

# 報 文

UDC 627.821.2.042.7

## 土堰堤の振動に関する3次元の考察\*\*

— 自由振動について —

正 員 畑 中 元 弘\*

### THREE DIMENSIONAL CONSIDERATION ON THE VIBRATION OF EARTH DAMS.

— ON THE FREE VIBRATION —

(JSCE Oct. 1952)

*Motohiro Hatanaka, C.E. Member.*

**Synopsis** In order to reveal the earthquake-proof property of earth dam, some three dimensional consideration is developed in this paper. Namely, introducing the fundamental differential equation of the vibration of earth dam in the case of no water in the reservoir, the theoretical solution of this equation on free vibration was obtained, and its result was ascertained by model tests with agar-agar.

**要旨** 土堰堤の耐震性を究明するために、若干の3次元の考察を行った。すなわち貯水池空虚時の土堰堤の3次元の振動を表わす基礎微分方程式を導いて自由振動の理論解を求め、その結果を寒天による模型実験で確かめた。

#### 1. 前書き

土堰堤に働く地震力の影響を考慮して動力学的な取扱いをする場合は、曲げ振動よりもむしろ剪断振動を問題とすべきことが明らかにされている<sup>1)</sup>。しかしこの問題の従来の研究<sup>2)</sup>は2次元の場合に限られ、両側の地山の影響が無視されているので、自由振動週期、振巾などは実際とかなり相違するのではないかと思われる。

この点を明らかにするために、本文では堰堤の両側と底面とが矩形状の地山に完全に固定された場合について、堰堤背面に水のない最も簡単なときを考え、自由振動に対する理論解を求め、その結果を寒天による模型実験で確かめることにしたのである。

#### 2. 土堰堤の剪断自由振動の理論解

土堰堤の実際断面は梯形であるが、截頭部分が振動の週期、振巾などに及ぼす影響は小さいので<sup>1)</sup>、基本三角形断面と仮定し、堤体の底面及び両側面が固定され上端が自由な場合をとり、 $x$ 方向の剪断振動を考えよう。この場合剪断応力の分布が $x$ 方向に一様であると仮定すると、図-1に斜線を施した微小体に対し、 $z$ 軸に垂直な面内で $x$ 方向に働く力は、

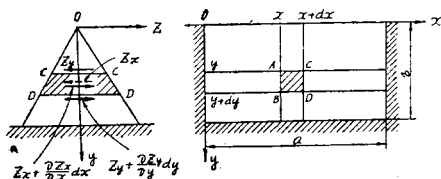
$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial w}{\partial z} + \gamma_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) l dx dy$$

\* 京都大学助教授，防災研究所

\*\* 関西工学連合講演会で発表したものに加筆したものである。

ここに  $w$  は  $x$  方向の変位,  $l$  は微小体の  $x$  方向の長さ,  $G$  及び  $\gamma_t$  はそれぞれ堤体材料の剛性率及び剪断

図-1



粘性係数である。同様にして  $y$  軸に垂直な面内で  $x$  方向に働く力は,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( Gl \frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_t l \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) dx dy$$

となる。従つて土堰堤の剪断振動の微分方程式は、密度を  $\rho$  として,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( G l \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_t l \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \frac{1}{\rho l} \frac{\partial}{\partial y} \left( Gl \frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_t l \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \dots\dots\dots (1)$$

と表わされる。今  $\rho, G, \gamma_t$  は  $x$  及び  $y$  方向に不変であるとし、3 角形断面の場合  $l = my$  と書けることを考えて式 (1) を書き改めると,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = C_0^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C_1^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) + C_0^2 \frac{1}{y} \frac{\partial w}{\partial y} + C_1^2 \frac{1}{y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \dots\dots\dots (2)$$

となる。ただし  $C_0^2 = G/\rho$ ,  $C_1^2 = \gamma_t/\rho$  である。

今自由振動を考え境界条件を

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0, & (w)_{x=a} &= 0 \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} &= 0, & (w)_{y=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

とし、初期条件は最も一般的な場合を考慮して,

$$(w)_{t=0} = f(x, y), \quad (w)_{t=0} = F(x, y) \dots\dots\dots (4)$$

とする。式 (2) の解は  $n_0 > \varepsilon$  として次のごとく書き表わされる。

$$w = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \{ C J_0(\gamma y) + D Y_0(\gamma y) \} \times e^{-\varepsilon t} (E \cos \sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2} t + F \sin \sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2} t) \dots (5)$$

ただし  $n_0^2 = \alpha_0^2 \alpha^2$ ,  $\varepsilon = \alpha_1^2 \alpha^2 / 2$ ,  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

ここに  $A \sim F$  は境界条件及び初期条件によつて定まる常数である。境界条件 (3) より固有函数及び固有値を決定し式 (5) を書き改めると

$$w = \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot J_0 \left( \frac{\lambda_s}{b} y \right) e^{-\varepsilon t} (E_0 \cos \sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2} t + F_0 \sin \sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2} t) \dots\dots\dots (6)$$

となる。ただし  $E_0 = B \cdot C \cdot E$ ,  $F_0 = B \cdot C \cdot F$  としてある。

上式の  $n, s$  に対する和を全部とつたものも境界条件

を満足する微分方程式の解であるから一般に,

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot J_0 \left( \frac{\lambda_s}{b} y \right) e^{-\varepsilon t} (E_{0ns} \cos \sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2} t + F_{0ns} \sin \sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2} t) \dots\dots\dots (7)$$

となる。この式に初期条件 (4) を代入して  $E_{0ns}$ ,  $F_{0ns}$  を求めると,

$$E_{0ns} = \frac{4}{ab^2} \frac{1}{[J_1(\lambda_s)]^2} \int_0^a \int_0^b f(\lambda, \mu) \sin \frac{n\pi}{a} \lambda \cdot J_0 \left( \frac{\lambda_s}{b} \mu \right) \times \mu d\lambda d\mu \dots\dots\dots (8)$$

$$F_{0ns} = \frac{4}{ab^2} \frac{1}{\sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2} [J_1(\lambda_s)]^2} \left[ \varepsilon \int_0^a \int_0^b f(\lambda, \mu) \sin \frac{n\pi}{a} \lambda \cdot J_0 \left( \frac{\lambda_s}{b} \mu \right) \mu d\lambda d\mu + \int_0^a \int_0^b F(\lambda, \mu) \sin \frac{n\pi}{a} \lambda \cdot J_0 \left( \frac{\lambda_s}{b} \mu \right) \mu d\lambda d\mu \right] \dots\dots\dots (9)$$

となる。従つて式 (8), (9) を用いて式 (7) は次のごとく書き表わされる。

$$w = \frac{4}{ab^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\varepsilon t} \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot J_0 \left( \frac{\lambda_s}{b} y \right) \int_0^a \int_0^b [f(\lambda, \mu) \times \cos \sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2} t + \frac{\sin \sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2} t}{\sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2}} \{ \varepsilon f(\lambda, \mu) + F(\lambda, \mu) \}] \times \sin \frac{n\pi}{a} \lambda \cdot J_0 \left( \frac{\lambda_s}{b} \mu \right) \mu d\lambda d\mu \dots\dots\dots (10)$$

また自由振動週期  $T_0$  は次式で与えられる。

$$T_0 = 2\pi / \sqrt{n_0^2 - \varepsilon^2} \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$n_0^2 = C_0^2 (n^2 \pi^2 / a^2 + \lambda_s^2 / b^2), \quad \varepsilon = C_1^2 / 2 \cdot (n^2 \pi^2 / a^2 + \lambda_s^2 / b^2)$$

$$C_0^2 = G/\rho, \quad C_1^2 = \gamma_t/\rho, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

### 3. 土堰堤の自由振動週期

自由振動週期を計算するためには堤体土の剛性率  $G$  密度  $\rho$ , あるいは横波の伝播速度  $C_0$  及び、剪断粘性係数  $\gamma_t$  を知る必要がある。しかしこれらの値は堰堤について直接測定したものはほとんどないようである。一般に土の上記の値は土の種類によつてことなり、また同種の土でも含水量によつてきわめて広範囲の変化をするものであるが、飯田氏は約 70 種の土を測定し、C.G.S. 単位で  $\rho = 1.4 \sim 1.7$ ,  $G = 10^7 \sim 10^8$ ,  $\gamma_t = 10^4 \sim 10^5$ ,  $C_0 = 5000 \sim 25000$  の値を与えている<sup>3)</sup>。これらの値は実験室で共振法により測定した動的な値であつて、直接堤体について測定したものではないが、従来の静的試験の値よりも本問題の場合は適当であると考えられる。上記の値を参考とし、堰堤の高さが 10, 20, 30, 及び 40 m の場合につき、横波の伝播速度  $C_0$  をそれぞれ 50, 70, 100, 150 及び 200 m/s として、式 (11) による第 1 次自由振動週期 ( $n=1, s=1$ ) を求めて図示したのが図-2 である。なお剪断粘性係数

図-2 土堰堤の第1次自由振動週期  
Free vibration period of the 1st order of earth dam

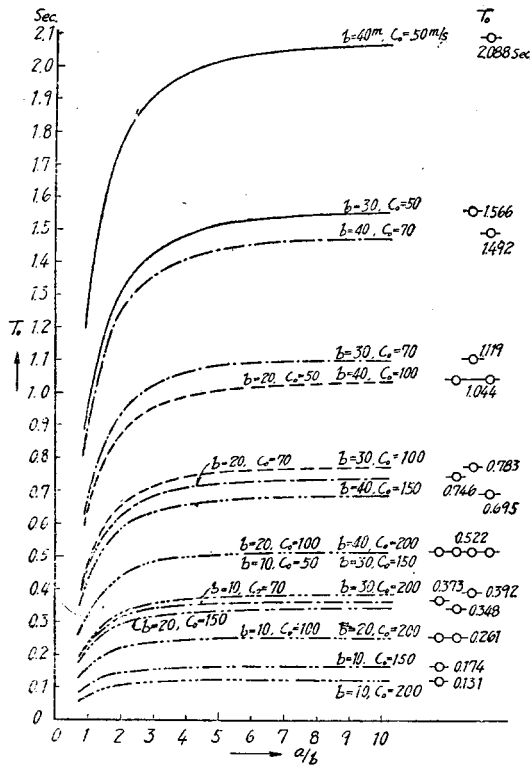
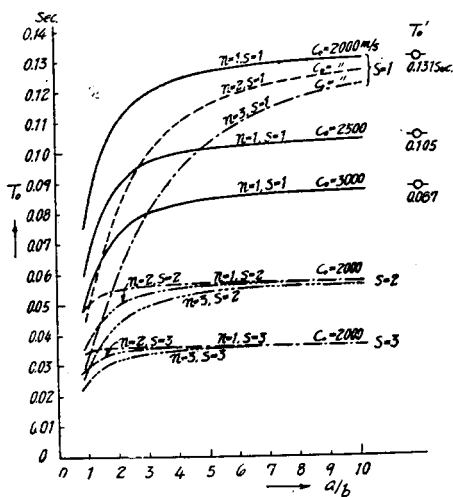


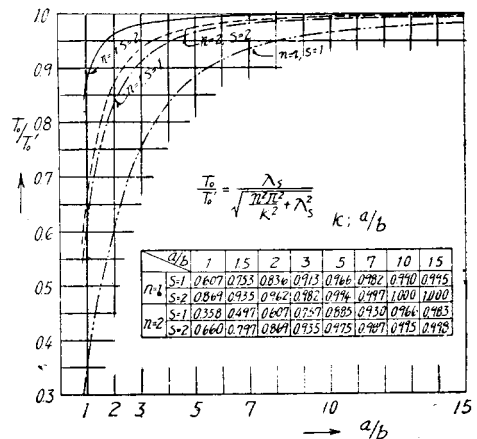
図-3 コンクリート堰堤の自由振動週期 ( $b=100$  m)  
Free vibration period of concrete dam ( $b=100$  m)



が上述のごとき値の場合、自由振動週期に及ぼす粘性の影響はきわめて小さいので、同図には  $C_1^2=0$  従つて  $\varepsilon=0$  としてある。

コンクリート重力堰堤が地震力を受けたような場合は剪断振動よりも曲げ振動が主であるといわれているが<sup>4)</sup>、試みに剪断自由振動週期を前式によつて計算すると図-3 のようである。ただし高さ 100 m に対する値であつて、 $C_0=2000, 2500$  及び  $3000$  m/s としたが、実測によるとコンクリート堰堤の  $C_0$  の値はほぼ  $2600$  m/s 程度のものである<sup>5)</sup>。なお  $C_0=2000$  m/s の場合は、長さ方向及び高さ方向の第3次振動までの値を示しておいた。

図-4 3次元自由振動週期  $T_0$  と2次元自由振動週期  $T_0'$  との関係  
Relation between free vibration period  $T_0$  (3 dimensions) and  $T_0'$  (2 dimensions)



次に3次元的に考えた場合と2次元的に考えた場合の自由振動週期を比較してみると、式(11)で  $k=a/b$  とおき  $C_1^2=0$  の場合を考えると、

$$T_0 = 2\pi b / C_0 \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{k^2} + \lambda_s^2}, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad s=1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

となつて、 $k$  が一定の場合には  $T_0$  は高さ  $b$  に比例する。堰堤の長さ  $a$  が高さ  $b$  に比べて非常に大きいときの  $T_0$  の値を  $T_0'$  とすると、

$$T_0' = 2\pi b / C_0 \lambda_s \quad (13)$$

となり、2次元的に考えた場合<sup>6)</sup>と一致する。従つて

$$\frac{T_0}{T_0'} = \lambda_s / \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{k^2} + \lambda_s^2} \quad (14)$$

となる。図-4 は第1次及び第2次自由振動週期に対するこの関係を示したもので、2次元と考えることによる自由振動週期の誤差を5%以内とすれば、第1次振動週期では高さの約4倍以上の長さがあればよいが、第2次振動までを考える場合にはこの値が約8倍以上必要であり、誤差を10%以内とすると第1次振動及び第2次振動についてそれぞれ約3倍及び6倍以上の長さが必要であることがわかる。

図-5 土堰堤の自由振動における節線  
Nodal line in the free vibration of earth dam

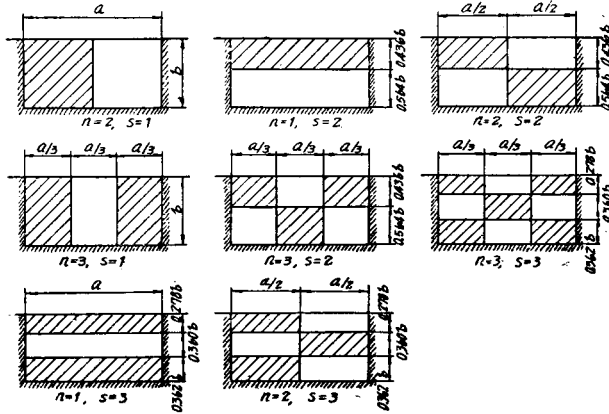
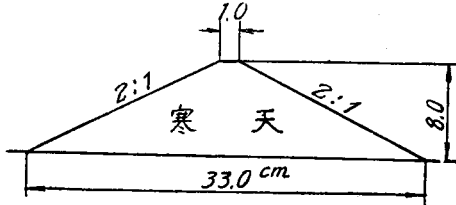


図-6 寒天模型断面図  
Cross section of agar-agar model

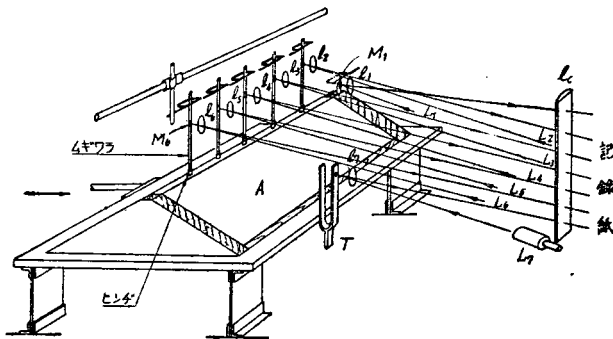


4. 節線について

自由振動の節線では時間  $t$  の値いかにかわらず変位  $w=0$  であるから、長さの方向に  $n$  次、高さの方向に  $s$  次の自由振動をする場合の節線は、式 (7) より  $\sin(n\pi/a \cdot x) \cdot J_0(\lambda_s/b \cdot y) = 0$  の解として次のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x &= a/n, 2a/n, 3a/n, \dots, (n-1)a/n \\ y &= \lambda_1/\lambda_s \cdot b, \lambda_2/\lambda_s \cdot b, \lambda_3/\lambda_s \cdot b, \dots, \lambda_{s-1}/\lambda_s \cdot b \end{aligned} \right\} \dots \quad (15)$$

図-7 実験装置  
Experiment apparatus



$L_1 - L_7$	光源	$\ell_1 - \ell_7$	レンズ*
$M_1 - M_7$	鏡	T	刻時用時計
$\ell_c$	写真レンズ*	A	土堰堤模型

従つて節線はいずれも直線で  $n+s-2$  個あり、 $n=1, s=1$  の場合は節線がないことがわかる。図-5 は第3次振動までの節線の形を示したもので、節線に囲まれた相隣る部分の変位が反対である。すなわち斜線を施した部分の変位が正であると、斜線を施していない部分は負となる。

5. 模型実験

剪断振動を考える場合、前記 1. で述べた仮定によると堰堤断面が三角形であれば理論的に法面勾配に無関係となり、またこの場合の2次元の詳細な実験も行われているので<sup>1)</sup>、堰堤模型は図-6のごとく高さ  $b=8\text{cm}$  の対称断面を使用した。模型の長さ  $a$  は  $24\text{cm}$  ( $a/b=3$ )、 $40\text{cm}$  ( $a/b=5$ )、 $56\text{cm}$  ( $a/b=7$ ) の3種とし、実天の濃度は重量比で3%とした。模型の製作には木製の型枠を用い、両側面及び底面の固定辺は粗面とし、更に小釘を一面に打つて頭を出しておき、固定条件の完全を期した。

実験は強制振動による共振及び電動機のスイッチを切つて振動合を急制動させた場合の2つの方法により、このときの自由振動週期及び振動形状を測定した。実験装置は著者がかつて用いたものと同一で<sup>2)</sup>、測定装置の関係上振動合の振巾は  $0.06 \sim 0.2\text{mm}$  として使用した。図-7は実験装置の概要を示したものである。

振動形状について 図-8の測点は土堰堤模型上端及び中央断面の振巾分布を示したもので、実測値は4~5回の測定値の平均であり、すべて振動の腹の点の振巾を1としてある。図中 a), b) は第1次振動の場合で、a) は長さ方向の振巾の分布、b) は高さ方向の振巾分布である。c) は高さ方向に第1次、長さ方向に第2次の振動をした場合である。

次に図-8の実測値と理論値とを比較するために、式 (7) から堰堤頂面及び振動の腹の点の断面における振巾分布を、振動の腹の点の振巾を1として求めると次のようになる。

$n=1, s=1$  の場合は、  
堰堤頂面の長さ方向の分布、  
 $w_{x,0}/w_{a/2,0} = \sin \pi/a \cdot x \dots \dots \dots (16)$

中央断面の高さ方向の分布、  
 $w_{a/2,y}/w_{a/2,0} = J_0(\lambda_1/b \cdot y) \dots \dots \dots (17)$

更に  $n=2, s=1$  の場合には、  
 $w_{x,0}/w_{a/4,0} = \sin \frac{2\pi}{a} x, \dots \dots \dots (18)$

$w_{a/4,y}/w_{a/4,0} = J_0\left(\frac{\lambda_1}{b} y\right) \dots \dots \dots (19)$

となる。ただし上式の  $w$  の添字は  $x, y$  の座標の位置を示す。図-8 の実線はこれらの式 (16), (17), (18) による計算値を示したもので、実験値はこの値とかな

りよく一致していることがわかる。

自由振動周期について 土堰堤模型の自由振動周期の実測値及び計算値を比較すると表-1 のようである。

表-1 土堰堤模型の自由振動周期 (Free vibration period in the model tests of earth dam)

$a/b$	2次元自由振動周期の実測値 $T_0'$ (s)	$C_0$ (cm/s)	$n=1, s=1$ の場合の3次元自由振動周期 $T_{1,1}$			$n=2, s=1$ の場合の3次元自由振動周期 $T_{2,1}$			$T_{1,1}/T_0'$		$T_{2,1}/T_0'$	
			実測値 (s)	計算値 (s)	誤差 (%)	実測値 (s)	計算値 (s)	誤差 (%)	実測値	計算値	実測値	計算値
3	0.0440	474.0	0.0400	0.0402	0.5	0.0250	0.0334	25	0.909	0.913	0.568	0.757
5	0.0482	432.0	0.0470	0.0466	-0.9	0.0350	0.0426	18	0.975	0.966	0.726	0.885
7	0.0530	394.5	0.0520	0.0520	0	0.0420	0.0493	15	0.982	0.982	0.792	0.930

註: 誤差は (計算値-実測値)/計算値, によって求めた。

表中  $T_0'$  は3次元模型の測定を終えてから、模型の中央部長さ 15cm を残して両側の部分を切り取り、2次元模型とした場合の第1次自由振動周期の測定値であつて、 $C_0$  はこの  $T_0'$  より式(13)で計算した値である。また3次元自由振動周期  $T_{1,1}$  及び  $T_{2,1}$  の計算値は2次元の場合の実測値  $T_0'$  を用い式(14)で計算した値である\*。上表からわかるように第1次振動の場合には実験値と計算値とはほとんど一致しているが、長さの方向に第2次振動をする場合には両者の間に 15~25% の相異があり、高さに比べて長さが短い程その差が甚しい。これはおそらく高次の振動になると曲げの影響が大ききいてくるためでないかと考えられる。しかしながらまだ模型の数も少なく、法面勾配もただ1種類であるので、この点を明らかにすべく更に実験を継続中であり、更に土を用いた実験も行いたいと考えている。

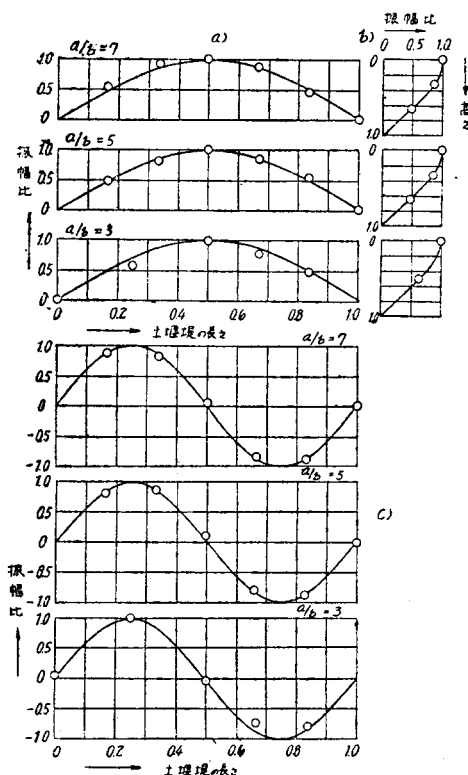
## 6. 結語

土堰堤の耐震性に関する従来の2次元的研究より更に一步を進めて3次元的な考察を行い、堰堤背面に水のない最も簡単な場合につき、まず自由振動を検討したが、この場合自由振動周期は堰堤の長さが高さの約3~4倍以上になると2次元的に取扱つてよいようであり、また従来の大地震の主要動の週期に対し、共振あるいはそれに近い現象が起り得る程度の値である\*\*こ

\* 寒天模型の  $G, \rho$  あるいは  $C_0$  を直接測定して式(12)から計算すべきであるが、2次元と3次元の取扱いの相異を調べるために式(14)によつた。なお模型から直方体を切り出して振動法で  $C_0$  を測定したが上表の値との差は 2.5% 程度であつた。

\*\* 地震動によつて構造物が共振現象を呈するということは地震動週期の非正常性からも議論が多く、これについては別に論じたいと思う。

図-8 振動振巾の分布  
Distribution of amplitude



とがわかつた。

しかし本文は土堰堤の耐震性を究明し、その設計を合理化するための1つの方向を示したに過ぎず、弾性波法や動力学的地盤調査法<sup>7)</sup>等による堤体土の弾性諸常数の測定、地震力による堰堤並びに地盤の振動観測

等を行う必要がある。また強制振動を取扱い振巾や剪断応力を論じなければならないが、これについては振動初期及び非定常な外力による過渡的現象等とともに別に述べたいと考えている。

終りに種々御指導を賜わつた京都大学教授石原博士及び、実験の援助を願つた同学学生小川正信君に深謝の意を表する。

#### 参考文献

- 1) 松村孫治：土堰堤の地震動による変形，内務省土木試験所報告，28号，昭 9.10
- 2) 1) 及び畑野正：重力堰堤に作用する地震力の影響，昭. 22, 23 年度土木学会論文集，昭 24. 3

- 3) 飯田波事：地震研究所彙報，13号昭.10, 14号昭.11, 15号昭.12, 16号昭.13, 18号昭.15.
- 4) 前掲 2) の畑野博士論文
- 5) J.R. Leslie and W.J. Cheesman: An ultrasonic method of studying deterioration and cracking in concrete structures. J.A.C.I. Sept. 1949 p. 30
- 6) 畑中元弘：突堤の自由振動について，土木学会誌，36卷10号，昭 26. 10
- 7) 鈴木武夫：動力学的基礎地質調査法，土木技術，昭. 26. 7

(昭. 27. 5. 19)

UDC 628. 22 : 532. 543

## 道路側溝に関する水理学的研究\*\*

准員 石原安雄\*

### HYDRAULIC STUDIES OF ROAD GUTTER

(JSCE Oct. 1952)

Yasuo Ishihara, C.E. Assoc. Member.

**Synopsis** As an example of conduits with lateral water supply, the model tests of a road gutter were carried out and their experimental results were discussed, referring to the theoretical equations derived from the laws of energy and momentum. And the boundary conditions necessary in the solution of these equations, i.e. the position of control section and the depth of water at the end of conduits when the control section did not appear, were also discussed in details.

**要旨** 横から流入のある水路の1例として、道路側溝の模型実験を行い、その結果をエネルギー及び運動量の法則から導かれた理論式と比較検討するとともに、これらの理論式を解くのに必要な境界条件、すなわち Control section の位置及びそれが現われない場合の水路端の水深についても詳細に吟味したものである。

#### 1. 緒言

道路側溝、Side spillway 等のごとく横からの流入のある水路の水理学的性質については、古くは J. Hinds<sup>1)</sup>、P.W. Werner<sup>2)</sup> 等の研究があり、最近は本

間教授<sup>3)</sup>、岩垣助教授<sup>4)</sup> の路面排水の研究がある。しかし多くは理論的考察のみで、実験と比較したものは J. Hinds の Side spillway に関する研究以外はほとんど見当たらない。本文は木製モルタル仕上げの道路側溝模型で詳細に実験し、水面形、Control section の位置、雨水枘の蓋などが流れに及ぼす影響を調べるとともに、その結果をエネルギー及び運動量の法則から導かれた理論式と比較し、不等速流に対してはいずれの理論式が合理的であるかを明らかにしたものである。

#### 2. 基礎式

座標原点を水路上流端底面上中央にとり、 $x$  軸を底面に沿い下流方向に、 $y$  軸をそれに垂直上方に、 $z$  軸を水路巾  $W$  の方向にとれば、連続の条件は図-1 の記号を用いて次のごとく表わされる。

\* 京都大学大学院特別研究生，工学部土木工学教室

\*\* 昭 27. 5. 25, 土木学会第 8 回年次学術講演会にて発表