

2. 砂が管底部に多くなる段階では、砂水の抵抗は水の抵抗より大になる。その場合砂の濃度が一定に保たれるならば、砂が完全に沈澱してしまう流速に下るまで抵抗は平均流速に関係なく一定であり、また砂の投入割合が一定であれば流速が沈澱流速に達する前に管はつまる。

3. 抵抗が平均流速に無関係になる段階では、最も大きく影響するものは濃度である。

4. 沈降速度は2インチ管においては、篩分け曲線上の70%の点における沈降速度が6 cm/sec 以下ではかなりの影響があるが、6~13 cm/sec の間ではあまり影響ない。

VI. 附 記

この実験は文部省科学研究費を主体とし、さらに運輸省宇部港工事事務所、宇部市役所及び宇部興産株式会社 の援助によつて行つたものである。また京大石原教授、九大篠原教授の御指導を得、実験設備に関しては本学磯部助教授の御援助にまつところが多い。測定については延谷、久保、金口、河野、作村の各学生諸君の助力を得た。各位に対して厚く感謝を表したい。

参 考 文 献

- 1), 2), 4), 5)は土木学会誌36-11(昭.26-11)管路における砂水流れの抵抗について(筆者)に記載
- 3) Blatch: Trans. A.S.C.E., 1906(II) p. 400
- 6) Siegfried, Ann. d. Ponts et Chaussées, 1939. (昭.27.11.26)

UDC 517.941.7 : 534.01

固有値問題の数値解法*

正員 工学博士 村山 朔 郎**
准員 谷 本 喜 一***

A NUMERICAL SOLUTION OF EIGENVALUE PROBLEM

(JSCE April 1953)

Dr. Eng., Sakurō Murayama, C.E. Member, Kiichi Tanimoto, C.E. Assoc. Member

Synopsis In order to solve eigenvalue problems which are difficult to be solved analytically a numerical method is introduced. This method is based on the stationary property of eigenvalue and the difference equation which is replaced approximately from the differential equation of the eigenvalue type and represented by a set of linear algebraic equations. To evaluate roughly the error in the results, solution obtained by this method is compared with the strict solution using some simple examples which have analytical solutions.

要旨 解析的に解けない固有値問題を数値的に解くことを試みた。要点は微分方程式を階差式で近似して代数式とし、固有値の停留性を利用したことにある。簡単な問題の厳密解と比較することによつて誤差の程度をほぼ判定した。

1. 緒 言

振動系の固有振動に関して、従来種々の解法が示され、厳密に解けない問題に対しても近似的に充分な解が求められたものが少なくない。ここに述べようとする方法は Kimball 及び Shortley の方法¹⁾を拡張し

たものであつて、弾性体の固有振動のみならず一般固有問題に応用され得るものと考えて。原理は固有振動の微分方程式を階差法によつて代数方程式に変換し、固有値の停留性を利用することにある。

2. 一般的考察

取扱いの対象を2階及び4階固有値問題に限ることにする。これらには例えば剪断振動系及び曲げ振動系が対応する。

A) 2階固有値問題

絃の振動、棒の縦振動などの基礎方程式

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq l) \quad \dots\dots (1)$$

について考えよう。但し、 x, t はそれぞれ座標及び時間て c は常数である。いま変数 t, x を適当に変換すれ

* 昭.27.6.28, 土木学会関西支部春季学術講演会にて発表

** 京都大学教授, 工学部土木工学教室

*** 同 助手, " "

ば(1)は

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \cdots (2)$$

と書き直される。さらに $y(x,t) = \bar{y}(x)e^{i\lambda t}$ として(2)式に代入すれば

$$\frac{d^2 \bar{y}(x)}{dx^2} + \lambda \bar{y}(x) = 0, \quad \text{但し } \lambda = p^2 \quad \cdots (3)$$

を得る。適当な境界条件のもとに(3)を満足する $\bar{y}(x)$ ($\neq 0$)がある λ に対して存在する時、 λ を(3)の固有値、 $\bar{y}(x)$ を相当する固有函数という。以下簡単のために \bar{y} を y と書き、もつぱら(3)について考える。

(3)式の数値解法として階差法を利用する。領域 $0 \leq x \leq 1$ を N 等分して(便宜上等分とする)分割点を x_k ($k=0, 1, \dots, N$) とする。そうすると Stirling の内挿式により、 $x_0 < x < x_1$ における任意の x に対する y の値は

$$y = y_0 + \frac{u}{1!} \cdot \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{u^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{u(u^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \dots$$

但し、 $u = x - x_0/x_1 - x_0 \equiv x - x_0/\Delta x$ で与えられる。これを x について2回微分すれば

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=x_0} \equiv \frac{1}{(\Delta x)^2} (y_1 - 2y_0 + y_{-1})$$

である。従つて一般に $x = x_k$ おいて(3)は次のような代数式で表わすことができる。

$$\lambda y_k = \frac{-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1}}{(\Delta x)^2} \quad \cdots (4)$$

また、境界においては代教表示による境界条件が別つけ加えられる。

(4)式は一般に

$$(\Delta x)^2 \lambda y_k = \sum_{i=0}^N b_{ki} y_i \quad \cdots (5)$$

とすることができる。ここに b_{ki} は次のような対称行列の要素である(境界条件によつて、対角要素の端付近では少し違つてくるから、ここでは一例として両端固定の場合を書く)。

$(b_{ki}) =$

$$\begin{vmatrix} \theta & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \theta & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ \theta & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ \theta & & & & \dots & & & & \\ \theta & & & & & \dots & & & \\ \theta & & & & & & \dots & & \\ \theta & & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ \theta & & & & & & & -1 & 2 & \end{vmatrix} \quad (k, i = 1, 2, \dots, N-1) \quad \cdots (6)$$

ここで θ と書いた部分は行列要素が0であることを意味し、両端固定のとき k, i が $0, N$ に相当する b_{ki} は意味がなくなるから省略した。

次に、(5)の両辺に y_k を掛け、 k について加えると

$$(\Delta x)^2 \lambda = \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N b_{ki} y_k y_i / \sum_{k=0}^N y_k^2 \quad \cdots (7)$$

を得る。 b_{ki} が対称行列であれば(5)、(7)より容易に λ の変分が零となることを証明できる。すなわち

$$\delta \lambda = 0$$

よつて λ の停留性が証明され、後でわかるように λ の極小性が云える。いま、 y_k ($k=0, 1, \dots, N$) を最小固有値に対応する固有函数とし、これの近似値

$$\phi_k^{(0)} (k=0, 1, \dots, N) \text{ によつて(7)に類似の表現}$$

$$(\Delta x)^2 \lambda^{(0)} = \sum \sum b_{ki} \phi_k^{(0)} \phi_i^{(0)} / \sum \phi_k^{(0)2} \quad \cdots (8)$$

を作るならば、 $\lambda^{(0)}$ は真の最小固有値 λ の第0近似であると考えられる。従つて $\lambda^{(0)}$ は λ より常に大きい。固有値の極小性から、(8)よりもさらに近似の高い近似固有値が求められる。それは(8)において

$$\frac{\partial \lambda^{(0)}}{\partial \phi_k} = 0 \quad \cdots (9)$$

なる条件を課するならば、これを計算して得た $\phi_k^{(0)}$ の値を第1近似とすることができるからである。すなわち

$$\phi_k^{(1)} \equiv - \sum_i' b_{ki} \phi_i^{(0)} / \{b_{kk} - \lambda^{(0)}(\Delta x)^2\} \quad \cdots (10)$$

として、 $\phi_k^{(1)}$ を $\phi_k^{(0)}$ の代りに(8)に入れた近似固有値 $\lambda^{(1)}$ を求めるならば、一般に $\Delta \phi_k \equiv \phi_k^{(1)} - \phi_k^{(0)}$ は $\phi_k^{(0)}$ が真の固有函数 y_k のかなりよい近似であれば小さいと考えられるから、 $\lambda^{(0)}$ を $\phi_k^{(1)}$ の近傍で、Taylor 展開して

$$\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} = (\lambda^{(0)})' (\Delta x)^2 - b_{kk} \left\{ \frac{(\Delta \phi_k)^2}{\sum \phi_k^{(0)2}} - O((\Delta \phi_k)^3) \right\} \quad \cdots (11)$$

を得る。この右辺第2因子の第2項は第1項に較べて $\Delta \phi_k$ が充分小なる時無視できるから、これを除いて考える。第一因子は $\lambda^{(0)}$ が $\Delta x \rightarrow 0$ とともにある極限値に近づき、 $(\Delta x)^2 \lambda^{(0)}$ が $\Delta x \rightarrow 0$ につれて b_{kk} より小さくなるから、 Δx を充分小さくすれば負となる。従つて $\lambda^{(1)} < \lambda^{(0)}$ である。

次に $\lambda^{(1)}$ 及び $\phi_k^{(1)}$ ($k=1, \dots, N$) によつて、さらに小さい $\lambda^{(2)}$ を同様の手続きで求めることが可能である。以下全く同じようにして $\lambda^{(i)}$ ($i=0, 1, \dots$) を求めれば、 $\lambda^{(0)} > \lambda^{(1)} > \lambda^{(2)} > \dots > \lambda^{(i)} > \dots$ であつて $i \rightarrow \infty$ とする時真の固有値 λ に近づくことが予想される。その収斂性は最初の試験函数の選び方によつて一概には云えないが、適当な函数を採用するならば相当よい近似を与えることができるであろう。また、固有函数の近似は固有値に較べればよくないがやはり逐次近似される。

高次固有値の計算は直交関係が入つてくるために、

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \lambda y = 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \dots\dots\dots (14)$$

$$\lambda = (1.875104)^4 \dots\dots\dots (20)$$

いま、境界条件として

$$x=0 \text{ で固定, } x=1 \text{ で自由} \dots\dots\dots (19)$$

が与えられたとする。

この厳密解はすでに求められており²⁾、最小固有値 λ は

である。

(14)及び(19)の解を前節の方法で、近似的に求めるが、この時(17)はそのまま使える。0次近似函数として $y = x^{3/2}$ の $x = k \cdot \Delta x$ ($k=0, 1, \dots, n$) に対応する値を採用し、 $\Delta x = 1/20$ として計算した結果を表-2に示す。

表-2 固有値及び固有函数の近似 (棒の場合)

ϕ, λ	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}
1	0	.011	.032	.058	.090	.125	.164	.207	.253	.302	.353	.408
2	0	.009545	.031273	.058280	.089480	.125238	.164071	.206856	.252996	.301851	.353427	.407644
3	0	.005023	.030200	.058154	.089594	.125002	.164291	.206792	.252893	.301867	.353462	.407774

ϕ, λ	ϕ_0	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}	ϕ_{16}	ϕ_{17}	ϕ_{18}	ϕ_{19}	ϕ_{20}	$\lambda^{(1)}$
1	0	.465	.524	.586	.649	.716	.783	.852	.925	1.000	22.24
2	0	.465014	.524190	.585679	.649577	.715232	.783465	.852467	.924200	.998000	14.16
3	0	.464771	.524300	.585724	.649506	.715426	.783196	.852859	.923614	.995933	13.87

$$\lambda = (1.875104)^4 = 12.362$$

表-2の結果はまだ満足すべきものではないが、これは計算桁数の取り方が少ないためであるとみられる。しかし一般に云つて2階の場合より収斂は遅いように思われる。また固有函数の近似は試験函数が真の函数にほとんど一致していたため、あまり変化しなかつた。それ故、図は省略した。

4. 附加的事項

以上述べたのは特殊な場合のみであつたが、これから類推して多くの問題に应用することができると思う。粗雑な表現であるが、微分方程式が1次代数式で近似され、境界条件が行列 (b_{ki}) の対称性を破らなければ本法が適用されよう。

例えば2階の問題で境界条件が固定または弾性的に固定点につながる場合は、対角要素の端がそれぞれ $1, h \cdot \Delta x + 1$ となる。但し h は弾性に関する常数である。また、変位に比例する抵抗が働く場合は対角要素が少し変わるだけである。

2次元問題にも応用されるが、数値計算は相変わらずわらわしくなるので、ここでは一切省略する。

最後に本方法の欠点を挙げると、前節で全然ふれな

かつたが(3)と(4)に含まれる λ は実は同じものでなく、我々の計算しているものは(4)のそれであつて(3)のそれではないことである。しかしながら数値解法の立場としてはそれもやむを得まい。ただ(3)の λ により近づくためには Δx を小さくすると云う常識的なことを実行するよりほかない。

5. 結 言

振動系の二、三の場合には変分法を利用して固有値の近似値を求める方法を述べた。ここで扱つた問題の範囲では近似の精度はほぼ良好と思われる。その他取り扱いについて今後幾多の研究にまつところがあるがこれらについては次の機会に発表したいと思う。

参 考 文 献

- 1) G.E. Kimball and G.H. Shortley : The Numerical Solution of Schrödinger's Equation, Physical Review, 45, 815, (1934).
- 2) 例えば
坪光松二 : 応用数学汎論, 359, (昭.22).
 $\cos x \cosh x + 1 = 0$ の根については、
林 重憲 : 過渡現象の数学的方法, 158, (昭.19)

(昭.27.12.16)