講　座

UDC 519.2

土木推計学 III
推計学のねらいと本質
(後　編)

正員　田　原　保　二*

5. 推定論

前編の終りで述べた検定方法で多くの測定値の組を同一の母集団と判定し得る幾つかの集団にまとめることができた。このような幾つかの集団の中では元の組の所属は撤廃され，1つの集団に帰属する個々の測定値は互いに混ぜ合わされて新母集団よりの任意抽出見本値の1組とみなされる。ここでこれらの新しい見本値の1組からこれに対応すべき新母集団の型と形，特に母数をいかにして推定するかが本論の問題である。そもそも検定と推定は表裏一体のもので検定の当初に仮説として想定された特定の母数が検定の結果ある確かさでたまたま捨て切れなかつたとしても同じ確かさで捨切れない母数，すなわち仮説は他にも沢山あるかも知れない。そして既検定，未検定を問わず同一の確かさで捨切れないこれら母数は，捨切られる母数を含めた母数全体の集団の中にある限られた部分集団あるいは区間を占めるであろう。かかる区間をその確かさでの信頼区間と呼び，信頼区間の決定こそ母数推定の問題に外ならない。このような命題を区間推定法[20]と言い推定論の本流をなすものである。

1° 区間推定法

いま1つの確率変数 x に対し k 個の母数を含むある自由な型の確率分布 $p(x|\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_k)$ を想定しよう。そして測定値 ξ_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ の1組をこの分布から任意に抽出した見本の1組と考える。しかるときは ξ_i は相互に独立に抽出されたのであるから ξ_i に対応して x と同じ定義範囲で互いに独立な n 個の変数 $x_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ を導入し，$p(x|\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ の代りに x_i の同時確率分布 $p'(x_1, x_2,\cdots\cdots x_n|\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_k)$ を考えることも確かに意味がある。更に進んで $x_1, x_2,\cdots\cdots, x_n$ の適当な函数あるいは統計量 $\phi(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$ を導入し，この統計量を変数とした確率分布 $p''(\phi_{xi}|\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_k)$ を考えても同じ意味での一般性を失うものではない[21]。例えば p が正規分布ならば $\theta_1=m$，$\theta_2=\sigma$ $(k=2)$ であつて

$$p(x|\theta_1,\ \theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

に対し

$$p'(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n|\theta_1,\ \theta_2)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i|\theta_1,\theta_2)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}$$

また

$$\phi(x_1,\ x_2,\cdots\cdots x_n)=\frac{\bar{x}-m}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}=t,$$

$$\left(\text{但し}\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)$$

を導入すれば

$$p''(\phi_{xi}|\theta_1,\ \theta_2)\ =p(t)$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n-1}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\times\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

となるがごとくである。

いずれにしても軸 $x_1, x_2,\cdots\cdots x_n,\ \theta_1,\ \theta_2,\cdots\cdots\theta_k$ は $n+k$ 次の空間 W を作りその中で任意の見本の1組 ξ_i $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ は空間の1座標 $(\mathrm{x})=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots\cdots \xi_n,\ \theta_1,\ \theta_2,\cdots\cdots,\ \theta_k)$ を確定し，点 x に対して確率函数 $p'(\mathrm{x})=p'(x_1, x_2,\ \cdots\cdots,x_n|\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots\theta_k)$ あるいは $p''(\mathrm{x})=p''(\phi_{xi}|\theta_1,\ \theta_2,\cdots\cdots\theta_k)$ が対応する[22]。

ここで理解を容易にするために以下 $n=2$，すなわち x_1, x_2 で $k=1$ すなわち $\theta_1=\theta$ なる特別の場合を

* 建設省土木研究所

20) この外に点推定法の概念がある。これは後で略述する。

21) p', p'' の相違はただの変数変換によるものである。

22) p', p'' いずれを対応させても同じであり，いずれによるかは自由である。

論じよう。さて W の定義領域は θ の上下限 $\bar{\theta}$, $\underline{\theta}$ と任意の θ 平面に対する x_1, x_2 の定義領域 $R(\theta)$ によつて定まる。測度論的な表現をすれば W はすべての元素 x[23] を容れる容器であり，容器の内容は元素 x の集合 E[24] である。そして容器の積(カサ)を $m(E)$ で表わし E の測度 (measure)[25] と呼ぶ。今もし W の中で母数 θ の信頼区間 Θ に対応する部分空間 w が定まるとすれば，Eの部分集合 e,その測度 $m(e)$ も自ら定まるであろう。更にある仕方Δで e を互いに共通な元素 x を持たない小さな集合 $\underset{\Delta}{e_j}$ $(j=1,2,\cdots,m.)$ に細分できて[26] $e=\sum_{j=1}^{m}\underset{\Delta}{e_j}$ となし得るならば $m(e)=\sum_{j=1}^{m} m(\underset{\Delta}{e_j})$ が成立する。そして各 $\underset{\Delta}{e_j}$ の内部で元素 x の確率密度 $p'(\mathrm{x})$ あるいは $p''(\mathrm{x})$ の最小なるものを $\underset{\Delta}{e_j}$ における $p'(\mathrm{x})$の下限 $\inf_{\mathrm{x}\in\underset{\Delta}{e_j}} p'(\mathrm{x})=\underset{\Delta}{c_j'}$ あるいは $p''(\mathrm{x})$ の下限 $\inf_{\mathrm{x}\in\underset{\Delta}{e_j}} p''(\mathrm{x})=\underset{\Delta}{c_j''}$ で表わし $\underset{\Delta}{S'}=\sum_{j=1}^{m}\underset{\Delta}{c_j'}\cdot m(\underset{\Delta}{e_j})$, $\underset{\Delta}{S''}=\sum_{j=1}^{m}\underset{\Delta}{c_j''}\cdot m(\underset{\Delta}{e_j})$ を作ると分割の仕方 Δ で $\underset{\Delta}{S'}$ $\underset{\Delta}{S''}$ がそれぞれ最大となるようなΔが必ず存在する。かくのごとき $\underset{\Delta}{S'}$, $\underset{\Delta}{S''}$ の上限をそれぞれ $\sup_{\Delta}\sum_{j=1}^{m} c_j'\cdot m(e_j)$, $\sup_{\Delta}\sum_{j=1}^{m} c_j''\cdot m(e_j)$ で表わしこの値を集合 e の上の $p'(\mathrm{x})$, $p''(\mathrm{x})$ の積分と定義しそれぞれ記号

$$\int_e p'(\mathrm{x})dm,\quad \int_e p''(\mathrm{x})dm$$[27]

で書く。

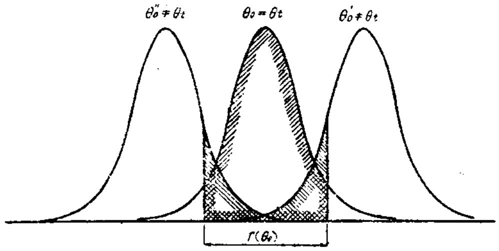
さて空間 W を $\theta=\theta_0$ (θ_0 は一定) なる任意の平面で剪ると θ_0 平面での x_1, x_2 の定義領域 $R(\theta_0)$ が定まり，$R(\theta_0)$ なる平面領域内の元素 x_0 の集合 E_0' 及びその面測度 $m(E_0')$ も確定する。いま$R(\theta_0)$の中にある方法で部分領域 $r(\theta_0)$ を画し，$r(\theta_0)$ 内に落ちる元素 x_0 の集合を e_0',その面測度を $m(e_0')$ で表わせば，θ_0 の大いさのいかんにかかわらず，常に

$$P\{e_0'\}=\frac{\int_{e_0'}p'(\mathrm{x}_0)dm}{\int_{E_0'}p'(\mathrm{x}_0)dm}$$

$$\text{または}\frac{\int_{e_0'}p''(\mathrm{x}_0)dm}{\int_{E_0'}p''(\mathrm{x}_0)dm}=\alpha\ (\text{一定})$$

となるような $r(\theta_0)$ を画すことができる。ここに強いてある方法でと断つたのはかかる画し方は実際は無数にあるがもし母数 θ の真の値が θ_0 であつたときに x_0 の $r(\theta_0)$ に落ちる確率 $P\{e_0'\}$ を最大ならしめるような方法を撰ぶことを意味する。例えば図—5 において θ の真値 θ_t に対して $\theta_0=\theta_t$, $\theta_t\neq\theta_0'$, $\theta_t\neq\theta_0''$ なる場合 $r(\theta_0)$ を図のごとく撰べば $P\{e_0'\}$ は $\theta_0=\theta_t$ において最大となし得るだろう。かく撰ばれた領域 r を最上採択域と呼ぶ。

図—5



かくのごとき $r(\theta)$ は θ の全域について撰ぶことができるから結局

$$P\{e\}=\frac{\int_e p'(\mathrm{x})dm}{\int_E p'(\mathrm{x})dm}\ \text{または}\ \frac{\int_e p''(\mathrm{x})dm}{\int_E p''(\mathrm{x})dm}$$

$$=\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}d\theta\int_{e'}p'(\mathrm{x})dm}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}d\theta\int_{E'}p'(\mathrm{x})dm}$$

$$\text{または}\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}d\theta\int_{e'}p''(\mathrm{x})dm}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}d\theta\int_{E'}p''(\mathrm{x})dm}=\frac{\alpha\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}d\theta}=\alpha$$

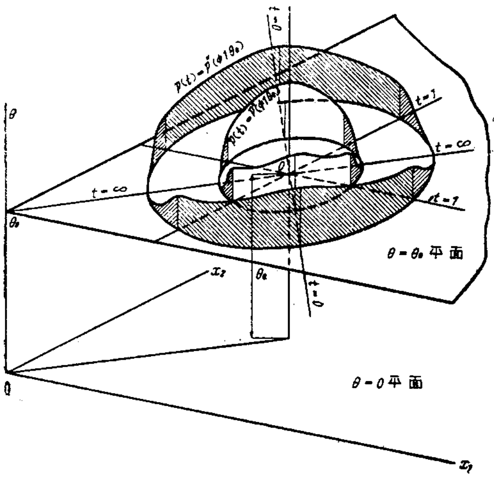
となつて θ の全域に対しても $r(\theta)$ が占める空間は W の中で一定の信頼係数 α をもつ1つの採択空域 w を区画する。換言すれば W が容れる集合 E に属する元素 x のいかなる抽出見本 (例えば (ξ_1, ξ_2, θ_0)) も集合 e に属し w に落ちる確率 $P\{e\}$ は θ の値が何であろうとも常に α である。よつて $r(\theta)$ が各 θ によつて採択され，従つて w の領域が確定すれば，任意の見本値の組 (ξ_1, ξ_2, θ_0) に応ずる θ の信頼区間 Θ は見本値の座標 $(\mathrm{x})=(\xi_1, \xi_2, \theta_0)$ を通り θ 軸に平行な直線 L が w の界面と交わる2点 (ξ_1, ξ_2, θ_u), (ξ_1, ξ_2, θ_d) で L が区切られる区間 $|\theta_u-\theta_d|=\Theta$ で決定し得る (図—6, 図—7 参照)。以上述べたことを二，三の例について説明しよう。

(A) 母平均を推定する問題　前編例題のサイロより取出したセメントの強度において第2回目試験ロット以外はすべて同一母集団よりの抽出見本とみなして差支えないことが結論された。しからばこれら見本値が下記のような正規分布型よりの抽出見本であるとして，その母平均 m を信頼係数 $\alpha=0.9$で推定する問題。

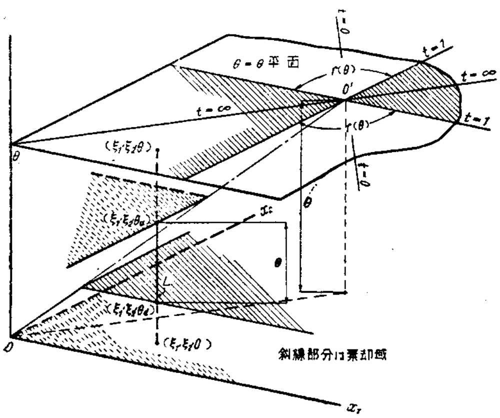
$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

23) 元素 x はすなわち空間の点 x で1つの見本の組，すなわち1つの事象を代表する。
24) E は事象 x の集合であり1つの複合事象を代表する。
25) Lubesque 測度とも言う。3次元的には何升，何立，2次元的には何坪，何 acre と考えればよい。
26) このような細分の仕方は無数にある。
27) かかる積分を Lubesque 積分と言う。

図—6



図—7



を想定母集団とする。まづ $m=\theta$ とおき

$$\phi\ (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\ =t=\frac{\bar{x}-\theta}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

を導入し $p''(\phi x_i|\theta)=p\ (t)$ を作ればは $p''(\phi x_i|\theta)$ は明らかに σ の値に関係なく t- 分布をなす。故に

$$P\{|t|\geqq t_0\}=2\int_{t_0}^{\infty}p(t)dt=1-\alpha=0.1,$$

すなわち

$$\int_{t_0}^{\infty}p(t)dt=0.05$$

に応ずる t_0 を自由度 $f=n-1$ で t- 分布の表から求め，この t_0 を用いて

$$-t_0\leqq t\leqq t_0,\ \text{あるいは}\ -t_0\leqq\frac{\bar{x}-\theta}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\leqq t_0\ \text{より}$$

$$\bar{x}-t_0\frac{s}{\sqrt{n}}\leqq\theta\leqq\bar{x}+t_0\frac{s}{\sqrt{n}}$$

が定まり信頼区間は

$$\Theta=\left(\bar{x}-t_0\frac{s}{\sqrt{n}},\ x+t_0\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

で与えられる。

上述の数例では第1，3，4，5回目試験の 4 ロットを1組とし混ぜ合せ 28 個の見本値を得るから

$$\bar{x}=\frac{1}{28}(196\times5+190\times8+189\times7+195\times8)$$
$$=192.25$$

$s/\sqrt{n}$

$$=\frac{\{(192.25-182)^2+(192.25-189)^2+\cdots\cdots+(192.25-205)^2+(192.25-210)^2\}^{1/2}}{28\times(28-1)}=1.824$$

表より $\alpha=0.9$，$1-\alpha/2=0.05$，$f=27$ で $t_0=1.703$ となるから

$$t_0\frac{s}{\sqrt{n}}=1.703\times1.824=3.10$$

故に

$$\Theta=(189.15,\ 195.35)$$

(B) 母分散を推定する問題　この場合には $\sigma=\theta$ とおき

$$\phi\ (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\ =\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{\theta^2}$$

を導入し $p''(\phi x_i|\theta)=p(\chi^2)$ を作れば χ^2 は m の任意の値に対して χ^2- 分布をなす。故に

$$P\{\chi_0^2\leqq\chi^2\leqq\chi_0'^2\}=P\{\chi^2\geqq\chi_0^2\}-P\{\chi^2>\chi_0'^2\}$$
$$=\alpha=0.9$$

なるような χ_0^2，$\chi_0'^2$ を自由度 $f=n-1$ で χ^2- 分布表より採択する。但し χ_0^2 と χ'^2 により定まる区域は最上採択域であるべきにより $P\{\chi^2\geqq\chi_0^2\}=0.95$，$P\{\chi^2>\chi_0'^2\}=0.05$ とすべきである。かくて χ_0^2，$\chi_0'^2$ が定まれば $\chi_0^2\leqq\chi^2\leqq\chi_0'^2$，あるいは

$$\chi_0^2\leqq\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{\theta^2}\leqq\chi_0'^2$$

なるにより

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{\chi_0'^2}\leqq\theta^2\leqq\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{\chi_0^2}$$

ここで

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 \text{ [28]}$$

であるから結局これは

$$\frac{\sqrt{n}\cdot s}{\chi_0'}\leqq\theta\leqq\frac{\sqrt{n}\cdot s}{\chi_0}$$

と書け

$$\Theta=\left(\frac{\sqrt{n}\cdot s}{\chi_0'},\ \frac{\sqrt{n}\cdot s}{\chi_0}\right)$$

28) かかる s を不偏分散と呼ぶ。
増山元三郎：少数例の纒め方と実験計画の立て方，p. 109～111
寺田 一彦：推測統計法，p. 38，等

これを同じ数例で計算すると

$$\sqrt{n}\cdot s=\sqrt{\frac{28}{28-1}}\times\{(192.25-182)^2+(192.25-189)^2+\cdots\cdots+(192.25-205)^2+(192.25-210)^2\}^{1/2}$$
$$=50.965$$

表より　$\chi_0^2=16.151$, $\chi_0'^2=40.113$ $(f=27)$,

$\therefore$ $\chi_0=4.25$, $\chi_0'=6.33$,

$$\frac{\sqrt{n}\cdot s}{\chi_0}=12.68,\quad \frac{\sqrt{n}\cdot s}{\chi_0'}=8.05$$

$\therefore$ $\Theta=(8.05,\ 12.68)$

2° 点推定法

信頼区間 Θ を定める区間推定法に対して母数 θ をただ1個の推定子 (Estimator) $\hat{\theta}$ によつて表現する方法がある。この種の推定法には色々あるがそのうち最著名なのは最尤法 (Maximum likelihood method) と呼ばれるもので以下これについてのみ略述する。すなわち測定見本値 $\xi_i (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ に対して互いに独立な変数 x_i を対応させかつ確率分布 $p(x|\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots\theta_k)$ の代りに $p'(x_1, x_2, \cdots x_n|\theta_1, \theta_2,\cdots, \theta_k)$ を考えることは区間推定法の場合と全く同じ考え方である。さて今格段な見本値の1組 ξ_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ が与えられたとき $p'(\xi_1, \xi_2,\cdots\cdots, \xi_n|\theta_1, \theta_2,\cdots\cdots, \theta_k)$ をただ k 個の θ のみの函数とみなし，p' がこれら θ のある組合せ $\hat{\theta}$ となつた時に最大値 $p'(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots\xi_n|\hat{\theta})$ を採るような $\hat{\theta}$ を求めようとするのである[29]。かかる $\hat{\theta}$ を最尤推定子と呼ぶ。すなわち所与の ξ_i の組に対して

$$\frac{\partial p'}{\partial\theta_1}=0,\ \frac{\partial p'}{\partial\theta_2}\cdots\cdots,\ \frac{\partial p'}{\partial\theta_k}$$

かつ

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial\theta_1^2}<0,\ \frac{\partial^2 p'}{\partial\theta_2^2}<0,\ \frac{\partial^2 p'}{\partial\theta_3^2}<0,\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial^2 p'}{\partial\theta_k^2}<0$$

を満たすような $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots\cdots, \hat{\theta}_k$ を求めるとこれらの θ は $\theta_1, \theta_2,\cdots\cdots, \theta_k$ 軸よりなる k 次空間の1点 $\hat{\theta}$ を確定し，この点で p' は最大値を採る。すなわち点推定法と呼ばれる所以である。例えば次の正規分布において $m=\theta_1$, $\sigma=\theta_2$ とおけば

$$p(x|\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_2}\cdot e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}$$

で書け1組の所与の見本値 $\xi_1, \xi_2,\cdots\cdots, \xi_n$ に対し

$$p'(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots\xi_n|\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_2}\right)^n\cdot e^{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\theta_1)^2}$$

29) 凡ての $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots\theta_k$ に対して p' の最大値が存在しなくてもよい。

これはまた

$$\log p'(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n|\theta_1,\theta_2)$$
$$=-n\log\sqrt{2\pi}\,\theta_2-\frac{1}{2\theta_2^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\theta_1)^2$$

と直せるから

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\log p'=\frac{1}{\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\theta_1)=0$$

より直ちに

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2}\log p'=\frac{1}{\theta_2^3}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\theta_1)^2-n\theta_2^2\right\}=0$$

より

$$\hat{\theta}_2=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\theta_1)^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2}{n-1}}$$

が得られる。ここでもちろん

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\log p'<0,\quad \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\log p'<0$$

となるから上の $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ はそれぞれ最尤推定子であり1つの $\hat{\theta}$ を確定する。

6. 要因の析出と実験計画

今迄述べ来つた検定論推定論をよく吟味してみるとその論議の前提として所与の測定値 ξ_i がある特徴づけられた母集団 π (例えば正規母集団では型 N で形は m, σ で特徴づけられる) からの抽出見本であると言う重要な仮定が默認されてきた。このことは逆に言つて π の特徴自身がある現象の結果として観測された ξ_i を招来するような現象の原因と異なつた原因の下では通用しないことを意味する。従つて上述の検定論，推定論を云々する前にはまづ測定値 ξ_i の値を変動する必然的要因の存在を鮮明にしておくことが先決である。このためにでたらめな測定値 ξ_i の組の中から必然的要因を積極的かつ合理的に析出する方法が実験計画法として用意される。実験計画法の原則では測定値 ξ_i の全変動 s は種々なる必然的要因の効果[30]として現われる因果変動 u と測定値の性質から何時，何処ででも現われる測定誤差，すなわち偶然変動 v の複合したものであつて，ξ_i の全変動 s から u と v を析出した場合に u の大きさが v の中に没入してしまう程度に小さい時は因果変動の存在を認めることが無意味であるとし，u が v よりも卓越するに及んで，因果効果すなわち要因の存在を承認するとしている。要するに問題は u と v とを積極的かつ合理的に析出し得るように，測定値自身を始めから整えてかかることすなわち実験の計画法と，かくして得た測定値の組から u と v を析出しその優劣を比較検定して要因の

30) この効果は通常数要因の相加効果，相乗効果，相殺効果が複合したものである。

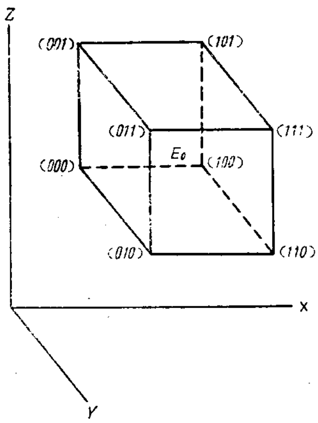
存在を確認する方法である。以下これらの基本的問題について略述する。

1° 要因分析法

広い意味での実験計画法を述べつくすことはもう紙面が許さない。従つて目的が要因の析出にあると言う事から特に重要な要因分析法を説明するに止める。

今ここに測定値 φ を支配する想定要因 X, Y, Z[31] を考え X, Y, Z はそれぞれの大きさ $p,\ q,\ r$ を持つものとし（例えば AE コンクリートの強度を云々する場合に AE 材添加量または空気量を X，セメント使用量を Y，振動器使用の有無を Z とすれば $p,\ q$ は％の大きさで，r は使用の時を 1，使用しない時を 0 としてその大きさを附与できる），軸 X, Y, Z によつて 3 次元の空間を定義する。図—8 のごとくこの空間に 1 つの立方体 E_0 を考えその 8 個の稜角点にそれぞれ

図—8



の要因の加え方及びその効果，すなわち測定値を対応せしめると次表のごとくなるであろう（表—5）。

表—5

稜角点	要因の加え方	効果	φ　測　定　値
(000)	$p_0q_0r_0$	$P_0Q_0R_0$	$\varphi_0+\Delta_0$
(100)	$p_1q_0r_0$	$P_1Q_0R_0$	$\varphi_1+\Delta_1=\varphi_0+\varphi_p+\Delta_1$
(010)	$p_0q_1r_0$	$P_0Q_1R_0$	$\varphi_2+\Delta_2=\varphi_0+\varphi_q+\Delta_2$
(001)	$p_0q_0r_1$	$P_0Q_0R_1$	$\varphi_3+\Delta_3=\varphi_0+\varphi_r+\Delta_3$
(110)	$p_1q_1r_0$	$P_1Q_1R_0$	$\varphi_4+\Delta_4=\varphi_0+\varphi_p+\varphi_q+\varphi_{pq}+\Delta_4$
(011)	$p_0q_1r_1$	$P_0Q_1R_1$	$\varphi_5+\Delta_5=\varphi_0+\varphi_q+\varphi_r+\varphi_{qr}+\Delta_5$
(101)	$p_1q_0r_1$	$P_1Q_0R_1$	$\varphi_6+\Delta_6=\varphi_0+\varphi_r+\varphi_p+\varphi_{rp}+\Delta_6$
(111)	$p_1q_1r_1$	$P_1Q_1R_1$	$\varphi_7+\Delta_7=\varphi_0+\varphi_p+\varphi_q+\varphi_r+\varphi_{pq}+\varphi_{qr}+\varphi_{rp}+\varphi_{pqr}+\Delta_7$

$\varphi_p, \varphi_q, \varphi_r, \varphi_{pq}, \varphi_{qr}, \varphi_{rp}, \varphi_{pqr}$ は夫々 (p_1-p_0)；(q_1-q_0)；(r_1-r_0)；$(p_1-p_0)(q_1-q_0)$；$(q_1-q_0)(r_1-r_0)$；$(r_1-r_0)(p_1-p_0)$；$(p_1-p_0)(q_1-q_0)(r_1-r_0)$ に基く附加効果を表す。又 $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \cdots\cdots, \Delta_7$ は測定誤差を表す。

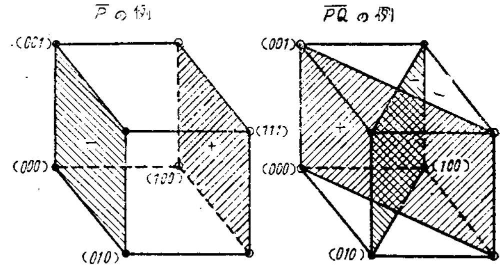
しかる時は各稜角点はそれぞれ単独の事象を代表するから E_0 なる事象集合に対して要因 $X,\ Y,\ Z$, の主効果 $\bar{P},\ \bar{Q},\ \bar{R}$ 及び X と Y，Y と Z，Z と X；X と Y と Z による交互作用の効果 $\overline{PQ},\ \overline{QR},\ \overline{RP},\ \overline{PQR}$ を析出するには

$$\begin{aligned}
\bar{P}&=(P_1Q_0R_0+P_1Q_1R_0+P_1Q_0R_1+P_1Q_1R_1)\\
&\quad-(P_0Q_0R_0+P_0Q_1R_0+P_0Q_0R_1+P_0Q_1R_1)\\
&=(P_1-P_0)(Q_1+Q_0)(R_1+R_0)\\
\bar{Q}&=(P_0Q_1R_0+P_1Q_1R_0+P_0Q_1P_1+P_1Q_1R_1)\\
&\quad-(P_0Q_0R_0+P_1Q_0R_0+P_0Q_0R_1+P_1Q_0R_1)\\
&=(P_1+P_0)(Q_1-Q_0)(R_1+R_0)\\
\bar{R}&=(P_0Q_0R_1+P_0Q_1R_1+P_1Q_0R_1+P_1Q_1R_1)\\
&\quad-(P_0Q_0R_0+P_1Q_0R_0+P_0Q_1R_0+P_1Q_1R_0)\\
&=(P_1+P_0)(Q_1+Q_0)(R_1-R_0)\\
\overline{PQ}&=(P_0Q_0R_0+P_0Q_0R_1+P_1Q_1R_0+P_1Q_1R_1)\\
&\quad-(P_1Q_0R_0+P_0Q_1R_0+P_1Q_0R_1+P_0Q_1R_1)\\
&=(P_1-P_0)(Q_1-Q_0)(R_1+R_0)\\
\overline{QR}&=(P_0Q_0R_0+P_1Q_0R_0+P_0Q_1R_1+P_1Q_1R_1)\\
&\quad-(P_0Q_1R_0+P_0Q_0R_1+P_1Q_1R_0+P_1Q_0R_1)\\
&=(P_1+P_0)(Q_1-Q_0)(R_1-R_0)\\
\overline{RP}&=(P_0Q_0R_0+P_0Q_1R_0+P_1Q_0R_1+P_1Q_1R_1)\\
&\quad-(P_0Q_0R_1+P_1Q_0R_0+P_0Q_1R_1+P_1Q_1R_0)\\
&=(P_1-P_0)(Q_1+Q_0)(R_1-R_0)\\
\overline{PQR}&=(P_1Q_0R_0+P_0Q_1R_0+P_0Q_0R_1+P_1Q_1R_1)\\
&\quad-(P_1Q_1R_0+P_0Q_1R_1+P_1Q_0R_1+P_5Q_0R_0)\\
&=(P_1-P_0)(Q_1-Q_0)(R_1-R_0)
\end{aligned}$$

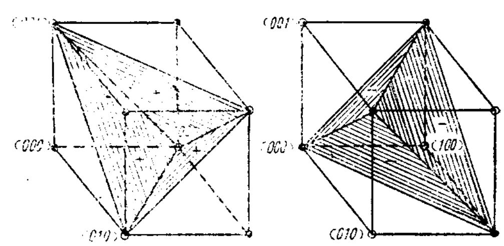
この関係を幾何学的に示せば図—9 のごとくであつてそれぞれの平面上の点の差を表現している。

ここで $\overline{PQ},\ \overline{QR},\ \overline{RP},\ \overline{PQR}$ が零となる場合は交互作用無く相加作用すなわち主効果 $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ のみが現われるのであつてこの場合には要因 X, Y, Z は互いに

図—9 (1)



図—9 (2)



31) このような想定は直感類推経験其の他の知識による専門分野の領域である。

独立し，直交すると言う。零にならない場合は交互作用が働き各要因相互間に何等かの相関関係があり $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RP}$, $\overline{PQR}$ が零より大なるときは相乗効果が，零より小なるときには相殺効果があると言う。さて1回の実験と測定値の組から以上のような関係が得られるが，かかる実験を n 回繰返そうと言う場合には毎回の実験で要因の加え方すなわち処理を時間的にも空間的にも無作意の順序で行い測定値に及ぼす他の影響を可及的に最少限に止めるような工夫が必要である。かかる対策で代表的なものに乱塊法がある。例えば今4回の実験で表—6 の各実験のブロックにおいてどの枠にどの処理を入れるかは全く無作意に決めるのであつて通常乱数表またはカードの類を用いるのが便利である。

表—6

ブロック0	$p_1q_1r_0$ $\varphi_4+\Delta_4$	$p_0q_1r_1$ $\varphi_5+\Delta_5$	$p_0q_0r_1$ $\varphi_3+\Delta_3$	$p_1q_0r_1$ $\varphi_6+\Delta_6$	$p_0q_1r_1$ $\varphi_5'+\Delta_5'$	$p_0q_0r_1$ $\varphi_3'+\Delta_3'$	$p_0q_1r_0$ $\varphi_2'+\Delta_2'$	$p_1q_1r_0$ $\varphi_4'+\Delta_4'$	ブロック1
	$p_0q_0r_0$ $\varphi_0+\Delta_0$	$p_0q_1r_0$ $\varphi_2+\Delta_2$	$p_1q_0r_0$ $\varphi_1+\Delta_1$	$p_1q_1r_1$ $\varphi_7+\Delta_7$	$p_1q_0r_0$ $\varphi_1'+\Delta_1'$	$p_1q_1r_1$ $\varphi_7'+\Delta_7'$	$p_1q_0r_1$ $\varphi_6'+\Delta_6'$	$p_0q_0r_0$ $\varphi_0'+\Delta_0'$	
ブロック2	$p_0q_0r_1$ $\varphi_3''+\Delta_3''$	$p_0q_0r_0$ $\varphi_0''+\Delta_0''$	$p_1q_0r_1$ $\varphi_6''+\Delta_6''$	$p_0q_1r_1$ $\varphi_5''+\Delta_5''$	$p_1q_0r_1$ $\varphi_6'''+\Delta_6'''$	$p_1q_1r_0$ $\varphi_4'''+\Delta_4'''$	$p_1q_0r_0$ $\varphi_1'''+\Delta_1'''$	$p_0q_0r_1$ $\varphi_3'''+\Delta_3'''$	ブロック3
	$p_1q_1r_0$ $\varphi_4''+\Delta_4''$	$p_0q_1r_0$ $\varphi_2''+\Delta_2''$	$p_1q_0r_0$ $\varphi_1''+\Delta_1''$	$p_1q_1r_1$ $\varphi_7''+\Delta_7''$	$p_0q_1r_0$ $\varphi_2'''+\Delta_2'''$	$p_0q_0r_0$ $\varphi_0'''+\Delta_0'''$	$p_1q_1r_1$ $\varphi_7'''+\Delta_7'''$	$p_0q_1r_1$ $\varphi_5'''+\Delta_5'''$	
	要因pqrの大きさの測定誤差は考慮しないものとする。								

さて以上の表ができたら一応各実験ブロック間の無作意性すなわち有意的な変動がないかどうかを検定する必要がある。すなわち表—6 から 表—7 を作り

表—7

処理 j ＼ ブロック i	0	1	2	3	計
$p_0q_0r_0$	$\varphi_0+\Delta_0$	$\varphi_0'+\Delta_0'$	$\varphi_0''+\Delta_0''$	$\varphi_0'''+\Delta_0'''$	$T_{0\cdot}$
$p_1q_0r_0$	$\varphi_1+\Delta_1$	$\varphi_1'+\Delta_1'$	$\varphi_1''+\Delta_1''$	$\varphi_1'''+\Delta_1'''$	$T_{1\cdot}$
$p_0q_1r_0$	$\varphi_2+\Delta_2$	$\varphi_2'+\Delta_2'$	$\varphi_2''+\Delta_2''$	$\varphi_2'''+\Delta_2'''$	$T_{2\cdot}$
$p_0q_0r_1$	$\varphi_3+\Delta_3$	$\varphi_3'+\Delta_3'$	$\varphi_3''+\Delta_3''$	$\varphi_3'''+\Delta_3'''$	$T_{3\cdot}$
$p_1q_1r_0$	$\varphi_4+\Delta_4$	$\varphi_4'+\Delta_4'$	$\varphi_4''+\Delta_4''$	$\varphi_4'''+\Delta_4'''$	$T_{4\cdot}$
$p_0q_1r_1$	$\varphi_5+\Delta_5$	$\varphi_5'+\Delta_5'$	$\varphi_5''+\Delta_5''$	$\varphi_5'''+\Delta_5'''$	$T_{5\cdot}$
$p_1q_0r_1$	$\varphi_6+\Delta_6$	$\varphi_6'+\Delta_6'$	$\varphi_6''+\Delta_6''$	$\varphi_6'''+\Delta_6'''$	$T_{6\cdot}$
$p_1q_1r_1$	$\varphi_7+\Delta_7$	$\varphi_7'+\Delta_7'$	$\varphi_7''+\Delta_7''$	$\varphi_7'''+\Delta_7'''$	$T_{7\cdot}$
計	$T_{\cdot1}$	$T_{\cdot2}$	$T_{\cdot3}$	$T_{\cdot4}$	T
ブロック数 $n=4$　　処理数 $m=8$					

総平方和 $S=\sum^{nm}(\varphi_j{}^i+\Delta_j{}^i)^2-\dfrac{T^2}{nm}$

ブロック間平方和 $S_b=\dfrac{1}{m}\sum^{n}T_{\cdot i}{}^2-\dfrac{T^2}{nm}$

処理間平方和　$S_w=\dfrac{1}{n}\sum^{m}T_{j\cdot}{}^2-\dfrac{T^2}{nm}$

より測定誤差 $\Delta^2=S-S_b-S_w$ を計算し S_b，と Δ^2 の自由度 $f_b=n-1=3'$ $f_\Delta=f_b\cdot f_w=(n-1)\ (m-1)=21$ であるからそれぞれの分散

$$u_b{}^2=\frac{S_b}{f_w},\quad v^2=\frac{\Delta^2}{f_\Delta}$$

を求め，更に

$$F^{f_b}_{f_\Delta}=\frac{u_b{}^2}{v^2}$$

を作ると $F^{f_b}_{f_\Delta}$ は自由度 f_b,f_Δ で F- 分布に従うから予め定めた有意水準 $P\{F\geqq F_0\}=\alpha$[32] に対応する F_0 よりも $F^{f_b}_{f_\Delta}$ が大とならなければブロック間に有意的な変動は無いものとして計算を進め，もし $F^{f_b}_{f_\Delta}$ が F_0 より大となればもう一度乱塊法をやり直し無作意化を計る必要がある。

以上の検定で各ブロックの無作意性が確認されたならば表—8 により各主効果及び交互作用の効果に対して各処理の項が具備する符号を先出の $\overline{P}$, $\overline{Q}$,…… $\overline{P,Q,R}$ の式から検出する。

表—8

主効果及交互作用効果 ＼ 処理	$p_0q_0r_0$	$p_1q_0r_0$	$p_0q_1r_0$	$p_0q_0r_1$	$p_1q_1r_0$	$p_0q_1r_1$	$p_1q_0r_1$	$p_1q_1r_1$
	$P_0Q_0R_0$	$P_1Q_0R_0$	$P_0Q_1R_0$	$P_0Q_0R_1$	$P_1Q_1R_0$	$P_0Q_1R_1$	$P_1Q_0R_1$	$P_1Q_1R_1$
$\overline{P}$	−	+	−	−	+	−	+	+
$\overline{Q}$	−	−	+	−	+	+	−	+
$\overline{R}$	−	−	−	+	−	+	+	+
$\overline{PQ}$	+	−	−	+	+	−	−	+
$\overline{QR}$	+	+	−	−	−	+	−	+
$\overline{RP}$	+	−	+	−	−	−	+	+
$\overline{PQR}$	−	+	+	+	−	−	−	+

一方先述の処理間平方和 S_w はもともと各主効果並びに交互作用の効果に基因するものであるから表—8 を利用して S_w をこれら主効果，交互作用効果の割合で分割すると[33]，

$\overline{P}$ に基因する平方和

$$=\frac{1}{nm}\,(-T_{0\cdot}+T_{1\cdot}-T_{2\cdot}-T_{3\cdot}+T_{4\cdot}-T_{5\cdot}+T_{6\cdot}+T_{7\cdot})^2$$

$\overline{Q}$ に基因する平方和

$$=\frac{1}{nm}(-T_{0\cdot}-T_{1\cdot}+T_{2\cdot}-T_{3\cdot}+T_{4\cdot}+T_{5\cdot}-T_{6\cdot}+T_{7\cdot})^2$$

$\overline{R}$ に基因する平方和

$$=\frac{1}{nm}\,(-T_{0\cdot}-T_{1\cdot}-T_{2\cdot}+T_{3\cdot}-T_{4\cdot}+T_{5\cdot}+T_{6\cdot}+T_{7\cdot})^2$$

$\overline{PQ}$ に基因する平方和

$$=\frac{1}{nm}\,(+T_{0\cdot}-T_{1\cdot}-T_{2\cdot}+T_{3\cdot}+T_{4\cdot}-T_{5\cdot}-T_{6\cdot}+T_{7\cdot})^2$$

$\overline{QR}$ に基因する平方和

$$=\frac{1}{nm}\,(+T_{0\cdot}+T_{1\cdot}-T_{2\cdot}-T_{3\cdot}-T_{4\cdot}+T_{5\cdot}-T_{6\cdot}+T_{7\cdot})^2$$

$\overline{RP}$ に基因する平方和

$$=\frac{1}{nm}\,(+T_{0\cdot}-T_{1\cdot}+T_{2\cdot}-T_{3\cdot}-T_{4\cdot}-T_{5\cdot}+T_{6\cdot}+T_{7\cdot})^2$$

$\overline{PQR}$ に基因する平方和

$$=\frac{1}{nm}(-T_{0\cdot}+T_{1\cdot}+T_2+T_3-T_4-T_{5\cdot}-T_{6\cdot}+T_{7\cdot})^2$$

計　$S_w=\dfrac{1}{n}\sum^{m}T_{j\cdot}{}^2-\dfrac{T^2}{nm}$，ただし $n=4,\ m=8$

32) α は普通 0.1～0.01 の範囲にとる。
33) 応力学会：応用統計学 5. p. 31

これら平方和の自由度はすべて常に $f=1$ であるから これらの分散もこれと同値となりただちに各主効果，交互作用効果ごとの

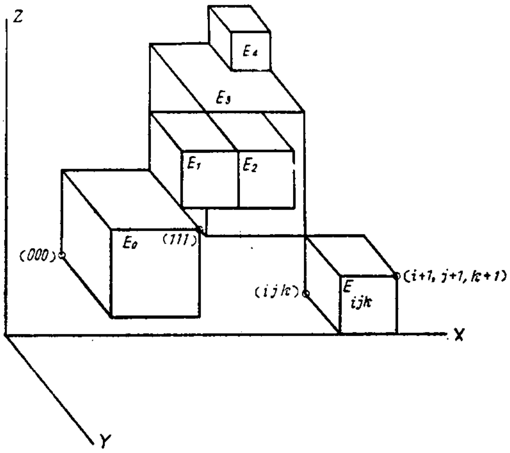
$$F^{f}_{f\Delta}=\frac{\text{主効果あるいは交互作用効果に基づく分散}}{v^2}$$

$$v^2=\frac{\Delta^2}{f_\Delta}$$

が計算されて，これら $F^{f}_{f\Delta}$ が予め定められた有意水準 $P\{F\geqq F_0\}=\alpha$ に対応する F_0 よりも大となつたものがあればその主効果あるいは交互作用の効果は有意であるとし，かかる要因の存在を承認しなければならない。もし $F^{f}_{f\Delta}$ が F_0 より大とならなければそれの効果はないものとして，かかる要因に対する要因別化は考慮する必要がない。また始めから交互作用を含まないような現象の測定値からは $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ 以外の効果に対する $F^{f}_{f\Delta}$ の値は当然零に近い値となつて現われる。

以上の方法は要因が X, Y, Z, でそれぞれの大きさが $p_0, p_1, p_2, \cdots\cdots, p_i, \cdots\cdots$; $q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_j, \cdots\cdots$; $r_0, r_1, r_2, \cdots\cdots r_k, \cdots\cdots$ で与えられるような場合にも拡張される。この場合には可能なる種々の組合せ p_i, q_j, r_k と p_{i+1}, q_{j+1}, r_{k+1} とにおいて上述の方法で E_{ijk} を考えればよい（図—10）。また要因そのものの数が3以上で X, Y, Z, V, W, となるような場合には相当次元の空間で先と同じ方法が適用される。

図—10



さて以上の要因析出と実験計画を数例によつて示そう。今ある材料 A に補強材 B, C, D を用意し，これらを単独に添加したりあるいは併用してその効果を強度試験により検べた結果，4回の試験で表—9 のような乱塊法による資料を得た。B, C, D の主効果，交互作用の有無ありやと言う問題である。ただし表中 p_0, q_0, r_0 は B, C, D を全然加えないことを意味し，p_1, q_1, r_1 は B, C, D をそれぞれ $\beta\%$, $\gamma\%$, $\delta\%\times$A の重量比で加えたことを意味するものである。

表—9

ブロック0	$p_0q_0r_1$ 291	$p_1q_0r_1$ 398	$p_1q_1r_0$ 312	$p_0q_1r_1$ 373	$p_1q_0r_1$ 407	$p_1q_1r_0$ 324	$p_0q_1r_0$ 272	$p_0q_0r_1$ 306	ブロック1
	$p_0q_0r_0$ 101	$p_0q_1r_0$ 265	$p_1q_0r_0$ 106	$p_1q_1r_1$ 540	$p_1q_0r_0$ 89	$p_1q_1r_1$ 449	$p_0q_1r_1$ 338	$p_0q_0r_0$ 106	
ブロック2	$p_1q_1r_0$ 323	$p_0q_0r_0$ 87	$p_0q_1r_1$ 324	$p_1q_0r_1$ 423	$p_0q_1r_1$ 361	$p_0q_0r_1$ 272	$p_1q_0r_0$ 103	$p_1q_1r_0$ 324	ブロック3
	$p_0q_0r_1$ 334	$p_0q_1r_0$ 279	$p_1q_0r_0$ 128	$p_1q_1r_1$ 471	$p_0q_1r_0$ 302	$p_0q_0r_0$ 131	$p_1q_1r_1$ 437	$p_1q_0r_1$ 445	
	数字の単位は kg/cm² とする.								

この表の各試験ブロック間に有意的な変動がないことは表—10で確かめられる。

表—10

処理＼ブロック	0	1	2	3	計
$p_0q_0r_0$	101	106	87	131	425
$p_1q_0r_0$	106	89	128	103	426
$p_0q_1r_0$	265	272	279	302	1128
$p_0q_0r_1$	291	306	334	272	1203
$p_1q_1r_0$	312	324	323	324	1283
$p_0q_1r_1$	373	338	324	361	1396
$p_1q_0r_1$	398	407	423	445	1673
$p_1q_1r_1$	450	449	471	437	1807
計	2296	2291	2369	2375	9331

変動因	平方和	自由度	分散	$F^{f_w}_{f_\Delta}$
ブロック	774.1	3	258.1	0.744 $<F_0$
処理	458718.0	7	65531.1	但し $\alpha=0.05$
誤差	7287.6	21	347.0	$F_0=3.07$
計	466779.7	31		

次に B, C, D の主効果 $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ や B と C, C と D, D と B 及び B と C と D の交互作用効果 $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RP}$, 及び $\overline{PQR}$ に基づく分散並びにこれらの測定誤差 v^2 との分散比 $F^{f}_{f\Delta}$ を計算すると表—11 のごとくなる。結局言えることは確かさ $1-\alpha=1-0.05=95\%$ で補強材 B, C, D の主効果 $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ はいずれも認めるべきであり，また C と D の交互作用も承認しなければならないと言うことである。

表—11

主効果 相互作用の効果	分散又は平方和	自由度	$F^{f}_{f\Delta}$
$\overline{P}$	3,465.3	1	9. $>F_0$
$\overline{Q}$	161,170.0	1	464. $>F_0$
$\overline{R}$	278,817.8	1	803. $>F_0$
$\overline{PQ}$	344.5	1	0.99 $<F_0$
$\overline{QR}$	13,986.3	1	40. $>F_0$
$\overline{RP}$	810.0	1	2.33 $<F_0$
$\overline{PQR}$	124.0	1	0.36 $<F_0$
但し $\alpha=0.05$　$F_0=4.33$			

すなわち E_0 の周辺とその近傍においては強度の測定値 ξ は少なくとも次の5層の群によつて合理的に観察され得る。

A に B, C, D いずれも添加しない場合の ξ の群
A に B のみを添加した場合の ξ の群
A に C のみを添加した場合の ξ の群
A に D のみを添加した場合の ξ の群
A に C と D を併用した場合の ξ の群

これらの群においてこそ stochastic であり先述の検定推定の方法が意味と効力を発揮する。

7. あ と が き

以上で推計学の基本的問題を略説したが，このほかにも重要な問題として相関論がある。残念ながら紙面の都合でこれに触れることはできなかつた。いわゆる推計学と称せられる広い分野はこれら基本的問題を根幹として展開されていると言つても過言でない。

私のいささかの講座が冒頭で述べた意味で少しでも御役に立てば幸甚である。最後に参照されたい若干の参考書を紹介する。

参 考 文 献

寺田一彦：入門例解推測統計法　入門者に一番理解し易いと思う。

佐藤良一郎：数理統計学
応力学会：応用統計学（第5章）
増山元三郎：少数例の纒め方と実験計画の立て方
Snedecor : Statistical Method 1950（訳本がある）
（以上）数理統計学として一応読まれるべきもの。

奥津　恭：工場における推計学の問題と解き方：例題本意
S.S Wilks : Mathematical Statistics, 1944
R.A. Fisher : Statistical Methods for Research Workers. 1950