変形の説明に非常に有効なことはここでは多くの文献に見られるということを指摘するにとどめ、次に模型解析による工学材料の性質判定例としてコンクリートの強度判定への応用、及び Bürger の模型をもととした場合の部材の撓み共鳴振動解析につき述べる。

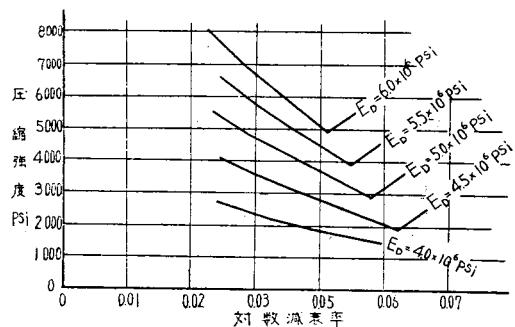
(1) 模型解析によるコンクリート強度の判定¹⁾¹⁾ コンクリートのような粘弹性体の振動現象を取扱う場合少なくとも Bürger の模型を簡単化した図-11 のような模型をもととして考えるべきであると思われる

図-11 簡単化された Bürger の模型



が、ここでは従来どおり、Kelvin の模型をとつて考えることにする。振動波動利用の非破壊試験法によりコンクリートの強度を判定することはこれまでにも行われてきたが⁹⁾、このような場合、バネ常数に相当する動的弾性係数だけを測定して判定を行うのは片手落ちで、ピストン常数に相当する粘性係数、あるいはバネ常数とピストン常数に関係する対数減衰率をも測定することは有意義と思われる。筆者はさきに動的弾性係数だけから強度を推定した場合の大きな誤差を減少するため、水セメント比をパラメーターとした実験式を提唱したが¹⁰⁾、硬化後測定の不可能な水セメント比をパラメーターに導入することの不利は明らかであるので、模型解析の考え方からもすぢのとおつている対数減衰率でおきかえられないかどうかということを検討してみた。コンクリートの配合はセメント量を 1 yd³あたり 672, 566, 461 lbs の 3 種、水量を 1 yd³あたり 314, 300, 282 lbs の 3 種、粗細骨材比を 1.65, 1.45, 1.25 の 3 種、水セメント比を 0.42 から 0.62 までの 9 種類とし、主として普通ボルトランドセメントと普通の骨材を使用し、いろいろの養生状態および乾湿状態のもとで試験を行つた結果 図-12 に示すよろ、動的弾性係数と対数減衰率から強度を判定する図を得た（供試体はすべて直径 6" 高さ 12" の標

図-12 コンクリートの圧縮強度と動的弾性係数及び対数減衰率との関係

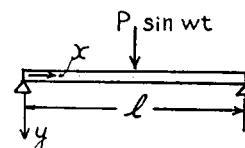


準供試体で、強度は圧縮強度を求めた）。図-12 は筆者の試験した約 500 個の供試体に対し、例外的に誤差の大きい場合をも含め 20% 以内の誤差で、配合、養生条件、乾湿状態のいかんにかかわらず成立した。なお、Kelvin の模型をとつたことからおこる不合理として、同一のコンクリートでも寸法、形状がちがえば動的弾性係数や対数減衰率が変化するという現象も、実験によりたしかめられた。前部の後半で指摘したように Bürger の模型（または図-11 に示した簡単化された Bürger の模型）をとることによりこの不合理は軽減されると思われるが、この方面的研究は今後の発展にまたなければならない。

(2) 簡単化された Bürger の模型をもととした部材の撓み共鳴振動 さきに述べたように、Kelvin の模型を一步進めて簡単化された Bürger の模型をとることにより解決される工学上の問題は少くないと思われるが、以下に簡単化された Bürger の模型をもととした部材の撓み共鳴振動を解析してみる。

図-13 に示すような部材の強制撓み振動に対する微分方程式は次に示すとおりである。

図-13 ハリの強制撓み振動



$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \frac{2P}{l} \sin \omega t \sum_{K=1}^{\infty} \sin \frac{K\pi}{2} \sin \frac{K\pi x}{l}$$

ここに ρ : 密度

y : 撓み

I : 中立軸に対する断面の慣性モーメント

z : 部材軸にそつた座標

$P \sin \omega t$: 部材中央に作用する垂直方向の強制周期力

l : 部材のスパン E : Hooke の模型(図-1)をもととする場合…… E Kelvin の模型(図-5)をもととする場合…… $E + \eta \frac{\partial}{\partial t}$ 簡単化された Bürger の模型¹⁷⁾(図-11)をもととする場合……

$$\frac{E_0}{E_0 + E} \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E}{\eta}}{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E_0 + E}{\eta}}$$

簡単のために $\frac{\partial}{\partial t} = p$, $\frac{E}{\eta} = \beta$, $\frac{E_0 + E}{\eta} = \alpha$ とおき、まず最初は右辺の $K = K$ に相当する y を y_K としてこれだけを考えれば

$$p \frac{\partial^2 y_K}{\partial t^2} + \frac{p + \beta}{p + \alpha} E_0 I \frac{\partial^4 y_K}{\partial x^4} = \frac{2 P}{l} \sin \omega t \cdot \sin \frac{K\pi x}{l}$$

$$\frac{K\pi}{2} \sin \frac{K\pi x}{l}$$

この微分方程式を解けば(自由振動の項は除外する)

$$y_K = \frac{1}{p} \frac{2 P}{l} \frac{1}{X_K^2 + Y_K^2} \sin \frac{K\pi}{2} \sin \frac{K\pi x}{l} (X_K \sin \omega t - Y_K \cos \omega t)$$

ここに

$$X_K = -\omega^2 + \frac{E_0 I}{p} \left(\frac{K\pi}{l} \right)^4 - \frac{E_0 I}{p} \left(\frac{K\pi}{l} \right)^4 \frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \alpha$$

$$Y_K = \frac{E_0 I}{p} \frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{K\pi}{l} \right)^4 \omega$$

$$\text{よつて } y_{K,x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{p} \frac{2 P}{l} \frac{1}{X_K^2 + Y_K^2} \sin^2 \frac{K\pi}{2} (X_K \sin \omega t - Y_K \cos \omega t)$$

いま考えている微分方程式は線型であるから

$$y_{x=\frac{l}{2}} = \sum_{K=1}^{\infty} y_K, z=\frac{l}{2} = \frac{1}{p} \frac{2 P}{l} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{X_K^2 + Y_K^2} \sin^2 \frac{K\pi}{2} (X_K \sin \omega t - Y_K \cos \omega t)$$

$$= \frac{1}{p} \frac{2 P}{l} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{K\pi}{2}}{\sqrt{X_K^2 + Y_K^2}} \sin \left(\omega t + \tan^{-1} \frac{Y_K}{X_K} \right)$$

よつて

$$\max y_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{p} \frac{2 P}{l} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{K\pi}{2}}{\sqrt{X_K^2 + Y_K^2}}$$

右辺は K の増大につれて急速に収斂するから第1項だけをとることにすると

$$\max y_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{p} \frac{2 P}{l}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left\{ -\omega^2 + \frac{E_0 I}{p} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{\omega^2 + \alpha \beta}{\alpha^2 + \omega^2} \right\}^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left\{ \frac{E_0 I}{p} \frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \omega \right\}^2}}$$

これがいわゆる共鳴曲線としてあらわれるものであるが、以下に検算を行つてみる。

 $\omega = 0$ の場合(静荷重の働く場合でダッシュ ポットの影響はなくなる)

$$\max y_{x=\frac{l}{2}} = \frac{P l^3}{\frac{\pi^4}{2} I} = \frac{1}{\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E}}$$

 $\frac{1}{\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E}}$ はバネ常数が E_0 および E である 2つのバネを直列に結んだ場合の換算バネ常数であるからこれを E_r とすれば

$$\max y_{x=\frac{l}{2}} = \frac{P l^3}{\frac{\pi^4}{2} E_r I} = \frac{P l^3}{48.73 E_r I}$$

これはよく知られた正確な値 $\frac{P l^3}{48 E_r I}$ と 2% 以内の誤差で一致する。 $\omega = \infty$ の場合

$$\max y_{x=\frac{l}{2}} = 0 \quad \text{これは当然である。}$$

 $\eta = 0$ の場合(完全弾性体の場合) $\alpha, \beta \rightarrow \infty$

$$\beta/\alpha = \frac{E}{E_0 + E} \quad \text{となるから}$$

$$\max y_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\frac{1}{\rho} \frac{2 P}{l}} + \frac{1}{\frac{P l^3}{\frac{\pi^4}{2} E_r I}}} ;$$

$$E_r = \frac{1}{\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E}}$$

共鳴のおこる角振動数は $\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E_r I}{p}}$ となり

自由支持の部材の基本固有角振動数の周知の式と一致する。

 $E_0 = \infty$ の場合(周知の Kelvin の模型をもととした場合になる)

$$\alpha \rightarrow \infty$$

$$\frac{E_0 I}{\rho \alpha} \rightarrow \frac{I \eta}{\rho} \text{ となるから,}$$

$$\max_{y=x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{\rho} \frac{2P}{l} \frac{1}{\sqrt{\left\{-\omega^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{I \eta}{\rho} \frac{E}{\eta}\right\}^2 + \left\{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \omega \frac{I \eta}{\rho}\right\}^2}} = \delta_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\eta \omega}{E}\right)^2}}$$

ここに

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

$$\delta_{st} = \frac{\frac{1}{\rho} \frac{2P}{l}}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{IE}{\rho}} = \frac{Pl^3}{48.73 EI}$$

これは振動工学書にあげてある周知の公式と 2% 以内の誤差で一致する。

参考文献

- 1) First report on viscosity and plasticity, Amsterdam 1953
- 2) A. Freudenthal: The inelastic behavior of engineering materials and structures, Wiley 1950
- 3) M. Reiner: Deformation and flow, London

1949

- 4) High-polymer physics, Remsen 1948
- 5) C. Jenkin : Fatigue in metals, The Engineer 134, 1922
- 6) D.C. Drucker: stress-strain relation in the plastic range, 1950
- 7) 篠田仁吉: 粘弾性体としての土と雪, 鉄道業務研究資料 6巻 6,7号
- 8) J.P. Den Hartog: Mechanical Vibration 1940, p. 38
- 9) 高林利秋: 無破壊試験法, 鹿鳴社, 1948
- 10) 樋口芳朗: 音響学的測定法によるコンクリートの強度の判定, 土木学会誌 35-3, 1950
- 11) 筆者がイリノイ大学で 1952 年に行つた実験にもとづくもので詳細は 1953 年7月1日 ASTM 大会で発表の予定

(昭.28.5.13)

盛土の施工制御に対する考察

准員 赤井 浩一*

ON THE EXECUTION CONTROL OF FILL WORK

(JSCE Sept. 1953)

Kōichi Akai, C.E. Assoc. Member

Synopsis For the stability computation of so-called embankment type structure such as earth dam, levee and railway embankment, built on the soft foundation, it is necessary to have the comprehensive knowledge as to the rupture phenomena of earth foundation due to the consolidation of soft clay. In this paper, starting from the standpoint that the pore water pressure which has a dangerous effect to the stability of the foundation during or just after the fill construction must be eliminated by the adequate control of execution speed, a theoretical treatment is performed for the mechanism of the plastic flow of the foundation containing the pore water pressure whose distribution in respect of station and time has been cleared in the preceding paper. As the results, it has become clear that the above mechanism of the plastic flow during the consolidation process is a serious factor on the execution control of fill work.

要旨 軟弱な基礎地盤上に盛土を施工するにあたり工事の進捗とともに地盤内の間隙圧が増加して剪断強度に危険が予想されるようになると、一時工事を中止してこの間隙水が逃げ切れるだけの時間的余裕を与える

てから再び工事に着手することが好ましい。従来このような施工速度の制御に関してはきわめて経験的にしか取り扱われてこなかつたが、本文では間隙圧を有する軟弱地盤の塑性流動の機構を理論的に解明することにより、盛土の施工制御の意義とその実際的な方法とを明らかにするものである。

* 京都大学講師、工学部土木工学教室