

にて表わされるといわれている¹⁰⁾。著者は全領域に対して近似式として

$$\left. \begin{aligned} \text{上側ナップ} \quad \frac{z_1}{H} &= 1.316 \left(\frac{y}{H} + 0.467 \right)^{0.5853} \\ \text{下側ナップ} \quad \frac{z_2}{H} &= 1.309 \left(\frac{y}{H} \right)^{0.6074} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

なる式を導いた。

ナップ内の圧力は下の方でほとんど0になる。この断面でのナップの垂直高さ h_2 と、段落水流の静水圧分布をなす場所の水深 h_1 との間には、 $h_2/h_1 = 2 F_r / (1 + 2 F_r)$, ($F_r^2 = q^2 / gh_1^3$) なる関係が成立するといわれている⁶⁾。さらに Rouse は F_r 数によるナップの形状の変化を明らかにしているが^{7), 8)}, y/h_1 の値の小さい範囲に限られているので、ナップの到達距離の設計にはやや資料が少ない憾みがあつて今後の研究をまたねばならない。

8. むすび

本報告は昭和 27 年度文部省総合科学研究費による「水路床の水理学的性質に関する研究」の一部の中間報告であつて、終始御指導を賜わつている東大本間仁博士、東北大鷲尾鰲龍教授に厚く御礼申上げるとともに、実験に協力して戴いた東北大江間昭、学生高橋準

一、伊藤秀夫、沼田淳の諸君に深甚なる謝意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) 大坪喜久太郎：“段落箇所における流体運動” 河川, 昭.17. 7~11.
- 2) Hunter Rouse: Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers.
- 3) L. J. Tison: “Le Déversoir à seuil épais.” La Houille Blanche, Juillet-Aout 1950.
- 4) 岩崎敏夫：“射流の流体抵抗に関する一実験” 水理研究会, 昭.26. 3.
- 5) H. Rouse: Engineering Hydraulics. p.533.
- 6) H. Rouse: Discussion to “Energy Loss at the Base of a tree overfall. (Water L. Moore, Nov. 1941)”, ASCE. June. 1942.
- 7) H. Rouse: “Discharge Characteristics of the Free Overfall.” Civ. Eng., April 1936.
- 8) 今野彦貞：“溢流堰上の水深について” 土木学会誌第 25 巻第 4 号
- 9) Böss: “Berechnung der Abflussmengen und der Wasserspiegellage bei Abstürzen und Schwellen unter besonderer Berücksichtigung der dabei auftretenden Zusatzspannungen,” W. u. W., 1929.
- 10) 鷲尾鰲竜：“急流河川の施工について” 建設技術新書, 第 10 号

(昭.28.2.10)

UDC 532.546 : 532.517.4

遷移点を越えた非線型滲透流

正 員 工学博士 内 田 茂 男*

ON THE NON-LINEAR PERCOLATION AT HIGH REYNOLDS NUMBER

(JSCE June 1953)

Dr. Eng., Shigeo Uchida, C. E. Member

Synopsis The erosion of porous media has often been caused by the high velocity percolation near the singular point. When the Reynolds' number exceeds a critical value, a transition from viscous to turbulent state occurs. In the present paper, characteristics of such super-transition flows are investigated by solving the non-linear equations derived from a new percolation law. Exact solutions of the source of sink and the flow around a-corner of the flat plate are obtained through the general expressions of the solution. Results of the model experiments are also reported in comparison with the calculation.

要旨 侵蝕等において特に重要と考えられる高速滲透流の基礎として、乱流領域まで含んだレイノルズ数の広い範囲に適用できる抵抗法則の実験式を求めた。これを用いて高速滲透に対する非線型の微分方程式を導き、吸源や湧源及び平板の角をまわる流れについて解析を行い、高レイノルズ数滲透の特性を調べた。

1. 乱流領域をも含む滲透法則

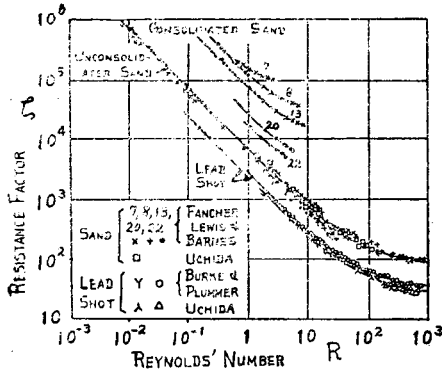
平均粒径 d_p の粒子よりなる滲透体の Δs なる長さ(その垂直成分 Δy) について圧力降下 Δp により、密度 ρ 、動粘性係数 ν なる液体が平均速度 U で滲透している場合を考える。レイノルズ数 $R = d_p U / \nu$ のほかに滲透流の抵抗係数 $\zeta = \Delta(p + \rho g y) / \Delta s \cdot 2 d_p / \rho U^2$ を定義する。層流状態では Darcy の法則が成立し、これは

$$R\zeta = G \dots\dots\dots(1)$$

* 東京大学講師, 工学部土木教室

で表われされる。常数 G は空隙率や粒子の形、直径の分布など粒子の集合状態に関する係数で、与えられた滲透体について容易に測定できる (図-1 参照)¹⁾、²⁾。

図-1 滲透抵抗係数と R 数の関係



レイノルズ数が増加してある臨界値 R_c を超えると、流れの性質が変化して層流法則から外れ、次第に、 $\zeta =$ 一定なる乱流抵抗法則に近づく傾向を示す。この性質を明らかにするため $R\zeta$ と R の関係を求めてみると図-2のごとくなる。乱流領域を直線で表わす Lindquist³⁾ の公式は層流状態から遷移領域附近を正しく表現しないので、これを改めて次のような実験式を導いた。

$$R\zeta/G = 1 - A + A\sqrt{1 + (R/R_c)^2} = \sigma \quad \dots\dots(2)$$

実験値から A, R_c を求めると表-1 及び 図-3 のごとくなり、ほぼ $A=0.20, R_c=1.0 \times 10^5 G^{-1}$ においてよさそうである。表の値で整理してみると 図-4 に示すごとく (2) 式は $R < 10^3$ の範囲で実験値によく

図-2 $R\zeta$ と R の関係

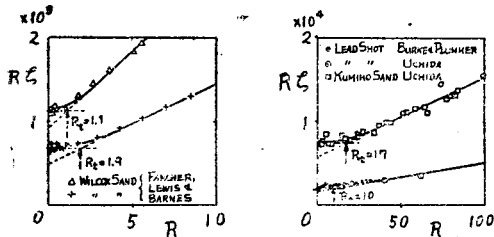


表-1 R_c, A と G の関係 (測定値)

試料	実験者	空隙率	G	A	R_c
鉛散弾	Lindquist		2.70×10^3	0.11	7
"	内田	0.294	2.05×10^3	0.17	10
九味浦砂	内田	0.355	7.5×10^3	0.21	17
Woodbine "	Fancher	0.269	2.4×10^4	0.19	1.8
Wilcox "	Lewis	0.163	6.8×10^4	0.26	1.9
"	and	0.159	1.12×10^5	0.18	1.1
Woodbine "	Barnes	0.197	1.16×10^5	0.29	0.6

図-3 R_c, A と G の関係

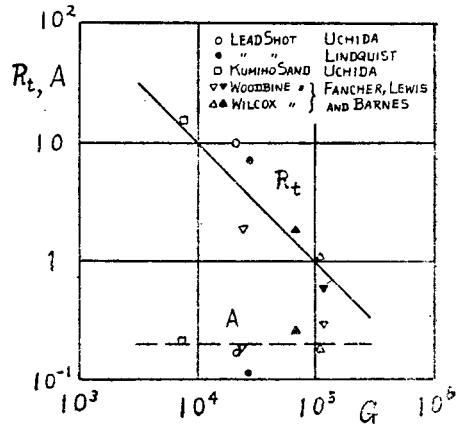
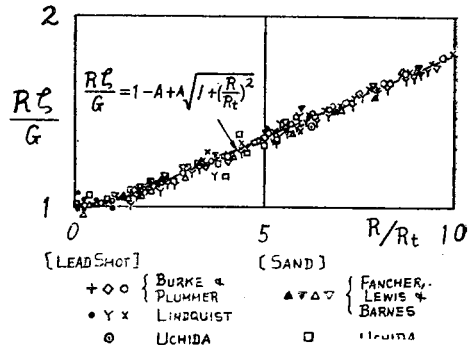


図-4 抵抗法則の実験式と測定値



く合っている。

線型 (層流) 及び非線型 (乱流) 滲透流における有効透水係数をそれぞれ κ_L 及び κ_T とおくと、(2) 式から

$$\kappa_T = \kappa_L / \{1 - A + A\sqrt{1 + (R/R_c)^2}\} \quad \dots\dots(3)$$

2. 基礎の方程式

速度ベクトルを $V(v, u)$ とすると滲透法則は

$$V = -\kappa_T \text{grad}(p/\rho g + y) \quad \dots\dots(4)$$

で表わされるから、層流状態の場合と同じポテンシャル $\phi = \kappa_L(p/\rho g + y)$ を導入すると、(4) は

$$V = -(1/\sigma) \text{grad} \phi \quad \dots\dots(5)$$

となり、一般化された滲透流の運動方程式を与える。

非圧縮流体の 2 次元運動を考えると、連続方程式

$\text{div} V = 0$ から流れの函数 ψ が導入され、結局

$$\left. \begin{aligned} u &= -(1/\sigma) \partial \phi / \partial x = -\partial \psi / \partial y \\ v &= -(1/\sigma) \partial \phi / \partial y = \partial \psi / \partial x \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(6)$$

ただし、 $\sigma = 1 - A + A\sqrt{1 + (q/q_c)^2}$ 、 $q = \sqrt{u^2 + v^2}$

$$\dots\dots(7)$$

3. ホドグラフ変換⁴⁾⁻⁹⁾

σ が q のみの函数で表わされるから、 q, θ [ただし、 $\theta = \tan^{-1}(v/u)$] を独立変数にとつて (6) を線型

化することができる。

$$u = q \cos \theta, \quad v = q \sin \theta \dots\dots\dots(8)$$

と (6) から dx, dy を求めると、複素函数 $z = x + iy$ は

$$dz = -(1/q)e^{i\theta} (d\phi/\sigma + i d\psi) \dots\dots\dots(9)$$

$\partial^2 z / \partial q \partial \theta = \partial^2 z / \partial \theta \partial q$ に代入して計算すると

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = -q \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{\sigma q} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{q}{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial q} \dots\dots\dots(10)$$

新変数: $t = \text{integ}(\sigma/q) dq$, を導入すると (10) は

$$\partial \psi / \partial t = K \partial \phi / \partial \theta, \quad \partial \psi / \partial \theta = -\partial \phi / \partial t \dots\dots\dots(11)$$

ただし, $K = -\frac{q^2}{\sigma} \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{\sigma q} \right) = q \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{q} \right) \dots\dots\dots(12)$

10) または (11) がホドグラフ法の基礎方程式となる。この場合 $K > 0$ なので方程式は楕円型である。

4. 基礎方程式の一般的な解

上の新しい微分方程式は圧縮性流体の微分方程式におけると同様な方法⁹⁾ で一般的な解が求められる。

(11) から ψ を消去すると

$$\partial^2 \phi / \partial t^2 + K \partial^2 \phi / \partial \theta^2 = 0 \dots\dots\dots(13)$$

$\phi = T(t)\theta(\theta)$ なる解の形を仮定すると (13) から

$$\phi = T_n(t)e^{nj\theta}, \quad (j^2 = -1) \dots\dots\dots(14)$$

ただし, $T_n(t)$ は次の微分方程式の解である。

$$T_n'' - n^2 K T_n = 0 \dots\dots\dots(15)$$

(14) を (11) に代入すると対応する ψ が求められる。

$$\psi = -(1/nj) T_n'(t) e^{nj\theta}, \quad (n \neq 0) \dots\dots\dots(16)$$

(14) (16) を代入して (9) を積分すると, $n \neq \pm 1$ のとき

$$Z = -\frac{i}{i+nj} \frac{1}{q} e^{(i+nj)\theta} \left(T_n' + nj \frac{1}{\sigma} T_n \right) \dots\dots\dots(17)$$

$i^2 = -1, j^2 = -1$ を用いてさらに整理すると

$$Z = R_n \left\{ (i-j) \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - (1+ij) \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} \right\}$$

$$+ S_n \left\{ (i+j) \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} + (1-ij) \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} \right\}$$

$$\dots\dots\dots(18)$$

$$R_n = (T_n' + n\sigma^{-1} T_n) / 2q \quad \left. \vphantom{R_n} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

$$S_n = (T_n' - n\sigma^{-1} T_n) / 2q \quad \left. \vphantom{S_n} \right\}$$

従つて, これらに対する n 次の解は $n \neq 0, \pm 1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} \phi_{nc} &= T_n \cos n\theta, \quad \psi_{nc} = -n^{-1} T_n' \sin n\theta, \\ x_{nc} &= -R_n \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} + S_n \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} \\ y_{nc} &= R_n \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} + S_n \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

及び, この共軛表式 (20)' (省略した) で与えられる。低次の解は直接計算による。まづ, $n=0$ は

$$\left. \begin{aligned} \phi_{00} &= T_0, \quad \psi_{00} = -T_0' \theta, \\ x_{00} &= T_0' q^{-1} \cos \theta, \quad y_{00} = T_0' q^{-1} \sin \theta, \\ \phi_{01} &= T_0 \theta, \quad \psi_{01} = -T_0' \theta^2 / 2 + \text{integ}(T_0 K dt), \\ x_{01} &= T_0' \theta q^{-1} \cos \theta - (T_0' + T_0/\sigma) q^{-1} \sin \theta, \\ y_{01} &= T_0' \theta q^{-1} \sin \theta + (T_0' + T_0/\sigma) q^{-1} \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

$n=1$ の解は

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1c} &= T_1 \cos \theta, \quad \psi_{1c} = -T_1' \sin \theta, \\ x_{1c} &= -R_{10} + 2^{-1} S_{10} \cos 2\theta, \\ y_{1c} &= R_{10} + 2^{-1} S_{10} \sin 2\theta, \\ R_{10} &= \text{一定}, \quad R_{10} = T_1' / 2 q \sigma + \text{integ}(K T_1 q^{-1} dt) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

及び, この共軛表式 (22)' (省略) で与えられる。

基礎方程式 (11) は線型であるから, 解の一般形は (20)~(22)' の線型結合で表わされる。

上の解のうち特に重要と考えられる低次の特解について調べてみよう。

5. 湧出点, 流入点のまわりの流れ

(21) がこの流れを与える。(15) に $n=0$ とおくと

$$T_0'' = 0 \therefore T_0' = a \therefore T_0 = at + b \dots\dots\dots(23)$$

x, y の代りに曲座標 (r, ω) を用いて計算すると

$$\left. \begin{aligned} r &= T_0' / q = a/q, \quad \omega = \theta + m\pi \\ \phi &= at + b, \quad \psi = -a(\omega - m\pi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

ω 一定なる直線に沿い $\psi =$ 一定となるから, (24) は明らかに輻射流を表わす。 $r=r_t$ において $q = \pm q_t$ (複号はそれぞれ湧出点, 流入点に対応する) となる半径 r_t を基準にとると, (24) から $a = \pm r_t q_t \therefore$ 速度, ポテンシャル及びその勾配が次のように求められる。

$$q/q_t = \pm r_t/r \dots\dots\dots(25)$$

$$\pm (\phi - \phi_t) / r_t q_t = (1-A) \log(q/q_t)$$

$$- A \log \left[\frac{\sqrt{(q_t/q)^2 + 1} + q_t/q}{\sqrt{2} + 1} \right]$$

$$+ A \left[\sqrt{1 + (q/q_t)^2} - \sqrt{2} \right] \dots\dots\dots(26)$$

$$\mp (d\phi/dr) / q_t = \sigma(r_t/r) \dots\dots\dots(27)$$

輻射流の原点に近づくとき $r \rightarrow 0$ から $\pm (\phi - \phi_t) / r_t q_t \rightarrow A r_t / r$, すなわち r^{-1} の程度で ϕ が ∞ に近づく。層流の場合は $\pm (\phi - \phi_t) / r_t q_t = \log(r_t/r)$ で $\log r$ の程度であるから, レイノルズ数の高い透過流の方が高い次数でポテンシャル従つて圧力が中心に向い増大することがわかる (図-5, 6 参照)。

図-6 に示したごとく周囲を金網張りにした扁平円筒の中に粒子を充填し, 中心から高水圧をかけて透過実験を行い理論値と比較してみた。使用した粒子は丸味浦砂と鉛散弾 2 種で, 中心附近 (入口の 3 次元的影响が考えられる) を除き理論値とよく一致する。

(21)' は渦吹出しの解を与えるが, いまは省略する。

図-5 輻射流の ϕ 分布

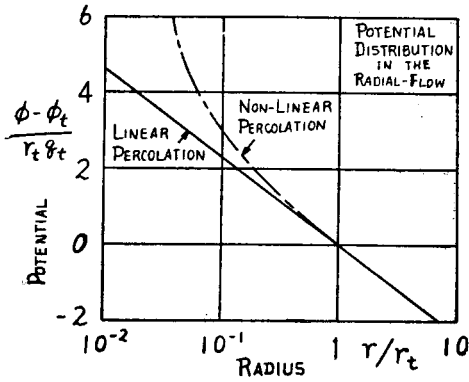
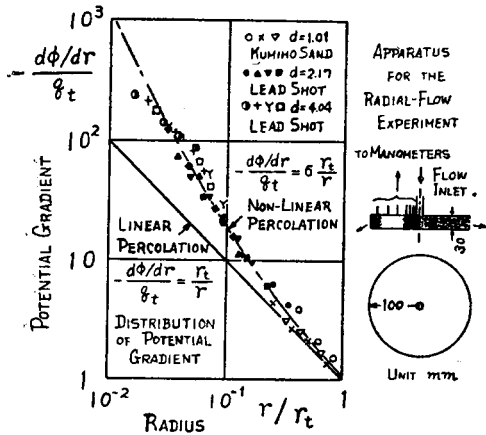


図-6 輻射流における ϕ の勾配



6. 平板の角を曲る流れ

$n=1$ の特解 (22) (22)' により与えられる。矢板等不滲透壁の先端や、不滲透層に沿った排水口の先端附近の流れに相当し、角を曲る部分で滲透速度が非常に高くなり高レイノルズ数の影響が無視できなくなる。

$n=1$ の場合、(15) 式から

$$T_1'' - KT_1 = 0, \text{ または } T_1''/q - T_1(1/q)'' = 0 \quad (28)$$

これは次のように積分できる。

$$T_1'/q - T_1(1/q)' = d \quad (29)$$

$$T_1 = q^{-1}(c + d \cdot \text{integ } q^2 dt) = q^{-1}(c + d \cdot \text{integ } \sigma q dq) = c/q + d \{ (1-A)q/2 + A(q^2 + q^2)^{3/2}/3q \} \quad (30)$$

最も簡単な場合として、特に $d=0$ を考えると

$$T_1 = c/q; R_1=0, S_1 = -T_1/\sigma q \quad (31)$$

$$R_{10} = c/2\sigma q^2 + c \cdot \text{integ } (K\sigma q^{-3} dq) \quad (32)$$

$\text{integ } (K\sigma q^{-3} dq) = I$, は $\{1 + (q/q_t)^2\}^{1/2} = \tau$ 及び $A^{-1} - 1 = B$ とおくと、次式のごとく積分される。

$$q^2 I = \int \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{q_t}{q} \right)^3 \left[\sigma + \frac{A(q/q_t)^2}{\{1 + (q/q_t)^2\}^{3/2}} \right] d \left(\frac{q}{q_t} \right)$$

$$= -(1/4 A) [(B-1)^{-2} \log(\tau+1) - (B+1)^{-2} \log(\tau-1) - 4B(B^2-1)^{-2} \times \log(\tau+B) + 4(B^2-1)^{-1}(\tau+B)^{-1} + (B+1)^{-1}(\tau-1)^{-1} - (B-1)^{-1}(\tau+1)^{-1}] \quad (33)$$

(31), (32), (33) を (22) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (c/q) \cos \theta, \quad \psi = (c/\sigma q) \sin \theta, \\ x &= -(c/2\sigma q^2) \cos 2\theta - c \{ (1/2\sigma q^2) + I \}, \\ y &= -(c/2\sigma q^2) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$q \rightarrow \infty$ なる特異点では $\sigma \rightarrow Aq/q_t$ で $I \rightarrow 0$ となるから、 $x=y=0$ 。すなわち原点が $q \rightarrow \infty$ の特異点になる。

一方無限遠点 $x, y \rightarrow \infty$ では $q=0$ が対応するから、原点から離れた所では層流解に近づく。 $q \rightarrow 0$ とすると、 $\sigma \rightarrow 1, K \rightarrow 1$ 及び $1/2\sigma q^2 + I \rightarrow 0$ となり、従つて (34) 式は

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (c/q) \cos \theta, \quad \psi = (c/q) \sin \theta, \\ x &= -(c/2q^2) \cos 2\theta, \quad y = -(c/2q^2) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

となり、半無限平板 $y=0(x < 0)$ の先端をまわる流れの境界条件を満たすことがわかる。 $q=q_t$ となる位置 $x=-a$ を長さの単位にとつて常数をきめる。 $q=q_t$ での量をそれぞれ $I=I_t, \sigma=\sigma_t$ とかくと

$$c = a q_t^2 D, \quad D = (\sigma_t^{-1} + q_t^2 I_t)^{-1} = 1.0934 \quad (36)$$

(34) (36) から無次元形の解 (37) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi}{a q_t} &= D \frac{q_t}{q} \cos \theta, \quad \frac{\psi}{a} = \frac{D}{\sigma} \frac{q_t}{q} \sin \theta, \\ \frac{x}{a} &= -\frac{D}{2\sigma} \left(\frac{q_t}{q} \right)^2 \cos 2\theta - D \left\{ \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{q_t}{q} \right)^2 + q_t^2 I \right\}, \\ \frac{y}{a} &= -\frac{D}{2\sigma} \left(\frac{q_t}{q} \right)^2 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

等速度線は次のごとく (37) から容易に求められる。

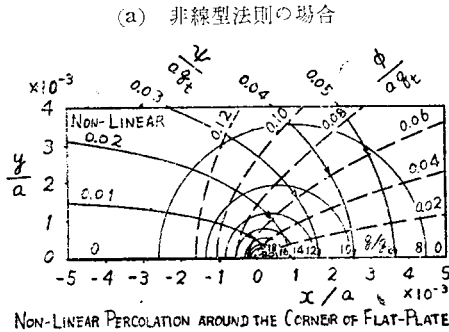
$$\left[\frac{x}{a} + D \left\{ \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{q_t}{q} \right)^2 + q_t^2 I \right\} \right]^2 + \left[\frac{y}{a} \right]^2 = [(D/2\sigma) (q_t/q)^2]^2 \quad (38)$$

流線、等ポテンシャル線、等速度線の計算値を図-7に、層流状態の解と比較して示した。網目の変形状態から非線型性の影響がいちじるしく現われている。

次に平板に沿うポテンシャルとその勾配及び速度分布をそれぞれ層流の解と比較しつつ 図-8, 9, 10 に示した。先端附近の高レイノルズ数滲透の影響で滲透速度は層流の場合より低くなり、ポテンシャル勾配(圧力降下)は大きくなつてくる。

$\psi=0$ 及び 0.05 を壁にとり $d_p=2.17 \text{ mm}$ の鉛散弾を用いて行つた実験値を計算と比較して示した。一致はかなりよいようで、このような特異点附近ではレ

図-7 平板の角を曲る滲透流



(b) 線型法則の場合

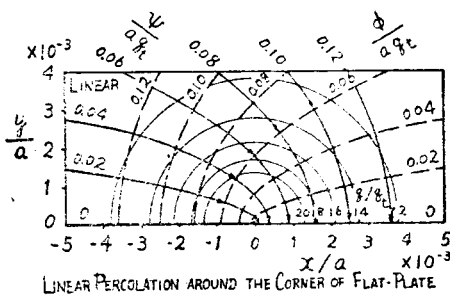


図-8 平板に沿う ϕ 分布

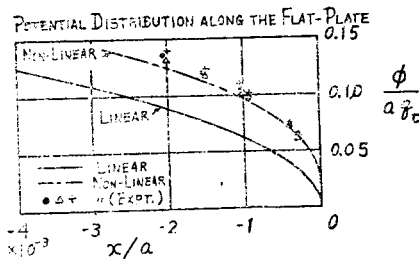
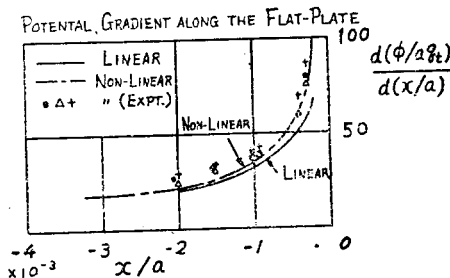


図-9 平板に沿う ϕ の勾配

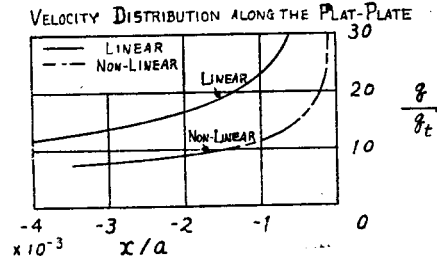


レイノルズ数の影響を無視できないことがわかる。

7. 結 言

高速滲透の基礎として、レイノルズ数の広い範囲に適用できる滲透法則の実験式を導いた。特異点を含むような滲透流の解析を行った結果、侵蝕で問題となるような高速滲透部附近においてはレイノルズ数の影響

図-10 平板に沿う速度分布



のいちじるしく現われることがわかった。レイノルズ数の増大にともなう局部的抵抗増加により、ポテンシャルまたは圧力勾配は層流状態に比してかなり増加する一方、滲透速度は一般に減少する（変わらない場合もある）ことが示された。実験結果は理論値によく一致する。

終りに本研究について終始激励と御援助を頂いた河田三治教授並びに本間仁教授、九味浦砂等実験試料について御好意にあづかつた最上武雄教授の方々に厚く御礼申し上げる次第である。なおこの研究は昭和 26 年度文部省科学試験研究費の助成の下に行われたものであることを附記して感謝の意を表わしたい。

文 献

- 1) Burke, S.P. and Plummer, W. B.: Gas Flow through Packed Columns, Ind. Eng. Chem. Vol. 20, pp. 1196-1200, 1928.
- 2) Fancher, G. H., Lewis, J. A. and Barnes, K.B.: Min. Ind. Exp. Sta., Penn State College Bull., 12, 1933.
- 3) Lindquist, E.: On the Flow of Water through Porous Soil, Rep. First Congress of Large Dams, Stockholm, pp. 81-102, 1933.
- 4) Molenbrock, P.: Arch. d. Math. Phys., Grunert Hoppe, Vol. 9, p. 157, 1890.
- 5) Chaplygin, A.: Wiss. Ann. Univ. Moskau, Math. Phys., Vol. 21, p. 1-121, 1904.
- 6) Demtchenko, B.: Comptes Rendus, Vol. 194, p. 1218 and p. 1720, 1932.
- 7) Ringleb, F.: Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung, Z. A. M. M., Vol. 20, pp. 185-177, 1940.
- 8) 守屋富次郎: 圧縮性流体運動の一解法, 日本航空学会誌, 第 11 巻 第 115 号, pp. 467-161, 1944.
- 9) 今井功: 縮む流体におけるホドグラフ法, 応用数学力学, 第 1 巻 第 4 号, pp. 147-479, 1947. 4) 5) 6) 等は 7) 参照。

(昭. 27. 10. 27)