

# 一樣ならざる枕木沈下係数を有する 軌道応力について

准員 若 林 正\*

## ON THE STRESS OF A TRACK WITH NON-UNIFORM BEARING POWER

(JSCE Dec. 1952)

Tadashi Wakabayashi, C.E. Assoc. Member

**Synopsis** There are two methods of calculating the truck stress. The one is called Zimmermann's method and is based on an assumption that the foundation of the track is a continuous elastic one. The other is based on an assumption that the rail is a continuous beam lying on uniform elastic supports. But these assumptions are not considered to be accurate because the support condition of the sleepers, ballast and road bed, are not uniform. Then, a new solution of the track stress with non-uniform foundation is introduced and it will be applied to solve the stress of a track on a partially weak or strong road bed.

要旨 従来の軌道応力計算法はいずれも全部の枕木の支承状態が一樣であるとの假定に基づいてなされたものであるが、実際の軌道においては枕木の1本1本に少しづつ支承状態の差異があり、線路の一部が軟弱な場合や、硬い場合の応力状態を検討する必要がある。本解法は従来の一様弾性支承横枕木軌道の応力影響線を利用して簡単に解く方法を述べたものである。

### 1. 緒言

軌道応力の計算方法には連続した一樣な弾性床を假定したいわゆる縦枕木の理論と、等間隔に一樣な弾性床の上の梁として考える、いわゆる横枕木の理論とがある。前者は弾性床の上の梁として、弾性式を作り、4次の微分方程式を解けばよいので解算上の取扱いは簡単であるが、枕木間隔が広い場合には誤差が大きくなる。後者は多元連立方程式または階差方程式を解かなければならないので計算が複雑である。しかし既に影響線が求められているから(国鉄業務研究資料または土木学会誌)それを参考として利用すればよい。これら従来行われている計算法は、全部の枕木の支承状態が一樣であるとみなして計算を進めているのであるが、実際の軌道では枕木1本ごとに枕木及び道床路盤の弾性係数が異なるから、これらの要素をも加味して考えなければならない。また線路の1箇所が特に軟弱な場合またはその反対に硬い場合にレールや枕木の応力に対して、いかなる影響を有するかを知りたい場合もある。これらの解法としては国有鉄道その他で従来一樣

なる弾性支承を有する梁として、連立方程式による解法を準用することもできるが、計算が極めて複雑で実用に供しにくいのでこれを避けて、仮想荷重と影響線とを用いて解く方法を案出した。

### 2. 枕木沈下係数その他について

今レール断面の慣性モーメントを  $I$  (cm<sup>4</sup>)、ヤング率を  $E$  (kg/cm<sup>2</sup>)、枕木間隔を  $a$  (cm)、とし、枕木の沈下係数を  $D$  (kg/cm) とする。ただし特定の数個の枕木に対しては  $D_1 D_2 \dots$  であつて、この場合のレール及び枕木の応力を求めて、特定の枕木の沈下係数が他と異なるための影響を研究しよう。

以下の計算例には簡単のため特異の枕木数は2本の場合を取扱うが数本の場合も同様の取扱いができるから解の一般性を失わない。

ここに枕木の沈下係数とは、枕木の片側レール接触部分に  $D$  kg を加えると枕木下部の道床路盤の沈下と枕木の圧縮とにより、1 cm だけ枕木の上部、すなわちレールの底面が沈下する場合にその枕木の沈下係数を  $D$  kg/cm であるという。

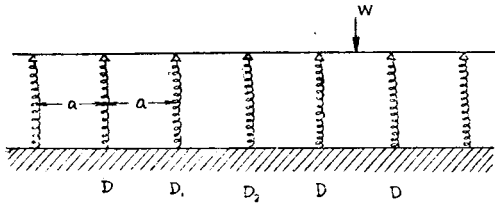
定義により軟弱地盤では  $D$  は小さく、硬い地盤では  $D$  が大きくなる。いま2本枕木に相当する部分の沈下係数を  $D_1 D_2$  とし、 $D$  との比を

$$\frac{D_1}{D} = \beta_1, \quad \frac{D_2}{D} = \beta_2$$

を以て表わすとする。このように枕木沈下係数の一樣ならざる軌道応力状態を図示すると図-1のようになる。

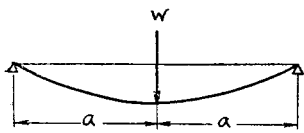
\* 山梨大学助教授、工学部土木教室

図-1



次にレールの撓み及び剛度を考えるのに、レール断面の慣性モーメント  $I$  及びヤング率  $E$  より支間  $2a$  なる単桁の集中荷重に対する撓度は図-2のごとくで、 $a^3W/6EI$  である。

図-2

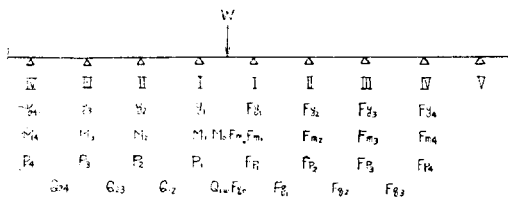


従つて  $1\text{cm}$  の撓みを生ぜしめるに要する荷重は  $B=6EI/a^3$  で示される。

枕木及びレールの沈下に対する剛度は  $D$  及び  $B$  であるから支承のパネと桁の剛度との比は  $B/D=r$  である。

軌道応力の計算については  $r=B/D$  が一樣なる場合には同一の影響線が得られる。 $r$  の値はレールの大きさ、枕木間隔、枕木及び路盤の状態により異なり、その変化の範囲は  $1\sim 20$  くらいであるが、普通  $2\sim 6$ 、平均  $4$  くらいである。

図-4 荷重が枕木の中間にある場合



次に

	Wが中間の場合	Wが枕木の中心の場合
支下量	$F_n$	$F_{2n}$
応力	$M_n$	$F_{2n}$
枕木の圧力	$F_n$	$F_{2n}$
荷重	$Q_{n-1}$	$F_{2n-1}$

一般に

$$\sum y = \frac{W}{D}$$

$$\sum P = W$$

$$P_n = Q_n - Q_{n-1}$$

$$Q_n = \frac{M_{n+1} - M_n}{a}$$

$$F_n = F_{2n} W$$

$$M_n = F_{2n} W$$

$$P_n = F_n W = yD$$

$$Q_n = F_n W$$

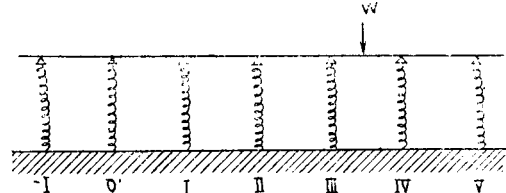
$$y = \frac{6EI}{a^3 P} = \frac{B}{D}$$

$$B = \frac{6EI}{a^3}$$

3. 一樣な支承に対する応力と影響線

計算の第一段階として全部の枕木沈下係数が一樣に  $D$  なる場合について考える。

図-3



荷重  $W$  を梁の任意の点 (支点の上でも中央でもどこでもよいが、ここでは枕木 III と VII との中間にある場合を例にとつた) に加えた時の梁の弾性変形及び支承パネの沈下状態を考えると 図-3~5、表-1,2のごとくである。

図-5 荷重が枕木の真上にある場合

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
$y_n$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$
$M_n$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$M_7$	$M_8$	$M_9$	$M_{10}$
$P_n$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$
$Q_n$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$	$Q_7$	$Q_8$	$Q_9$	$Q_{10}$

表-1 荷重が枕木の真上の場合

	$f_m$	$f_s$	$f_p$
I	0.284803	0.305049	0.389902
II	0.029186	0.053532	0.252517
III	-0.072718	-0.029749	0.082281
IV	-0.042968	-0.020301	0.060352
V	-0.012667	-0.013438	-0.016863
VI	0.000770	-0.002376	-0.011062
VII	0.003106	0.001277	-0.003650
VIII	0.001872	0.001327	-0.000044
IX	0.000553	0.000567	0.000765
X			0.000553

表-2 荷重が枕木の中間の場合

	$F_m$	$F_s$	$F_p$
0	0.338052	0.502600	
I	0.038052	0.152577	0.246013
II	-0.065925	-0.044712	0.152664
III	-0.061213	-0.032283	0.030577
IV	-0.025930	-0.021910	-0.013372
V	-0.004020	-0.006834	-0.015002
VI	0.002814	0.001449	-0.006921
VII	0.003666	0.001513	-0.001364
VIII	0.001153	0.000976	0.000577
IX	0.000237	0.000237	0.000677
X			0.000237

枕木 I 及び II は実際には特異枕木であつて仮にこれも普通枕木と置き換えて、その撓度を  $y^{(0)}_1, y^{(0)}_2$  とする (図-6)。

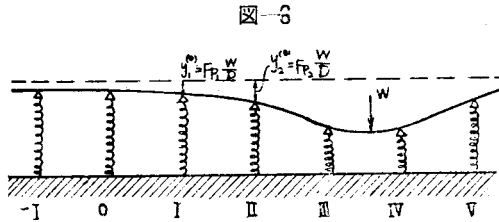


図-6

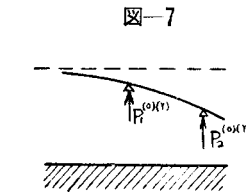


図-7

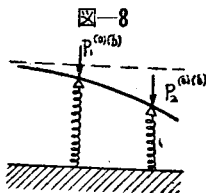


図-8

レールに加わる力は図-7のごとく  $P_1^{(r)}$ 、 $P_2^{(r)}$  であり、枕木に加わる力は  $P_1^{(l)}$ 、 $P_2^{(l)}$  であつて (図-8) 作用、反作用の関係より

$$P_1^{(r)} = P_1^{(l)}, P_2^{(r)} = P_2^{(l)}$$

これらの力の大きさは枕木の沈下量に枕木係数をかけて求められる。

$$P_1^{(r)} = y_1^{(r)} D, P_2^{(r)} = y_2^{(r)} D$$

$P_1^{(r)}$  または  $y_1^{(r)}$  などの値は軌道応力の影響線として既に計算されているからそれをそのまま利用すればよい。

#### 4. 仮想荷重による応力と変形

次に枕木 I に下方から上方に向い仮想荷重  $W'$  を加えて梁の撓み応力などを調べる (図-9)。

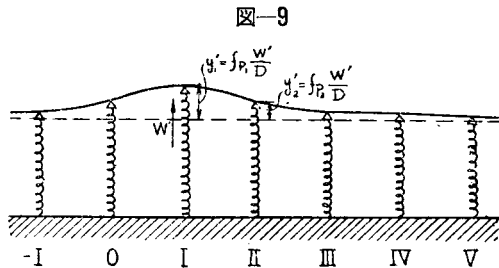


図-9

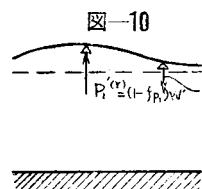


図-10

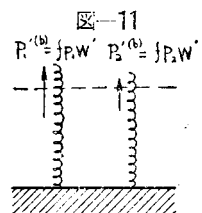


図-11

仮想荷重  $W'$  はレールと枕木と 2 つにわかれて作用する (図-10, 11)。レールの撓みは I 枕木では  $y_1' = f_{P1} W' / D$

II 枕木では  $y_2' = f_{P2} W' / D$  レールに加わる力は

$$P_1^{(r)} = f_{P1} W' : \text{上向き}$$

$$P_2^{(r)} = f_{P2} W' : \text{上向き}$$

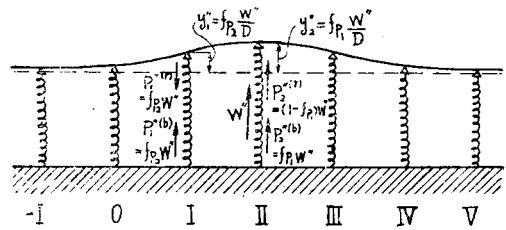
仮想荷重が I 枕木にはたらく時は

$$\text{I 枕木に対しては } P_1^{(r)} + P_1^{(l)} = W'$$

$$\text{II 枕木に対しては } P_2^{(r)} = P_2^{(l)}$$

同様に II 枕木に仮想荷重  $W''$  を上方に向けて加えると図-12のごとくなる。

図-12



I 枕木では 撓度  $y_1'' = f_{P2} W'' / D$  : 上向き

$$\text{レールに加わる力 } P_1^{(r)} = f_{P2} W'' : \text{下向き}$$

$$\text{枕木に加わる力 } P_1^{(l)} = f_{P2} W'' : \text{上向き}$$

$$\text{しかして } P_1^{(r)} = P_1^{(l)}$$

II 枕木では 撓度  $y_2'' = f_{P1} W'' / D$  : 上向き

$$\text{レールに加わる力 } P_2^{(r)} = (1 - f_{P1}) W'' : \text{上向き}$$

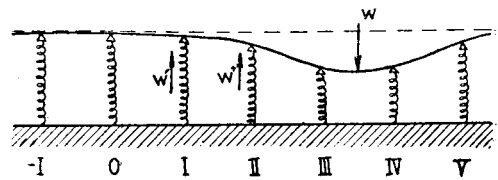
$$\text{枕木に加わる力 } P_2^{(l)} = f_{P1} W'' : \text{上向き}$$

$$\text{しかして } W'' = P_2^{(r)} + P_2^{(l)}$$

#### 5. 実荷重と仮想荷重の合成と枕木沈下係数

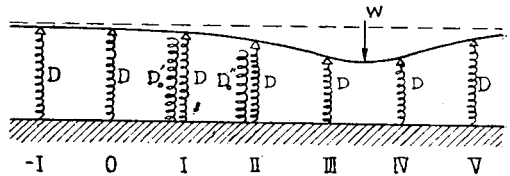
第4段として外力  $W$  及び仮想荷重  $W'$  及び  $W''$  が同時に加わると考えると、図-13のようになる。

図-13



I 枕木及び II 枕木上のレールの沈下量を不変のまま反力が  $W'$ 、 $W''$  となるごときバネ  $D_0'$ 、 $D_0''$  と置き換える (図-14)。

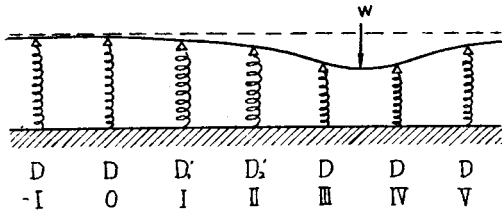
図-14



一般の枕木に対するバネは  $D$  で I 枕木及び II 枕木に対しては各  $D_0' D$  及び  $D_0'' D$  と 2 本ずつのバネが得られる。

これを更に  $D_0' + D = D_1'$ 、 $D_0'' + D = D_2'$  なる新しいバネに置き換えると特異バネ 2 個を有する所要の弾性支承の連続梁の状態が得られることになる (図-15)。

図-15



次に枕木の沈下量と枕木に加わる力との関係を分析する

I 枕木について

$$y_1 = y_1^{(0)} - y_1' - y_1''$$

$$= F_{P_3}W/D - f_{P_1}W'/D - f_{P_2}W''/D \quad \dots\dots\dots(1)$$

枕木に加わる力

$$P_1^{(b)} = P_1^{(0)(b)} - P_1'(b) - P_1''(b) + W'$$

$$= F_{P_3}W - f_{P_1}W' - f_{P_2}W'' + W' \quad \dots\dots\dots(2)$$

II 枕木について

$$y_2 = y_2^{(0)} - y_2' - y_2''$$

$$= F_{P_2}W/D - f_{P_2}W'/D - f_{P_1}W''/D \quad \dots\dots\dots(3)$$

枕木に加わる力

$$P_2^{(b)} = P_2^{(0)(b)} - P_2'(b) - P_2''(b) + W''$$

$$= F_{P_2}W - f_{P_2}W' - f_{P_1}W'' + W'' \quad \dots\dots\dots(4)$$

枕木沈下係数は枕木に加わる力と沈下量との比であるから

$$D_1 = \frac{P_1^{(b)}}{y_1} = \frac{F_{P_3}W - f_{P_1}W' - f_{P_2}W'' + W'}{\frac{W}{D} - \frac{W'}{D} - \frac{W''}{D}} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$D_2 = \frac{P_2^{(b)}}{y_2} = \frac{F_{P_2}W - f_{P_1}W' - f_{P_1}W'' + W''}{\frac{W}{D} - \frac{W'}{D} - \frac{W''}{D}} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1/D &= \beta_1 & D_2/D &= \beta_2 \\ W'/W &= w' & W''/W &= w'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

とおけば

$$\beta_1 = \frac{F_{P_3} - f_{P_1}w' - f_{P_2}w'' + w'}{F_{P_3} - f_{P_1}w' - f_{P_2}w''} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\beta_2 = \frac{F_{P_2} - f_{P_2}w' - f_{P_1}w'' + w''}{F_{P_2} - f_{P_2}w' - f_{P_1}w''} \quad \dots\dots\dots(9)$$

分母をばらい

$$F_{P_3}\beta_1 - f_{P_1}\beta_1w' - f_{P_2}\beta_1w''$$

$$= F_{P_3} + (1 - f_{P_1})w' - f_{P_2}w''$$

$$F_{P_2}\beta_2 - f_{P_2}\beta_2w' - f_{P_1}\beta_2w''$$

$$= F_{P_2} - f_{P_2}w' + (1 - f_{P_1})w''$$

これを整理し

$$[1 + f_{P_1}(\beta_1 - 1)]w' + f_{P_2}(\beta_1 - 1)w''$$

$$= F_{P_3}(\beta_1 - 1) \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$f_{P_2}(\beta_2 - 1)w' + [1 + f_{P_1}(\beta_2 - 1)]w''$$

$$= F_{P_2}(\beta_2 - 1) \quad \dots\dots\dots(11)$$

これを  $w'$  及び  $w''$  についてとけば

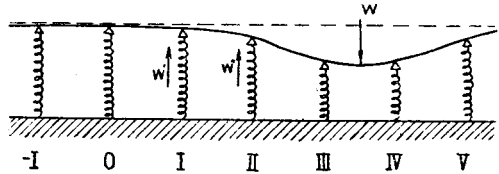
$$w' = \frac{F_{P_3}(\beta_1 - 1)[1 + f_{P_1}(\beta_2 - 1)] - F_{P_2}(\beta_2 - 1)f_{P_2}(\beta_1 - 1)}{[1 + f_{P_1}(\beta_1 - 1)][1 + f_{P_1}(\beta_2 - 1)] - f_{P_2}^2(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1)} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$w'' = \frac{F_{P_2}(\beta_2 - 1)[1 + f_{P_1}(\beta_1 - 1)] - F_{P_3}(\beta_1 - 1)f_{P_2}(\beta_2 - 1)}{[1 + f_{P_1}(\beta_1 - 1)][1 + f_{P_1}(\beta_2 - 1)] - f_{P_2}^2(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1)} \quad \dots\dots\dots(13)$$

6. 不等沈下係数を有する軌道の応力

$w', w''$  が求まればこれに  $W$  をかけて  $W', W''$  が求まる。これら  $W, W', W''$  を外力として一様な弾性支承の連続梁に加えれば各点の彎曲率, 剪力, 反力及び沈下量などが求められる(図-16)。すなわち

図-16



(1) 沈下量

$$y_{-1} = (F_{P_5} - f_{P_3}w' - f_{P_4}w'')W/D$$

$$y_0 = (F_{P_4} - f_{P_2}w' - f_{P_3}w'')W/D$$

$$y_1 = (F_{P_3} - f_{P_1}w' - f_{P_2}w'')W/D$$

$$y_2 = (F_{P_2} - f_{P_2}w' - f_{P_1}w'')W/D$$

$$y_3 = (F_{P_1} - f_{P_3}w' - f_{P_2}w'')W/D$$

$$y_4 = (F_{P_1} - f_{P_4}w' - f_{P_3}w'')W/D$$

(2) 反力

$$P_{-1} = (F_{P_5} - f_{P_3}w' - f_{P_4}w'')W$$

$$P_0 = (F_{P_4} - f_{P_2}w' - f_{P_3}w'')W$$

$$P_1 = [F_{P_3} - (1 - f_{P_1})w' - f_{P_2}w'']W$$

$$P_2 = [F_{P_2} - f_{P_2} - (1 - f_{P_1})w'']W$$

$$P_3 = (F_{P_1} - f_{P_3}w' - f_{P_2}w'')W$$

$$P_4 = (F_{P_1} - f_{P_4}w' - f_{P_3}w'')W$$

(3) 彎曲率

$$M_{-1} = (F_{M_5} - f_{M_3}w' - f_{M_4}w'')W$$

$$M_0 = (F_{M_4} - f_{M_2}w' - f_{M_3}w'')W$$

$$M_1 = (F_{M_3} - f_{M_1}w' - f_{M_2}w'')W$$

$$M_2 = (F_{M_2} - f_{M_2}w' - f_{M_1}w'')W$$

$$M_3 = (F_{M_1} - f_{M_3}w' - f_{M_2}w'')W$$

$$M_4 = (F_{M_1} - f_{M_4}w' - f_{M_3}w'')W$$

(4) 剪力

$$Q_{-1-2} = (F_{q5} - f_{q3}w' - f_{q4}w'')W$$

$$Q_{0-1} = (F_{q4} - f_{q2}w' - f_{q3}w'')W$$

$$Q_{01} = (F_{q3} - f_{q1}w' - f_{q2}w'')W$$

$$Q_{12} = (F_{q2} + f_{q1}w' - f_{q1}w'')W$$

$$Q_{23} = (F_{q1} + f_{q2}w' - f_{q1}w'')W$$

$$Q_{3w} = (F_{q0} + f_{q3}w' + f_{q2}w'')W$$

$$Q_{w4} = (-F_{q0} + f_{q3}w' + f_{q2}w'')W$$

$$Q_{45} = (-F_{q1} + f_{q4}w' + f_{q3}w'')W$$

$$Q_{56} = (-F_{q2} + f_{q5}w' + f_{q4}w'')W$$

この解法は枕木 I 及び II が異常枕木でその枕木沈下係数を  $D_1, D_2$  とし荷重を III, IV の中間に加えた場合について取扱つたのであるが荷重が枕木上にある場合には  $F_y F_m F_p F_q$  などは  $f_y f_m f_p f_q$  となる。この他異常枕木の数、位置及び荷重の位置により上述の各

係数の指数が異なつてくるから注意して計算しなければならない。

荷重が単一荷重でなく列車荷重のように多数の集中荷重または分布荷重の場合にはそれぞれの単一荷重にその強度をかけて代数的に加え合わせれば荷重群に対してもレール及び枕木に生ずる応力と撓みを求めることができる。

### 7. 結論

ここに述べた方法は一樣なる枕木沈下係数を有する軌道の影響線を利用して、複雑なる多元連立方程式または階差方程式を用いることなしに、一樣ならざる軌道の応力を簡単容易に求められるのが本解法の特徴である。

(昭.27.6.28)

UDC 628.163.067:532.55

## 急速砂濾過における濾過水頭に関する一実験考察

准員 徳 平 淳\*

### AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE RESISTANCE (HEAD LOSS) OF FILTERS IN RAPID SAND FILTRATION

(JSCE Dec. 1952)

Atushi Tokuhira, C.E. Assoc. Member

**Synopsis** An experimental study concerning the resistance (head loss) of filters in rapid sand filtration is described in this paper. The author proposed one formula of the head loss of filters in rapid sand filtration under the clogging based on Fair-Hatch formula and Bouchr's Filtrability Index.

He compares it with the experimental data and obtains a few characteristics about this problem.

**要旨** 急速砂濾過の際、砂の抵抗による初期濾過水頭、及びその後の閉塞による濾過水頭の変化を予知することは浄水場の運営の上で重要なことである。これ等のことにつき実験を行い、すでに発表されている式の検討をなし、それに基づき新式を導入し、若干の考察をなし、二、三の特性を得た。その一部を報告する。

#### 1. 緒言

砂濾過の際、砂の抵抗による損失水頭を表わす式はいろいろあるが、水道界で広く使用され得る式として Fair-Hatch<sup>1)</sup> 式がある。

$$\frac{h}{l} = \frac{k}{g} \frac{\mu v}{\rho} \frac{(1-f)^2}{f^3} \left( s \Sigma \frac{P}{100} \frac{1}{d} \right)^2 \dots\dots(1)$$

ただし (1) 式は砂を不均一に充填した場合の式であ

る。

$h$ : 損失水頭 [L],  $l$ : 砂層厚 [L]

$k$ : 常数 [無次元]

$g$ : 重力による加速度 [LT<sup>-2</sup>]

$\mu$ : 水の静粘性係数 [ML<sup>-1</sup>T<sup>-1</sup>]

$\rho$ : 水の密度 [ML<sup>-3</sup>],  $v$ : 濾過速度 [LT<sup>-1</sup>]

$f$ : 砂の有効空隙率 [無次元]

$s$ : 砂の形状比 [無次元]

$P$ : 任意の篩目  $d_1, d_2$  間に残留せる砂の重量百分率 [無次元]

$d$ : 砂の代表径 =  $\sqrt{d_1 d_2}$  [L]

本式は、砂層内の損失水頭は管路内の損失水頭を表わす式と本質的には同様であり、砂の粒子表面積を考慮して求め、実験的に確かめている。

\* 東京大学助教授、工学部土木教室