講　　座

UDC 519.2

土木推計学 II
推計学のねらいと本質
（前　　編）

正員　田　原　保　二*

1. まえがき

私の講座は推計学の本流をなす検定論を前編とし，推定論，分散分析，相関分析，実験計画，最後に資料の纒め方等の応用解析の問題を後編とする。両編を通じとかく枝葉の方法論に偏しがちな在来の表現を避けて推計学の本質の認識に努めた。またこの講座は広く現場の人々に読んで戴き，これ等の人々が推計学への関心と妙味を感得する事を念じている。けだしこの人達が推計学の正しいねらいを会得し現場で日々生起している現象をこれとの結び着きにおいて観察し，合理的な資料の蒐集と整理，取纒めができるならば，一見さ細な出来事の中にでも思わざる重要かつ興味ある因果の関係を発見し，あるいは発見する端緒を作るのではないかと考えるからである。技術の向上は現実の現象への徹底的な解析に始終すると信ずるから，常にこれと直接接触の機会に恵まれた現場においてこそ，この意味での先駆的勇気と能力の養成が望ましい。しかし現実の現象の徹底的解析の意味は厳密に言つて推計学のみでは解決できないのは勿論である。推計学が一つの現象を限られた資料を基にして客観的に観察し，批判し，その現象の因果関係の存在迄も論理的に論証し得ても，その後の現象の実体把握のための理科学的解析，例えば力学，化学等の専門分野の解析はやはり別個の問題として取り残される。ただこのような理科学的解析へと論及する前段として，その適否に有力な足掛りを与える事は勿論，理科学的解析そのものが複雑困難であるような事態においては時として推計学の結果はそのまま工学的意味での中間的価値として尊重される。多くの実験公式は正にその例である。以上の意味において土木本来の知識と共に推計学の認識を持つことは特に現場において確かに技術向上の一翼を荷う筈である。

2. 推計学の方法論

さて本論に入る前に推計学の方法論的立場を鮮明にしておく必要がある。端的に云つて推計学は2つの方法論により支持されている。1つは論理学の占める帰納論理特に帰無仮説[1]の方法であり，他は数学における確率化の方法である。要するに推計学は限られた既知の資料から未だ経験されない未知全体の存在を立言し，その立言にある意味での――例えば個々の現象に当てはめる時には推測なり判断に不確実性を伴うが集団的には客観性を与えかつ集団に対する個別の相対的不確実の程度は計量し得る，このような性質を具備した現象を stochastic と云い，stochastic の性質に依存する現象の範囲に限つて―― 保証を意企するものである。従つて限られた既知から全体の未知への推測判断の飛躍には当然，未知全体の仮定とこれと既知部分との比較が要請され，これが論理学的には帰無仮説検定の方法となつて役立ち，この帰無仮説の役割に stochastic の意味で客観性を保証する相役が数学における確率化の方法である。

(A) 帰無仮説の方法　この方法は J.S. Mill が唱導した論理学体系[2]の一部である。今ここに比較しようとする2つの事例があつてそれぞれには前件(原因)と後件（結果）の因果関係が存在するとする。両事例が今調査の対象とされるある一つの現象が起る一例と起らない一例の他では総ての状況を共にすれば，この状況の下でのみ2事例は相異し，その相異の状況が調査の対象となつた現象の結果または原因または原因の必然的部分であると言うのが所論である。この事をわかりやすく文字で説明しよう。今2事例を I，II とし

	原因		結果
I：	ABC	⟶	abc
II：	BC	⟶	bc

とするとき調査対象の現象は A→a である。このとき2事例の相異する状況は A→a であり，A は a の

* 建設省土木研究所

1) 後で否定されるべき運命を持つた仮説
2) J.S. Mill: "A system of Logic, ratiocinative and inductive." London, 1843.

原因または原因の必然的部分で a は A の結果なりと論理する。この論法は差異法とも呼ばれるが，状況 BC→bc を共にする2事例は自然には先づ求められないこと，また求められたとしても現象 A→a のみを一例に働きかけることは人為によるほか事実困難な理由から一名実験の論理とも言う。論理的な別の見方からすればこれは亦，帰無仮説検定の論理でもある。すなわち A→a を検証するために先づ仮説として

Non A→a（原因 A でなくても結果は a である）

と置き実験（1 回の実験で充分である）によつて

Non A→Non a（原因 A でなければ結果は a でない）

を示し，これによつて仮説 Non A→a を否定する反面消極的に否定の否定により A→a を肯定推論する。結局 A→a の検証は不完全論証であるが，この不完全さ，すなわち不確実の度合の計量は次の確率化の方法で既知となし，保証されるものである。

(B) 確率化の方法　ここでは次の例すなわちコンクリートの強度と AE 材の添加量の関係と言う命題を考えよう。他の総ての条件を同じにしてダレックスの添加百分率を色々変えると材令 28 日の圧縮強度も変りそうだと予測する。ここで問題の対象は強度でありこれを stochastic な対象にする必要がある。そのためには次の色々な段階を篩通さねばならない。先づ集団化であるが，この例での集団とは上述の制約条件の下で作り得る，または作られるべきコンクリート全体の強度の集団を意味し誰かが何処かで作つた特別のコンクリートの強度の集りを指すものではない。次は標識化であるが強度に標識を与えるために物指しとして $x\,\mathrm{kg/cm^2}$ を用意する。このように標識化された強度全体を標識の大きさ x の変動に必然的に作働するであろう要因（この要因の撰び方は一応理科学的知識に基づく仮定的のものでよい）の様相により分割する。これが要因別化または層別化である。例えばダレックスの量を $y\%$ としこれを要因と考えれば $y_1=\alpha_1$, $y_2=\alpha_2$, $y_3=\alpha_3$…… に従いそれぞれ対応する x を分割する。かく分割された x の小集団の内部では標識 x に関する限り等質化されたと言う。等質化された小集団では x の変動は全く偶然に支配されると考えるから，標識はここではじめて偶然変量として取扱われる資格を持つ。最後にこれ等偶然変量の生起または発生確率を考え，各層別化された小集団の中で発生確率 $f(x)$ を持つた変量 x の全体を想定する。これがいわゆる確率母集団（あるいは単に母集団）であり，$f(x)$ を確率函数と呼び，かくする事を確率化すると言う。確率化された x の全体は既に stochastic な対象である。

3. 母集団、見本、母数、統計値

今少し母集団及び見本母数，統計値等の意味に費さねばならない。母集団とは先例によれば作られ得る，または作られ得べきコンクリートの強度全体が形成する処の抽象的集団であつて推計学的には強度の標識は確率化されたものでなければならない。これに対しかかる母集団に対する制約と同じ条件で作られた現実のコンクリートの強度を実験室で測定した場合この測定値を，対応の母集団から任意抽出した標本または見本と考えることができる。この考え方によれば，1つの母集団は無数の見本を含むが現実の測定値は所詮有限個である。しかも有限個の測定値自身母集団よりの任意抽出である限り母集団の確率分布に従つてその値を変動するであろう。ここで測定値そのものの平均や散ばりが問題となる。さて測定値は母集団における偶然変量 x_i に対応して，それぞれ生起，または発生の頻度数を持つであろう。かかる頻度数を持つた測定値は有限で不連続ではあるが1つの頻度分布を作る。母集団の確率函数 $f(x)$ に相当するが概念的には異なるものである。この頻度分布を図（ヒストグラム）で書く代りに，その形を代表させるものとして平均値，分散（偏差），歪度，尖鋭度等の統計量の便宜的示標を作る。すなわち，平均値は測定値の頻度を考慮した加重平均であり，分散は頻度分布全体の拡がり巾の度を表わし，歪度は頻度分布の，対象，非対象の度合を示し，尖鋭度は頻度分布のいわゆる最頻値附近あるいは峰の鋭さを表現する[3]。しかしながらこれ等の統計値も結局限られた見本より得られた特定の実現値でしかなく，母集団そのものの母平均，母分散，歪度，尖鋭度そのものとは概念的には勿論，量的にも一致しないのが，通常である。そこで明確にこれ等を峻別し後者に属する統計量を母数と総称する。このような定義に従えば，母数が所与されると母集団そのものの分布すなわち確率函数 $f(x)$ の形[4]（型ではない，型の想定は寧ろ先決条件である）も自ら定まるべき事が想到されよう。すなわち母数は母集団の形を代表するものである。例えば正規母集団分布型と云われるものは母平均 m, 母分散 σ に対し

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

3) 佐藤良一郎：数理統計学 p. 15～20

4) 形と型とは別である。型は解析数学の意味での函数型であつて，通常必要なパラメーターを含み得る。母数はパラメーターに相当し，型の撰定は自由であり，別の意味で重要な問題を提供するが，ここでは触れない。

と m, σ の値で定まり，この分布では歪度，尖鋭度の母数は含まない。

以上で大体母集団，母数の概念が得られたと思うが今後吾々が先述の推計学の方法により検定を行う問題の焦点は帰無仮説として取上げられる一つの想定母集団を代表する母数 m, σ 等に対して，現実の測定値もまたこれよりの見本と考えその統計値 $\bar{x}$, S (平均値及び分散) 等どの差異比較に帰すのであつてこれ等相互の差または比等の確率分布が stochastic と云う条件の下では数学の援用によつて理論的に解明できる点を推計学秘蔵の鍵[5] として利用するのである。

4. 検定の方法

推計学の目的が既知有限の部分から未知全体を確率化の方法で推測保証することであり，既知有限の部分には現実の測定値またはこれより導かれる統計値が対応し，未知の全体に対しては帰無仮説の母集団すなわち母数が考えられることを知つた。従つて具体的な方法は寧ろ統計値に合わない母数すなわち母集団を用意してこれと統計値とを次々対決させ合わない度合の甚しいものから切り捨てて行くと遂に切り捨てられない母数すなわち母集団が残つてくる。そしてこの切り捨てられない母数すなわち母集団の合わない度合（逆に合うかも知れない度合）は同時に既知計量の確率として求め得られるのである。結局合わない度合が少ないから，両者の差異も少ないだろうと言う推論を消極的に下して，これ等の統計値は仮定した母数すなわち母集団に属せしめてよいと言う結論を導くのである[6]。以下その方法と例について述べよう。

具体的には推計学的方法として χ^2 検定法，F 検定法，Z 検定法，t 検定法等色々あるが，これ等には後述する如く本質的な相異は無いのであつて，これを用いる問題の性質，利用の便宜程度によつて，そのいずれによるかを判断すべきであろう。

(A)　χ^2 検定法　互いに独立な偶然変量 $x_1, x_2, \cdots x_n$ があつて，その確率分布が母平均 m，母分散 σ を共有した正規分布型

$$f(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}},\ (i=1,2,\cdots\cdots n),\ \sigma>0$$

で与えられるとき

$$\chi_k^2=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i-m}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\Big\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots\cdots+(x_k-m)^2\Big\},\ (1\leqq k\leqq n)$$

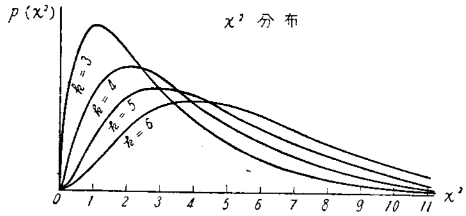
の確率分布を考えよう。この確率函数を $p(\chi_k^2)$ とすれば結局

$$p(\chi_k^2)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot(\chi_k^2)^{\frac{k}{2}-1}\cdot e^{-\frac{\chi_k^2}{2}}$$

となる[7]。

これは χ_k^2 の函数であると共に k の大いさによつても変化する。この k を χ_k^2 の自由度[8] と言いこの分布を χ^2 分布と呼ぶ。この分布の様相は図—1 の如くなる。

図— 1



また χ_k^2 が与えられた χ_0^2 よりも小さい値を取る確率，χ_0^2 以上になる確率はそれぞれ

$$P\{\chi_k^2<\chi_0^2\}=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^{\chi_0^2}(\chi^2)^{\frac{k}{2}-1}\times e^{-\frac{\chi^2}{2}}\cdot d(\chi^2)$$

及び　$P\{\chi_k^2\geqq\chi_0^2\}=1-P\{\chi_k^2<\chi_0^2\}$

で計算され種々の $P\{\chi_k^2\geqq\chi_0^2\}$ と k の値に対する χ_0^2 の値が表で作られてある[9]（表—1)。

以上は χ^2 分布の基本的説明であるがこの分布に関聯して次の重要な系が存在する。いわゆる χ^2 検定の方法は寧ろこの系に依存するものである。

表—1　χ_0^2 の 値

k \ P	.99	.98	.95	.90	.80	.70	.50	.30	.20	.10	.05	.01
1	.0002	.0006	.0004	.0158	.0642	.148	.455	1.074	1.642	2.706	3.841	6.635
2	.0201	.0404	.103	.211	.446	.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	9.210
3	.115	.185	.352	.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	11.34
4	.297	.429	.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	13.28
5	.554	.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.07	15.09
6	.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.65	12.59	16.81

5) 詳しくは Neyman, Peason の統計的仮設検定の理論がある。(Statistical Research Memoir Vol. I, II)
佐藤良一郎：数理統計学 p. 455
同　　　　：統計数理研究 1, No. 1 p. 38

6) 切り捨て切れない仮説は他にもつと沢山あるかも知れない。ここで多くの仮説の系の存在が考えられる。その内どれを採択すべきかは別の重要な問題であるが，ここでは触れない。詳しくは A. Wald の研究がある。河田龍夫：統理統計学序論。

7) 佐藤良一郎：統理統計学 p. 301

8) χ_k^2 の値を定めるものは k 個の x_i であり x_i は互いに独立であるから，1 組の撰び方に k 個の自由がある。

9) $k\to\infty$ となると χ^2 分布は正規分布になる。$k>30$ では別の表を用いた方がよい。

すなわちここに E_1, $E_2 \cdots\cdots E_k$ と言う互いに独立な[10] k 個の事象があつて各 $E_i(i=1,2,\cdots\cdots k)$ の起る確率が p_i (p_i は先験的または仮定されたもの) でかつ $\sum_{i=1}^{k} p_i=1$ なるとき N 回の独立試行の結果現実には E_1 が n_1 回, E_2 が n_2 回$\cdots\cdots E_k$ が n_k 回 $(\sum_{i=1}^{k} n_i=N)$ 起つたものとする。

今 $m_i=Np_i$ とおき

$$\chi_k^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-m_i)^2}{m_i}=\frac{(n_1-m_1)^2}{m_1}+\frac{(n_2-m_2)^2}{m_2}+\cdots\cdots+\frac{(n_k-m_k)^2}{m_k}$$

とおけば

χ_k^2 が与えられた χ_0^2 より小, または以上の値を取る確率は近似的に[11]それぞれ

$$P\{\chi_k^2<\chi_0^2\}=\frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^{\chi_0^2}(\chi^2)^{\frac{k-1}{2}-1}\times e^{-\frac{\chi^2}{2}}\cdot d\,(\chi^2)$$

及び

$$P\{\chi_k^2\geqq\chi_0^2\}=1-P\{\chi_k^2<\chi_0^2\}$$

で計算される。

すなわちこの結果は $p(\chi_k^2)$ が自由度 $k-1$ の χ^2 分布をなすことを示しており, 自由度を $k-1$ として先の表 (表—1) はそのまま適用できる。

この系によれば互いに独立な数個の事象に対してある属性の有無, またはある効果の有無等の定性的検定ができ, 次に述べる F, Z, t の定量的検定の準備または補足的検定として広く利用される。

(B) F 検定法　今母平均 m, 母分散 σ なる一つの正規分布型母集団

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

よりそれぞれ n' 個, n'' 個の見本を抽出しこれを

n' の組 : x_{11}, $x_{12}\cdots\cdots x_{1n'}$
n'' の組 : x_{21}, $x_{22}\cdots\cdots x_{2n''}$
(x_{11}, x_{12},$\cdots\cdots x_{1n'}$, x_{21}, x_{22},$\cdots\cdots x_{2n''}$ は互いに独立である。)

とし

$$\bar{x}_{1\cdot}=\frac{1}{n'}(x_{11}+x_{12}+\cdots\cdots+x_{1n'})=\frac{1}{n'}\sum_{i=1}^{n'}x_{1i},\qquad(i=1,2,\cdots\cdots n')$$

$$\bar{x}_{2\cdot}=\frac{1}{n''}(x_{21}+x_{22}+\cdots\cdots+x_{2n''})=\frac{1}{n''}\sum_{j=1}^{n''}x_{2j},\qquad(j=1,2,\cdots\cdots n'')$$

$$u^2=\frac{1}{n'-1}\sum_{i=1}^{n'}(x_{1i}-\bar{x}_{1\cdot})^2,\quad v^2=\frac{1}{n''-1}\sum_{j=1}^{n''}(x_{2j}-\bar{x}_{2\cdot})^2 \quad {}^{12)}$$

$$F=\frac{u^2}{v^2}$$

を作る。今

$$\frac{u^2}{\sigma^2}=\frac{1}{n'-1}\sum_{i=1}^{n'}\left(\frac{x_{1i}-\bar{x}_{1\cdot}}{\sigma}\right)^2=\frac{\chi_{n'}^2}{n'-1},$$

$$\frac{v^2}{\sigma^2}=\frac{1}{n''-1}\sum_{j=1}^{n''}\left(\frac{x_{2j}-\bar{x}_{2\cdot}}{\sigma}\right)^2=\frac{\chi_{n''}^2}{n''-1}$$

において $\chi_{n'}^2$, $\chi_{n''}^2$ を (A) の χ^2 の概念から考察すると $\chi_{n'}^2$ は母平均 $\bar{x}_{1\cdot}$, 母分散 σ の正規分布 $N(\bar{x}_{1\cdot}, \sigma)$[13]からたまたま抽出された見本 x_{11}, x_{12},$\cdots\cdots x_{1n'}$ により得た χ^2 であり, $\chi_{n''}^2$ は母分散は共通の σ であるが, 母平均が違うかも知れない $\bar{x}_{2\cdot}$ の正規分布 $N(\bar{x}_{2\cdot}, \sigma)$ から偶然抽出された組の見本 x_{21}, $x_{22}\cdots\cdots x_{2n''}$ により得られた χ^2 であると考えても一般性を失うものでないから, $\chi_{n'}^2$, $\chi_{n''}^2$ はそれぞれ自由度 $f'=n'-1$, $f''=n''-1$[14] の χ^2 分布をなすであろう。

結局

$$F=\frac{u^2}{v^2}=\frac{\chi_{n'}^2}{f'}\Big/\frac{\chi_{n''}^2}{f''}$$

となり自由度 f' に従う $\frac{\chi_{n'}^2}{f'}$ と自由度 f'' に従う $\frac{\chi_{n''}^2}{f''}$ の比の分布が如何なる確率分布となるかの問題に帰する。これは (A) の $p(\chi_k^2)$ の式より計算できて

$$p(F)=\frac{\Gamma\left(\frac{f'+f''}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f'}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{f''}{2}\right)}\cdot f'^{\frac{f'}{2}}\times f''^{\frac{f''}{2}}\cdot\frac{F^{\frac{f'}{2}-1}}{(f''+f'F)^{\frac{f'+f''}{2}}}$$

となる[15]。

この分布を Snedecor の F 分布と呼び $F_{f''}^{f'}$ で表わし f' は分子の自由度, f'' は分母の自由度を表示する。この分布の様相は図—2 の如くなる。この分布では F は $0\leqq F<\infty$ で定義されるから, 与えられた F_0 よりも以上の F を取る確率は

10) 互いに独立であることを前提とする。そのためには後編で述べる事象の無相関検定法によつてこれを確認せねばならない。

11) 近似的と言うのは n_i が Stirling の公式 $n!\fallingdotseq\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}$ を充分満足する程度に大きいことを意味しており実用的には少なくとも1つの $n_i\geqq5$ でないと精度が悪い。

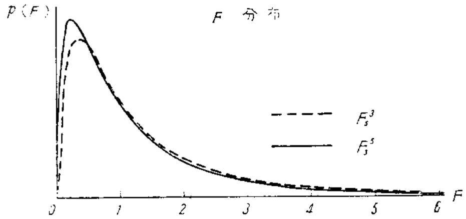
12) u, v の如きを標準偏差と言う。

13) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ の代りに $N(m,\sigma)$ の記号を使う。

14) $\frac{1}{n'}\sum_{i=1}^{n'}x_{1i}=\bar{x}_{1\cdot}$, $\frac{1}{n''}\sum_{j=1}^{n''}x_{2j}=\bar{x}_{2\cdot}$ の条件があるので $\chi_{n'}^2$, $\chi_{n''}^2$ の自由度はそれぞれ1づつ減ずる。

15) 佐藤良一郎 : 数理統計学 p. 309

図—2



表—2　$\int_{F_0}^{\infty} p(F) = 0.05$ に対する F_0 の値

f'' ＼ f'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97

$\int_{F_0}^{\infty} p(F) = 0.01$ に対する F_0 の値

1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056
2	94.5	99.0	99.2	99.3	99.3	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	29.9	27.4	27.4	27.3	27.2
4	21.2	18.0	16.7	15.9	15.5	15.2	14.8	14.8	14.7	14.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1
6	13.7	10.1	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.3	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82
9	10.1	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85

$$P\{F \geqq F_0\} = \int_{F_0}^{\infty} p(F)\,dF$$

で計算され，種々の $P\{F \geqq F_0\}, f', f''$ の値に対し F_0 の値が求められ表（表—2）に作られてある。

この分布によれば現実の測定値よりなる2組の見本が母平均は異なるかも知れないが母分散を共通する2つの母集団からの任意抽出見本として認め得られるや否やの検定ができ，利用価値の大きいものである。

(C)　Z 検定法　(B) の F の代りに

$Z = \frac{1}{2}\log_e F = \frac{1}{2}(\log_e u^2 - \log_e v^2)$　または　$F = e^{2Z}$

を考えるのであつて専ら便宜的な変数変換を行つただけである。$dF = 2e^{2Z}dZ$ に注意すれば (B) の $p(F)$ の式より直ちに

$$p(Z) = \frac{\Gamma\left(\frac{f'+f''}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f'}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{f''}{2}\right)} \cdot f'^{\frac{f'}{2}}$$

$$\times f''^{\frac{f''}{2}} \frac{e^{f'Z}}{(f''+f'e^{2Z})^{\frac{f'+f''}{2}}}$$

が得られる。

この分布は Fisher の Z 分布と呼ばれ f', f'' をそれぞれ u^2, v^2 の自由度と称する。この分布では Z は $-\infty < Z < +\infty$ で定義され Z の値が所与の Z_0 より以上の値を取る確率は

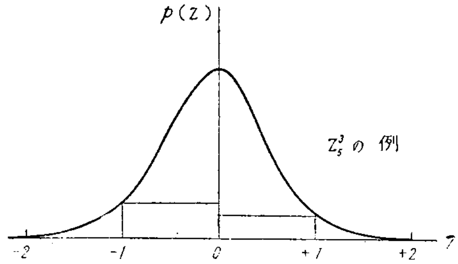
$$P\{Z \geqq Z_0\} = \int_{Z_0}^{+\infty} p(Z)\,dZ$$

で計算され種々の $P\{Z \geqq Z_0\}, f', f''$ に対しての Z_0 の値が表（表—3）に作られている。この分布の様相は図—3 の如くであつて $f' = f''$ の場合に限り縦軸に対し左右対象である。

またこの分布は (B) の F 分布と同様の目的に用いられる。

図—3

Z 分布



表—3　$\int_{Z_0}^{+\infty} p(Z) = 0.05$ に対する Z_0 の値

f'' ＼ f'	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	2.542	2.648	2.687	2.707	2.719	2.728	2.738	2.748	2.759	2.769
2	1.459	1.472	1.477	1.479	1.480	1.481	1.482	1.483	1.484	1.485
3	1.158	1.128	1.114	1.105	1.099	1.095	1.090	1.084	1.078	1.072
4	1.021	.969	.943	.927	.917	.909	.899	.889	.877	.864
5	.944	.878	.844	.824	.810	.800	.786	.771	.755	.737
6	.895	.819	.780	.756	.739	.727	.711	.693	.673	.650
7	.861	.778	.735	.708	.690	.676	.658	.637	.613	.586
8	.836	.748	.701	.673	.653	.638	.618	.595	.568	.537
9	.816	.724	.676	.645	.624	.608	.586	.561	.532	.498
10	.801	.706	.655	.623	.601	.584	.561	.535	.504	.466

(D)　t 検定法　互いに独立な偶然変量 $x_1, x_2 \cdots x_n$ があつてその確率分布が母平均 m，母分散 σ を共通した正規分布型

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}},\ (i = 1, 2, \cdots n),\ \sigma > 0$$

で与えられるとき

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ s^2 = \frac{\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1},\ t = \frac{\bar{x} - m}{s/\sqrt{n}}$$

とすれば t の確率函数 $p(t)$ は

$$p(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n-1}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$\times\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \quad {}^{16)}$$

16)　佐藤良一郎：数理統計学 p. 374

となる。

これを Student の t 分布と呼び $f=n-1$[17] を t の自由度と言う。t 分布の様相は図—4 の通りであり t は $-\infty<t<+\infty$ で定義され，縦軸に対し常に左右対象をなす。t_0 の値が与えられた $|t|\geqq t_0$ である場合の確率は

$$P\{|t|\geqq t_0\}=\int_{t_0}^{+\infty}p(t)\,dt$$

で計算されるから予め種々の $P\{|t|\geqq t_0\}$ と f の値を定め逆に対応の t_0 を計算した表（表—4）が作つてある。この分布はまた $f\to\infty$ で完全に正規分布 $N(0,1)$ となる事は注意されてよい。

表—4　t_0 の値

f \ P	.9	.7	.5	.4	.3	.2	.1	.05	.01
1	.158	.510	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	63.66
2	.142	.445	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	9.925
3	.137	.424	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	5.841
4	.134	.414	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	4.604
5	.132	.408	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	4.032
6	.131	.404	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.707
7	.130	.402	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	3.499
8	.130	.399	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	3.355
9	.129	.398	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	3.250
10	.129	.397	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	3.169
11	.129	.396	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	3.106
12	.128	.395	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	3.055
13	.128	.394	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	3.012
14	.128	.393	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.977
15	.128	.393	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.945
∞	.126	.385	.674	.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.576

さて検定の利用的立場から言えば寧ろ次の系の方が重要であろう。すなわち今２組の偶然変量があつて，それぞれの個数を n', n'' とする。

$$\begin{array}{l} n' \text{ の組}: x_{11}, x_{12}, \cdots x_{1n'} \\ n'' \text{ の組}: x_{21}, x_{22}, \cdots x_{2n''} \end{array} \left(\begin{array}{l} x_{11}, x_{12}\cdots x_{1n'}, x_{21}, x_{22}, \cdots \\ x_{2n''} \text{ は互いに独立} \end{array}\right)$$

前後者組共母平均 m, 母分散 σ なる同一の正規分布母集団 $N(m,\sigma)$ よりの任意抽出見本であるとする。しかる時は

$$\bar{x}_{1\cdot}=\frac{1}{n'}\sum_{i=1}^{n'}x_{1i},\ \bar{x}_{2\cdot}=\frac{1}{n''}\sum_{j=1}^{n''}x_{2j},$$
$$(i=1,2,\cdots\cdots n'\,;\ j=1,2,\cdots\cdots n'')$$
$$s_1^2=\frac{1}{n'-1}\sum_{i=1}^{n'}(x_{1i}-\bar{x}_{1\cdot})^2,$$
$$s_2^2=\frac{1}{n''-1}\sum_{j=1}^{n''}(x_{2j}-\bar{x}_{2\cdot})^2,$$

とおけば s_1^2, s_2^2 は共通の母集団に属しているから n' 組，n'' 組を一緒にしたものの分散は明らかに

$$s^2=\frac{1}{(n'-1)+(n''-1)}\left\{\sum_{i=1}^{n'}(x_{1i}-\bar{x}_{1\cdot})^2\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{n''}(x_{2j}-\bar{x}_{2\cdot})^2\right\}=\frac{(n'-1)s_1^2+(n''-1)s_2^2}{n'+n''-2}$$

となり，これより $\bar{x}_{1\cdot}$ の分散は $\dfrac{s^2}{n'}$, $\bar{x}_{2\cdot}$ の分散は $\dfrac{s^2}{n''}$ となるから $\bar{x}_{1\cdot}-\bar{x}_{2\cdot}$ の分散は

$$s^2\left(\frac{1}{n'}+\frac{1}{n''}\right)^{18)}$$

となる。故に

$$t=(\bar{x}_{1\cdot}-\bar{x}_{2\cdot})\Big/s\sqrt{\frac{1}{n'}+\frac{1}{n''}}$$

とおけば t の確率分布は

$$p(t)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n'+n''-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{n'+n''-2}{2}\right)}$$
$$\times(n'+n''-2)^{\frac{n'+n''-2}{2}}\cdot(n'+n''-2+t^2)^{-\frac{n'+n''-2}{2}}\ ^{19)}$$

すなわち自由度 $f=n'+n''-2$ の t 分布をなす。

この分布による検定を Student test とも言い，2組の測定値の見本が，それぞれ母分散には差異は認められないが母平均が相違するかも知れない，別々の母集団からの抽出実現値であるかどうかを判定する場合に用い，先の F 検定と並用して極めて有効である。

最後に t と F の関係を述べる。

$$t^2=\frac{(\bar{x}-m)^2}{\dfrac{s^2}{n}}$$

となるからこれに対し (B) の F と χ^2 の関係を利用し分子に対しては自由度１で

$$\frac{u^2}{\sigma^2}=1\left(\frac{\bar{x}-m}{\sigma}\right)^2=\frac{\chi_1^2}{1}$$

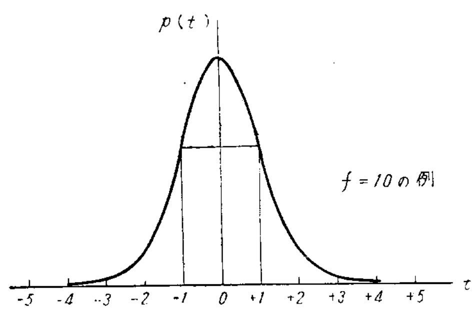
を，分母に対しては自由度 $n-1$ で

$$\frac{v^2}{\sigma^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2=\frac{\chi_n^2}{n-1}$$

を作る。

かくすれば前者は $\bar{x}$ を見本と考え，$\bar{x}$ が $N(m,\sigma)$

図—4
t 分布



17)　$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$ の条件の存在により i の自由度は $n-1$ となる。

18)　$\bar{x}_{1\cdot}-\bar{x}_{2\cdot}$ であるから分散は相加される。

19)　佐藤良一郎：数理統計学 p. 376

から偶然抽出された場合の χ_1^2 をその自由度1で除したものであり，後者は見本 $x_i\,(i=1,2,\cdots n)$ が $N(\bar{x},\sigma)$ から抽出された場合の χ_n^2 をその自由度 $n-1$ で除したものであると考えてよい。すなわち F 分布の定義から

$$t^2=\frac{\chi_1^2}{1}\Big/\frac{\chi_n^2}{n-1}=F_{n-1}{}^{1}$$

となる。一般に

$$t=\sqrt{F_{f''}^{f'}}$$

が成立する。要するに χ^2, F, Z, t 分布の間には密接な連りがあり，いずれの検定によるも本質的な相違はないのである。以下例題によつて説明しよう。

(E) 例題　ある現場でコンクリート工事を施工するに際してサイロから取出したセメント，袋入セメントの2種類を使用するものとする。しかもこれ等のセメントもまた実際に施工する時期すなわち貯蔵履歴によつてそれぞれ品質に多少の変化を生じている事が予想される。このようなセメント条件に対し粗骨材最大寸法，水セメント比，セメント使用量，使用水量，粗細骨材比，及び練合せ条件等を一定にして施工の都度供試体を作り各材令 28 日の耐圧強度試験を行つた。強度の測定値を合理的に整理し，その結果から色々の場合に応じて適当な母集団を想定対応させるにはどうすればよいか。

まず χ^2 検定により，定性的検定を行い，作働要因の効果の有無を判定する。すなわち指定耐圧強度を 180 kg/cm² 以上とし供試体総数 50 個の内，これに合格した数，不合格の数をそれぞれサイロのセメント使用の場合（Ⅰ）と袋入セメント使用の場合（Ⅱ）に分けて表示すると表—5 のごとくなつた。

表—5

効果／要因	合　　格	不 合 格	計
Ⅰ	28	5	33
Ⅱ	9	8	17
計	37	13	50

Ⅰ とⅡの場合により指定強度に対する合格率は必然的に相違するだろうか。換言すれば使用すべきセメントとしてⅠ，Ⅱを区別する必要があるだろうか。これは χ^2 検定法によつて判定する。すなわち

Ⅰによる合格期待数は　$m_1=37/50\times33=24.42$

Ⅱによる　〃　$m_2=37/50\times17=12.58$

Ⅰによる不合格期待数は　$m_3=13/50\times33=8.58$

Ⅱによる　〃　$m_4=13/50\times17=4.42$

$$\chi_4^2=\sum_1^4\frac{(n_i-m_i)^2}{m_i}=\frac{(28-24.42)^2}{24.42}+\frac{(9-12.58)^2}{12.58}+\frac{(5-8.58)^2}{8.58}+\frac{(8-4.42)^2}{4.42}=5.94\quad(\text{自由度 }3)$$

$$P\{\chi^2\geqq\chi_0^2=5.94\}\doteqdot0.1\quad(\text{表—1})$$

すなわち相違がないと言う仮定は 10 回に1回位の稀に期待できる事である。従つて相違があるとしⅠ，Ⅱを指定強度を支配する要因と考え，50 個の測定値をⅠの 33 個とⅡの 17 個の別々の集団に分け混合しない事にする。

次は 33 個のⅠ集団と 17 個のⅡ集団のそれぞれの

表—6

ロット番号	ロット数	耐　圧　強　度 (kg/cm²)								備　考
第 1 回	5個	182	189	200	204	205				施工場所等を記入
第 2 回	5 〃	△172	△173	180	225	230				
第 3 回	8 〃	△175	184	185	188	191	192	200	205	
第 4 回	7 〃	△175	△178	188	191	195	196	200		
第 5 回	8 〃	180	185	190	195	195	200	205	210	
計	33個	△印は 180 kg/cm² 未満のもの（5個）								

表—7

ロット番号	ロット内平均	標準偏差の値	自由度	F の 値	備　考
第1回	$\bar{x}_{1\cdot}=196$	$u_1^2=101.50$	4	$F_6^4=1.153$	標準偏差最小の $u_4^2=v^2$ にとり $F=u^2/v^2$ を作る（$F\geqq1$ とするため）。
第2回	$\bar{x}_{2\cdot}=196$	$u_2^2=839.50$	4	$F_6^4=9.426$	
第3回	$\bar{x}_{3\cdot}=190$	$u_3^2=88.57$	7	$F_6^7=1.006$	
第4回	$\bar{x}_{4\cdot}=189$	$u_4^2=88.00$	6	$F_6^6=1.000$	
第5回	$\bar{x}_{5\cdot}=195$	$u_5^2=100.00$	7	$F_6^7=1.136$	

内部について考察する。例にはI集団につき説明しよう。例えばI集団の 33 個の内訳は表―6 の通りであつた。

各ロットが同一母集団に属するか否かを考察する。そのためにまづ F 検定法により各ロットの分散の差異の検定を行う。計算の結果は表―7 の通りである。

これより $P\{F_6^4 \geqq 1.153 < 4.53\} > 0.05$

$P\{F_6^4 \geqq 9.426 > 9.15\} < 0.01$

$P\{F_6^7 \geqq 1.006 < 4.21\} > 0.05$

$P\{F_6^7 \geqq 1.136 < 4.21\} > 0.05$ (表―2)

なる故第4回ロットと対決して第2回ロットのみは著しい差異を認めるから，一応このロットのみは他の4つのロットと異なる母集団に属するものと判定する。

さて残る第1，3，4，5回のロットについて次の平均値の差異の検定を t 検定法により行う。計算の結果は下記の如くなる。

$$t=\frac{(\bar{x}_1.-\bar{x}_2.)\times\sqrt{n'+n''-2}\times\sqrt{n'n''\times(n'+n'')}}{\sqrt{s_1{}^2(n'-1)+s_2{}^2(n''-1)\times(n'+n'')}}$$

において s^2 の代りに前表の u^2 の値を，n', n'' に自由度の値を入れ表―4 より表―8 を得る。

表―8

ロット毎の組合せ	自由度	平均値の差	t の値	P の値	備考
第1回と第3回	4＋7＝11	6	1.09	$P\{\lvert t\rvert \geqq 1.09<1.36\}>0.2$	$P<0.1$ すなわち10回に1回位の稀有度を判定の基準にとる*。
〃　と第4回	4＋6＝10	7	1.29	$P\{\lvert t\rvert \geqq 1.29<1.37\}>0.2$	
〃　と第5回	4＋7＝11	1	0.17	$P\{\lvert t\rvert \geqq 0.17<0.26\}>0.8$	
第3回と第4回	7＋6＝13	1	0.21	$P\{\lvert t\rvert \geqq 0.21<0.26\}>0.8$	
〃　と第5回	7＋7＝13	5	1.03	$P\{\lvert t\rvert \geqq 1.03<1.08\}>0.3$	
第4回と第5回	6＋7＝13	6	1.19	$P\{\lvert t\rvert \geqq 1.19<1.35\}>0.3$	

* この基準のとり方は自由である。通常 $P=0.1$ 以上にはとらない。

結局 $P<0.10$ は一つもない。従つて各回の組合せとも相互の平均値に有意的な差異は認められないから，第1，3，4，5回のロットは分散においても，平均値においても同一の母集団に属するものからの任意見本，測定値として扱つて支障ないと判定する。特に第1回と第5回，第3回と第4回は著しい。しからばこの第 1，3，4，5 回を一つの母集団よりの見本とした時の母集団そのものの母平均，母分散はいかなる値をとるであろうか。この問題は次の母集団，または母数推定の問題として別個に考えなければならない。要するにこの例ではコンクリート指定強度に対する考察としてはサイロと袋入のセメントを区分すべきこととサイロよりの強度としては第2回の分を他と別に考え，残りは同一視しても差支えないと言う結論を得たことになる。母集団の推定以下の説明は後編に譲る。

第8回コンクリート講習会（名古屋において）

主催：日本セメント技術協会

当技術協会では今般下記の如くコンクリート講習会を開催することになりました。参加希望者は住所，勤務先，氏名明記の上，日本セント技術協会（東京都港区赤坂台町1番地の2）宛奮つて御申込下さい。

1. 会　期：昭和 27 年 10 月 23 日（木)～27 日（月）5 日間（但し最終日は見学）
2. 会　場：名古屋工業大学講堂　　3. 受講料：500 円（テキスト代を含む）（当日払）
4. 科目及び講師

(1)	セメントの常識	日本セメント技術協会　会長	藤井光蔵
(2)	セメントの試験	日本セメント技術協会　技術部長	岩間鑽一
(3)	コンクリートの概念及び配合の設計	名古屋工業大学　助教授	河津彦一
(4)	コンクリート用骨材	中部地方建設局　調査課長	中島義美
(5)	コンクリートの試験	名古屋工業大学　講師	河村貞次
(6)	コンクリートの施工及び施工用機械	鹿島建設技術研究所　理事	児玉琢夫
(7)	A.E コンクリート	日本セメント技術協会　会長	藤井光蔵
(8)	P・S・コンクリートについて	P・S・コンクリート株式会社　技師	配島治郎
(9)	道路コンクリート舗装	建設省中部地方建設局　企画部長	奥田秋夫
(10)	河川コンクリート工事	建設省中部地方建設局　工務部長	深井浩三
(11)	農業土木コンクリート	農林省木曽川水系綜合農業水理調査事務所　所長	千葉　進
(12)	港湾コンクリート工事	名古屋港管理組合　副管理者	前田一三
(13)	北陸線深坂隧道疋田口より 2km 附近改築工事について	国鉄疋田工事区長	大野　宏
(14)	コンクリートダム	関西電力株式会社東海支店　技術部長	竹中　徳

5. 実　習：
（1）セメント試験　（2）コンクリート試験　（3）A.E コンクリート試験