

## 堰堤内部応力の算定について

正 貞 丹 羽 義 次\*

## ON THE CALCULATION OF INTERNAL STRESSES IN DAM BODY

(JSCE July 1952)

Yoshiji Niwa, C.E. Member

**Synopsis** In order to rationalize the design of high dam, the stress distribution in dam body due to external forces acting on the dam must be investigated in detail. Some research has been made about semi-infinite triangular dam section, but the effects of foundation on stress distribution have been neglected. Therefore, for the purpose of researching these effects, the author transformed the dam body and its foundation into a unit circle by conformal transformation functions, and found the stress equations by potential functions which are concluded in this domain, and executed numerical calculations and photo-elastic experiments.

## 1. 緒言

各種の外力による堰堤内応力の分布を明らかにすることは、高堰堤の設計施工の合理化のために極めて必要であり、既に多数の研究者によつて弾性学的な応力解析が行われ、半無限長の基本三角形断面の堤体が満水圧及び溢流水圧<sup>1)</sup>、動水圧<sup>2)</sup>、堆砂圧、氷圧及び波圧等<sup>3)</sup>を受けた場合については、厳密解が与えられている。しかしこれらはいずれも半無限長の基本断面を対象としたもので、堰堤の如く堤底巾の堤高に対する比が比較的大きいものでは、堰堤基礎の固定の影響が有力に働き堤内応力分布は著しく変化する。これらの関係については、先に堤体及び基礎の接触線に沿う応力分布を求めて、ある程度明らかにしたが<sup>4)</sup>、その解析法として、諸外力により半無限基本三角形断面内に起される応力を与える応力函数とそれを修正する応力修正函数とを用いているので、堆砂圧、氷圧等の不連続荷重が働く際は、この応力函数が甚だ複雑となり、数値計算は殆んど不可能になる。この見地から著者は等角写像の方法によつて、各種の外荷重による堤内応力を比較的容易に算出し得る解析を試みたわけである。

すなわち  $z$  平面 ( $z = x + iy$ ) 上の堰堤及び基礎図形

\* 京都大学助教授、工学研究所

- 1) 石原藤次郎、小西一郎；“重力堰堤の応力計算について”，土木学会誌，第22巻第3号，昭.11.3.
- 2) 丹羽義次；“堰堤内部応力に対する地震時動水圧の影響”，建設工学，第2巻第1号，昭.24.6.
- 3) 丹羽義次；“堆砂圧による堤内応力分布について”，土木学会論文集，第6号，昭.26.8.
- 4) 石原藤次郎、丹羽義次；“堰堤堤体及び基礎の接触線附近の応力分布について”，土木学会論文集，昭.24.3.

を  $w$  平面  $\{w = R(\cos \theta + i \sin \theta)\}$  を媒介平面として、 $\zeta$  平面  $\{\zeta = r(\cos \theta + i \sin \theta)\}$  上の単位円内に等角写像する。この単位円領域内では potential function が  $\sin, \cos$  級数に展開できるから、 $\zeta - w, z - w$  間に成立する写像関係から、応力を単位円領域内の potential function で表示し、境界応力条件より級数中に含まれる諸常数を決定して堤内応力を求めた。この場合堤体と基礎の弾性性質が等しいと仮定し、両者が完全に結合して一体となつていていると考えているから、実際の場合と若干条件が異なつてはいるが、先に行つた堤体及び基礎の接触線に沿う応力の数値計算の結果<sup>4)</sup> からみて、岩盤とコンクリートの弾性性質が等しいと仮定しても大した影響はないものと考えられる。最後に正三角形断面の堤体が満水静水圧を受けた場合の堤内応力を計算し、堤体を半無限長と考へて計算した結果及び光弾性実験結果と比較し、基礎が堤内応力分布に及ぼす影響を明らかにした。

## 2. 堤内応力の potential function による表示

直角座標系  $x, y$  における平面応力状態の変位量  $\xi, \eta$  は、次式のように表わされる<sup>5)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{m+1}{4m} \psi \phi + \frac{1}{2} \theta + \xi' \\ \eta &= -\frac{m+1}{4m} \psi \phi + \frac{m-1}{4m} \Psi + \eta' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

ここに  $\phi, \psi, \theta, \Psi, \xi', \eta'$  はいずれも potential function である。

この関係を応力と歪の関係式に適用すれば、応力は次のように potential function とその偏微係数で表

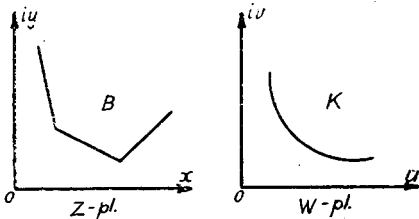
5) Föppel; "Drang und Zwang", S. 271, Bd. 1.

わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{y}{4} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial \xi'}{\partial x} \right) \\ \sigma_y &= E \left( -\frac{y}{4} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{m}{m+1} \frac{\partial \xi'}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} &= E \left( -\frac{\psi}{4} - \frac{y}{4} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

すなわち直角座標系においては、境界における応力条件を満足するように potential function  $\varphi, \psi, \xi'$  を定めれば、各点の応力を (2) 式より算定することができる。しかしながら境界条件を満足する potential function  $\varphi, \psi$  等を見出すことは一般に困難である。しかるに単位円領域内では potential function は、後述するように  $\sin, \cos$  級数で展開しうるから、 $z$  平面上の図形を単位円領域に写像し、この領域で境界条件を満足するように級数の諸係数を定めれば、容易に potential function が決定され、したがって応力を算定することができるわけである。

図-1



一般に  $z$  平面の B 領域において一定の値をとる potential function  $P$  は、 $z$  平面の B 領域と  $w$  平面の K 領域が互に等角的に写像されるならば、

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right] = 0$$

が成立し、 $w$  平面の K 領域においても potential function であり、しかも B 領域の点に対応する K 領域の点において同じ値をとることになる。なお K 領域において極座標  $(R, \theta)$  を用いれば、容易に次の関係式、

$$\frac{\partial x}{\partial R} = \frac{\partial y}{R \partial \theta}, \quad \frac{\partial x}{R \partial \theta} = -\frac{\partial y}{\partial R} \dots\dots (3)$$

を導くことができ、写像の拡大率の平方  $N$  は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} N &= \left( \frac{\partial x}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{R \partial \theta} \right)^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial R} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial y}{R \partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{R \partial \theta} \right)^2 = \left( \frac{\partial y}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{R \partial \theta} \right)^2 \dots (4) \end{aligned}$$

さて  $z$  平面より直ちに  $w$  平面の単位円に写像しうる場合については、すでに Kohl 氏が応力表示式を

求めている<sup>6)</sup>。しかるに本問題では、 $z$  平面の堰堤及び基礎図形を Schwarz-Christoffel の変換によつて  $w$  平面の上半面領域に写像し、この  $w$  平面を媒介平面としてさらに  $\zeta$  平面の単位円領域に写像しなければならない。それゆゑ次にこのような場合の potential function による応力表示式を求めてみよう。

§ 平面の単位円領域内で成立する potential function  $\varphi$  は、

$$\varphi = \varphi(r, \theta) = \varphi \{ r(R, \theta), \theta(R, \theta) \} \dots\dots (5)$$

で表わすことができる。いま  $\varphi$  を  $x, y$  で偏微分すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

をうる。しかるに  $R = R(x, y), \theta = \theta(x, y)$  であるから、容易に次式、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial y / R \partial \theta}{N} = \frac{\partial x / R \partial \theta}{N}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial x / R \partial \theta}{N} = \frac{\partial y / \partial R}{N} \\ \frac{R \partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\partial y / \partial R}{N} = \frac{\partial x / R \partial \theta}{N}, \quad \frac{R \partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial x / \partial R}{N} = \frac{\partial y / R \partial \theta}{N} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

をうる。(6) 式に (7) 式を代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial R} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \frac{1}{N} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \frac{1}{N} \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

となり、他の potential function に対しても同様の式が成立することがわかる。次に (5) 式から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial R} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \frac{r \partial \theta}{\partial R} \\ \frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{R \partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \frac{r \partial \theta}{R \partial \theta} \end{aligned}$$

であるから、この関係を (8) 式に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \frac{r \partial \theta}{\partial R} \right) \frac{\partial x}{\partial R} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{R \partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \frac{r \partial \theta}{R \partial \theta} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} \right\} \frac{1}{N} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \frac{r \partial \theta}{\partial R} \right) \frac{\partial y}{\partial R} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{R \partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \frac{r \partial \theta}{R \partial \theta} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} \right\} \frac{1}{N} \end{aligned} \right\} (9)$$

となる。さらに  $\zeta$  平面  $\{ \zeta = r(\cos \theta + i \sin \theta) \}$  の領域が  $w$  平面  $\{ w = R(\cos \theta + i \sin \theta) \}$  内の領域に等角写像されるならば、

6) Erst Kohl; "Beitrag zur Lösung des eben Spannungsproblems," Z.A.M.M., S. 141, Heft 2, Bd. 10, 1930.

$$\frac{\partial r}{\partial R} = \frac{r\partial\theta}{R\partial\theta}, \quad \frac{\partial r}{\partial R} = -\frac{\partial r}{R\partial\theta} \dots\dots\dots(10)$$

なる関係が成立するから、(9) 式はさらに次のようになる。

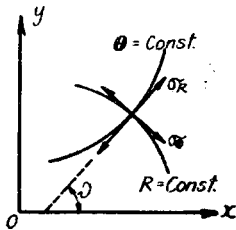
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \left\{ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial R} \right) \frac{\partial x}{\partial R} + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \frac{\partial r}{\partial R} \right) \frac{\partial y}{\partial R} \right\} \frac{1}{N} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \left\{ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial R} \right) \frac{\partial y}{\partial R} - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \frac{\partial r}{\partial R} \right) \frac{\partial x}{\partial R} \right\} \frac{1}{N} \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

この関係を(2)式に代入すれば求める応力表示式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{y}{4} \left\{ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial R} \right) \frac{\partial y}{\partial R} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} - \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \frac{\partial r}{\partial R} \right) \frac{\partial x}{\partial R} \right\} \frac{1}{N} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{m+1} \left\{ \left( \frac{\partial\xi'}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial\xi'}{r\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial R} \right) \frac{\partial x}{\partial R} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{\partial\xi'}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} - \frac{\partial\xi'}{r\partial\theta} \frac{\partial r}{\partial R} \right) \frac{\partial y}{\partial R} \right\} \frac{1}{N} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\varphi}{2} E - \sigma_x \\ \tau_{xy} &= E \left[ -\frac{\psi}{4} - \frac{y}{4} \left\{ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial R} \right) \frac{\partial x}{\partial R} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} - \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \frac{\partial r}{\partial R} \right) \frac{\partial y}{\partial R} \right\} \frac{1}{N} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{m+1} \left\{ \left( \frac{\partial\xi'}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial\xi'}{r\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial R} \right) \frac{\partial y}{\partial R} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \frac{\partial\xi'}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} - \frac{\partial\xi'}{r\partial\theta} \frac{\partial r}{\partial R} \right) \frac{\partial x}{\partial R} \right\} \frac{1}{N} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

図-2



いま  $\theta = \text{const.}$  の方向の応力を  $\sigma_R$ ,  $R = \text{const.}$  の方向の応力を  $\sigma_\theta$ , 剪断応力を  $\tau_{R\theta}$  とすれば、 $\sigma_R$  と  $x$  軸とのなす角が  $\vartheta$  である点の応力は周知の如く次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_x \cos^2 \vartheta + \sigma_y \sin^2 \vartheta + 2\tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \vartheta + \sigma_y \cos^2 \vartheta - 2\tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \tau_{R\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \vartheta \cos \vartheta + \tau_{xy} \cos 2\vartheta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

また  $R = \text{const.}$  の曲線にそつては、

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy = 0$$

したがつて、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial R/\partial x}{\partial R/\partial y} = \tan \vartheta = -\frac{\partial x/\partial R}{\partial y/\partial R} = \frac{\partial y/r\partial\theta}{\partial x/R\partial\theta}$$

となり、

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \vartheta &= \frac{(\partial y/\partial R)^2}{N}, \quad \cos^2 \vartheta = \frac{(\partial x/\partial R)^2}{N}, \\ \sin \vartheta \cos \vartheta &= \frac{(\partial x/\partial R)(\partial y/\partial R)}{N} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

となる。(12), (14) 式を(13)式に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= E \left[ \frac{\varphi}{2} \frac{(\partial x/\partial R)^2}{N} - \frac{\psi(\partial x/\partial R)(\partial y/\partial R)}{2N} \right. \\ &\quad \left. - \frac{y}{4} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} + \frac{r\partial\theta}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial R} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial R} - \frac{r\partial\theta}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} \right) \right\} \frac{1}{N} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{m+1} \left\{ \frac{\partial\xi'}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial R} + \frac{r\partial\theta}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial\xi'}{r\partial\theta} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} + \frac{r\partial\theta}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial R} \right) \right\} \frac{1}{N} \right] \\ \sigma_\theta &= E \frac{\varphi}{2} - \sigma_R \\ \tau_{R\theta} &= E \left[ -\frac{\varphi}{2} \frac{(\partial x/\partial R)(\partial y/\partial R)}{N} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi}{4} \frac{(\partial y/\partial R)^2}{N} - \frac{(\partial x/\partial R)^2}{4N} \right. \\ &\quad \left. - \frac{y}{4} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial R} - \frac{r\partial\theta}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} + \frac{r\partial\theta}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial R} \right) \right\} \frac{1}{N} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{m+1} \left\{ \frac{\partial\xi'}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} + \frac{r\partial\theta}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial R} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial\xi'}{r\partial\theta} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial R} - \frac{r\partial\theta}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} \right) \right\} \frac{1}{N} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

したがつて  $r$  平面と  $w$  平面,  $\xi$  平面と  $w$  平面との写像関係がわかれば、 $w$  平面を媒介平面として  $r$  平面と  $\xi$  平面の関係が明らかとなり、この(15)式によつて境界応力条件より  $\xi$  平面で成立する potential function  $\varphi, \psi, \xi'$  を定めることができ、各点の成分応力を求めることができる。なお極座標系における potential 方程式は周知の如く、

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0$$

であらわされるから、 $\xi$  平面で成立する potential function は一般に次のような  $\sin, \cos$  級数として表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\varphi}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ E \frac{\psi}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

となる。ゆゑに、

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ \frac{E}{2} \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} &= -\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \end{aligned} \right\} (17)$$

また  $\xi'$  については,

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{m+1} \frac{\partial \xi'}{\partial r} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \{ a_n' \cos(n+1)\theta \\ &\quad + b_n' \sin(n+1)\theta \} \\ \frac{E}{m+1} \frac{\partial \xi'}{r \partial \theta} &= -\sum_{n=0}^{\infty} r^n \{ a_n' \sin(n+1)\theta \\ &\quad - b_n' \cos(n+1)\theta \} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

として表わすことができる。

### 3. 堰堤内部応力の計算

前節において  $z$  平面の単位円領域内で成立する potential function による堤内応力表示式が得られたので、次に図-3(a) に示す静水圧をうける堰堤断面内の応力分布を計算してみよう。本計算においては簡単のため堰堤断面を正三角形とした。まず  $z$  平面上の堤体及び基礎領域  $B$  を Schwarz-Christoffel の変換によつて、 $w$  平面の  $w$  軸の上半面半無限領域  $B'$  に写像する。この場合座標原点及び写像対応点を図-3(a), (b) の如く定めれば、 $z$  平面と  $w$  平面の関係は次のように表わされる。

$$z = C \int_0^w \left( \frac{w^2-1}{w^2} \right)^{1/3} dw + C_1 \dots (19)$$

ここに  $C$  は堤高  $h$  の値に関係する常数であり、 $C_1$  は積分常数である。この式の被積分項を  $|w| \leq 1$ ,  $|w| \geq 1$  の二つの領域にわけて級数に展開し、各項毎に積分を行い、

$$w = R(\cos \theta + i \sin \theta)$$

を代入して実部と虚部に分離すれば、 $z$  平面と  $w$  平面の間関係は次のような級数で表わされる。

(a)  $R \leq 1$  ( $|w| \leq 1$ ) の場合

$$\left. \begin{aligned} x &= -3C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{6n+1} R^{6n+1} \\ &\quad \times \cos \left( \frac{\pi + \theta}{3} + 2n\theta \right) \\ y &= -3C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{6n+1} R^{6n+1} \\ &\quad \times \sin \left( \frac{\pi + \theta}{3} + 2n\theta \right) + C_1'' \end{aligned} \right\} \dots (20a)$$

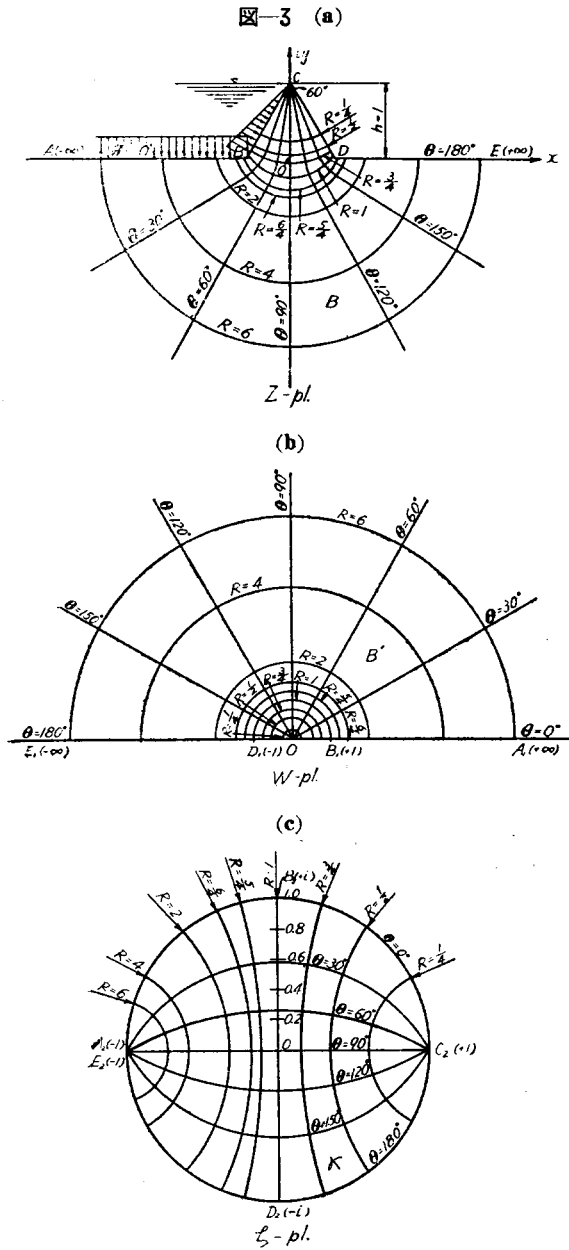
(b)  $R \geq 1$  ( $|w| \geq 1$ ) の場合

$$\left. \begin{aligned} x &= C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2n-1} \frac{1}{R^{2n-1}} \cos(2n-1)\theta \\ y &= -C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2n-1} \frac{1}{R^{2n-1}} \sin(2n-1)\theta \end{aligned} \right\} \dots (20b)$$

ここに、 $C_n = \frac{n}{3n-4} \frac{3n-4}{3n}$ ,  $C_0 = 1$ , ただし (20b) 式の上式のみ  $C_0 = -1$  である。図の如く座標原点を選び  $h=1$  とすれば、 $C = 0.4118$ ,  $C_1'' = 1$  となり、 $z$  平面と  $w$  平面の対応関係を図示すれば図-3(a), (b) のようになる。(20) 式を  $R, \theta$  で偏微分して (3) 式を考慮すれば、

(a) の場合

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial R} = \frac{\partial y}{R \partial \theta} &= -C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2n-1} R^{2(3n-1)} \\ &\quad \times \cos \left\{ \frac{\pi + \theta}{3} + 2n\theta \right\} \end{aligned} \right\}$$

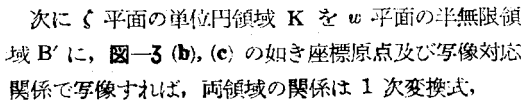


$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{R\partial\theta} &= -\frac{\partial y}{\partial R} = C \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^{\frac{2(3n-1)}{3}} \\ &\times \sin\left\{\frac{\pi+\theta}{3} + 2n\theta\right\} \end{aligned} \right\} (21 a)$$

(b) の場合

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial R} &= \frac{\partial y}{R\partial\theta} = -C \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{R^{2n}} \cos(2n-1)\theta \\ \frac{\partial x}{R\partial\theta} &= -\frac{\partial y}{\partial R} = -C \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{R^{2n}} \sin(2n-1)\theta \end{aligned} \right\} (21 b)$$

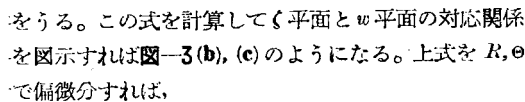
となる。

次に  $\zeta$  平面の単位円領域  $K$  を  $w$  平面の半無限領域  $B'$  に、 の如き座標原点及び写像対応関係で写像すれば、両領域の関係は 1 次変換式、

$$\zeta = \frac{i-w}{i+w} \dots\dots\dots (22)$$

で表わされる。この式を極座標で書き表わし、実部と虚部を分離して  $r, \theta$  を求めれば、

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(1-R^2)^2 + 4R^2 \cos^2\theta} / (1+2R \sin\theta + R^2) \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{2R \cos\theta}{1-R^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

をうる。この式を計算して  $\zeta$  平面と  $w$  平面の対応関係を図示すれば  のようになる。上式を  $R, \theta$  で偏微分すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial R} &= \frac{r\partial\theta}{R\partial\theta} \\ &= \frac{-2(1-R^2)\sin\theta}{(1+2R \sin\theta + R^2)\sqrt{(1+R^2)^2 + 4R^2 \cos^2\theta}} \\ \frac{r\partial\theta}{\partial R} &= -\frac{\partial r}{R\partial\theta} \\ &= \frac{2(1+R^2)\cos\theta}{(1+2R \sin\theta + R^2)\sqrt{(1+R^2)^2 + 4R^2 \cos^2\theta}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

となる。このようにして  $\zeta$  平面と  $w$  平面の関係が明らかになれば、 $B'$  領域の変数  $R, \theta$  を媒介変数として、 $z$  平面の  $B$  領域と  $\zeta$  平面の  $K$  領域、すなわち単位円の内部との写像関係が明らかになる。この単位円領域  $K$  内における potential function  $\phi, \psi, \xi'$  は先に述べた通り (16)~(18) 式で与えられるから本問題を解くためには、 $\phi, \psi, \xi'$  中に含まれる 常数係数  $a_n, b_n, a_n', b_n'$  を境界応力条件から決定すればよい。それゆえまず境界応力式を求める必要がある。 $\theta=0^\circ, 180^\circ$  のとき  $\cos\theta = \pm 1, \sin\theta = 0$  であるから (24) 式は、

$$\frac{\partial r}{\partial R} = \frac{r\partial\theta}{R\partial\theta} = 0, \quad \frac{r\partial\theta}{\partial R} = -\frac{\partial r}{R\partial\theta} = \pm \frac{2}{1+R^2} \dots\dots (24)'$$

となり、(21) 式は次のようになる。

(a) の場合

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial R} &= \frac{\partial y}{R\partial\theta} = \mp 0.2059 \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^{\frac{2(3n-1)}{3}} \\ \frac{\partial x}{R\partial\theta} &= -\frac{\partial y}{\partial R} = 0.2059 \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^{\frac{2(3n-1)}{3}} \end{aligned} \right\} (21 a)'$$

(b) の場合

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial R} &= \frac{\partial y}{R\partial\theta} = \mp 0.4118 \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{R^{2n}} \\ \frac{\partial x}{R\partial\theta} &= -\frac{\partial y}{\partial R} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (21 b)'$$

これらの諸式の関係を (15) 式に代入して境界応力式を求めれば、

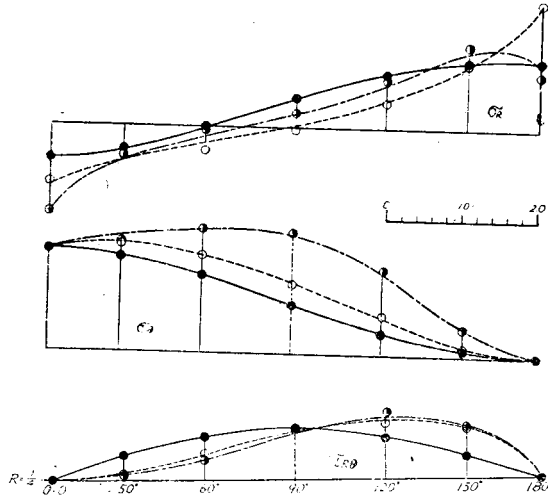
$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{(\partial x/\partial R)^2}{N} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &\quad - \frac{(\partial x/\partial R)(\partial y/\partial R)}{N} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \\ &\quad - \frac{y}{2} \frac{r\partial\theta}{\partial R} \left[ \frac{\partial x/\partial R}{N} \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial y/\partial R}{N} \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \right] \\ &\quad - \frac{r\partial\theta}{\partial R} \left[ \frac{\partial y/\partial R}{N} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n' \cos(n+1)\theta) \right. \\ &\quad \left. + b_n' \sin(n+1)\theta \right] + \frac{\partial z/\partial R}{N} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (a_n' \sin(n+1)\theta - b_n' \cos(n+1)\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{2} \phi - \sigma_R \\ \tau_{R\theta} &= -\frac{(\partial x/\partial R)(\partial y/\partial R)}{N} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &\quad - \frac{(\partial y/\partial R)^2 - (\partial x/\partial R)^2}{2N} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \\ &\quad + \frac{y}{2} \frac{r\partial\theta}{\partial R} \left[ \frac{\partial y/\partial R}{N} \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial x/\partial R}{N} \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \right] \\ &\quad - \frac{r\partial\theta}{\partial R} \left[ \frac{\partial x/\partial R}{N} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n' \cos(n+1)\theta) \right. \\ &\quad \left. + b_n' \sin(n+1)\theta \right] - \frac{\partial y/\partial R}{N} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (a_n' \sin(n+1)\theta - b_n' \cos(n+1)\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

となる。

以上によつて計算に必要な諸式がすべて求められたので、境界応力値を与えて (25) 式中の 常数  $a_n, b_n, a_n', b_n'$  を求めればよいわけである。すなわち境界上の 1 点と  $y$  軸に対しこれと対称の点の応力  $\sigma_\theta, \tau_{R\theta}$  を与えれば、4 つの条件式から 4 つの 常数  $a_n, b_n, a_n', b_n'$  が求められる。したがつて  $n$  個の点とその対

称点の境界応力条件から、 $4n$  個の条件が得られるから、常数が各  $n$  個づつ求められる。解法上境界のすべての点で境界条件を満足させることはできないが、境界応力条件を適用する個所の多いほど、計算結果の精度がよくなることはいうまでもない。この場合当然条件を適用する位置が問題となるわけであるが、応力を求めんとする断面に影響を及ぼす程度の大きい部分ほど多くの条件式を適用しなければならない。本計算においては  $R = \frac{1}{50}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$  における境界応力条件を採用し、したがって図形が対称であるから 2 つの 10 元連立 1 次方程式を解いて各  $\frac{5}{10}$  個の常数を求め、これを (15) 式に代入して  $R = \frac{1}{4}$  曲線上の  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$  の点における各成分応力  $\sigma_R, \sigma_\theta, \tau_{R\theta}$  を求めたのである。水圧三角荷重の平均強度を単位応力度として、この数値計算結果を図示すれば図-4 の鎖線のようになる。なお静水

図-4



圧以外の種々の外力が作用する場合には、境界応力値をこれらの諸外力の和に等しくおけば同様にして計算を行うことができる。

4. 数値計算結果の考察

以上は簡単のために数値計算の対象として満水静水圧をうける正三角形断面の堰堤が、同じ弾性性質の基礎岩盤上に完全に結合して造られている場合をとりあげ、堤体内の応力分布を求めたのであるが、これと比較するために堰堤を半無限長と考えた場合の応力を  $R = \frac{1}{4}$  曲線上の各点について求めれば図-4 の実線のようになる。次に前節の数値計算では境界応力条件を 10 点に適用したにすぎないので、その計算結果を検照するために光弾性実験を行った。しかしながらこの実験においては三角形断面に水圧三角荷重を載荷するこ

とが甚だ困難であり、正確な実験結果が得られなかつたのは遺憾である。なお載荷操作の都合上堤体 (辺の長さ 4cm) にかかる三角荷重と、基礎 (長さ 5cm) にかかる等分布荷重を別々に取り扱い、応力解析後両者を加算することとした。写真-1 は前者の場合、写真-2 は後者の場合の等色線写真で、荷重は各 98.05 kg (光弾性常数 13.71 kg/cm<sup>2</sup>), 237.26 kg (10.05 kg/cm<sup>2</sup>) である。これより明らかな如く  $R = \frac{1}{4}$  曲線附近には基礎にかかる等分布荷重は殆んど影響を及ぼさない。図-5 は前者の場合の堤内主応力線図であり、数

写真-1



写真-2

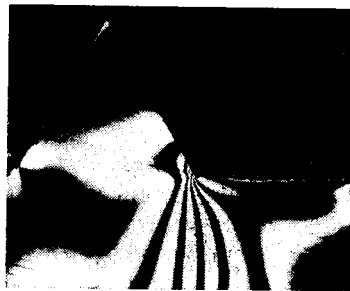
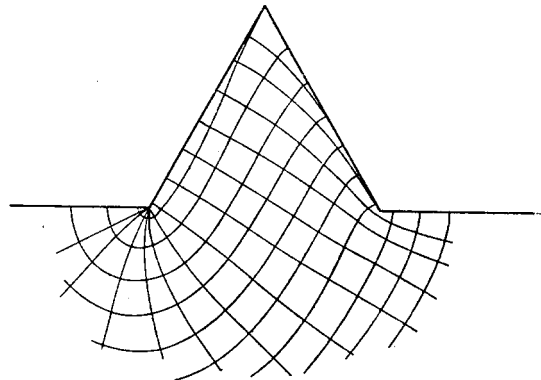


図-5



値計算を行つた各点の実験応力値は図-4の点線のようになる。

最後に堰堤を半無限長と考へた場合の計算応力値(1. 実線)と基礎の影響を考慮した場合の計算応力値(2. 鎖線)及び実験応力値(3. 点線)について考察を進めてみよう。

応力 $\sigma_R$ は(1)の場合 $\theta=60^\circ$ の点で0となり、それより上流側では引張、下流側では圧縮応力となるが、全般的に緩慢な変化をしている。(2)の場合では $\theta=60^\circ$ と $90^\circ$ の中間で0となり、 $\theta=0^\circ$ すなわち上流面附近では(1)に比して引張応力が増大している。一方 $\theta=180^\circ$ すなわち下流面附近では圧縮応力が漸減している。これに対して(3)の場合では $\theta=90^\circ$ 附近で0となり、上下流面附近で引張及び圧縮応力が急激に増大している。

次に応力 $\sigma_\theta$ は(1)の場合では上流面における境界応力値より漸減して下流面で0となつてゐるが、(2)、(3)の場合ではそれぞれ $\theta=60^\circ$ 及び $30^\circ$ 附近で最大となつてゐる。さらに(2)の場合は(1)及び(3)の場合に比して著しく大きな値を示しており、 $\theta=120^\circ$ の点では(1)の場合の約4倍の値となつてゐる。

最後に剪断応力 $\tau_{R\theta}$ は(1)の場合では上下流面において0であり、 $\theta=90^\circ$ で最大となり殆んど左右対称の変化をしている。これに対し(2)、(3)の場合は非常によく一致しており、 $\theta=120^\circ$ 附近で最大となり $\theta=90^\circ$ 附近より上流側では(1)の場合より小さく、それより下流側では大きくなつてゐる。

以上に各場合の応力分布状態の概略を述べたのであるが、(1)に比して(2)、(3)の場合はかなり異なつ

た分布を示しているのであつて、基礎の固定の影響と考へられる。すなわち $R=\frac{1}{4}$ 曲線以下ではさらに基礎の影響が有力に働き、(1)に比してずつと異なつた応力分布を示し、それより上部になるにしたがつて応力分布状態は(1)の曲線に近づくものと考えられる。なお(2)、(3)の場合の応力分布はかなり近似しているが、 $\sigma_\theta$ 及び下流面附近の $\sigma_R$ の値が相異している。これは数値計算の境界応力条件を適用した個所が少ないためであり、また三角荷重の載荷の不正確によるものと考えられる。

## 5. 結語

著者は堤体及び基礎内の応力分布を等角写像法を用いて解析する方法を考究し、数値計算を行うとともに、半無限三角断面と仮定して基礎の影響を加味しなかつた従来の計算法によつて求めた応力と比較し、さらに光弾性実験によつてその結果を検照し、前節に掲げた結果を得た。これより適当な境界条件を採用するならば、等角写像法による本計算法によつて正確な堤内応力を算定することができ、さらに堤底附近の応力分布は、堰堤を半無限長と考へた場合とは著しく異なつた分布を示すことが明らかになつた。このことは高堰堤の合理的設計に特に注目すべき示唆を与えるものと思ふ。

本研究は文部省科学研究費の援助の下に行つてゐる“重量構造物の光弾性学的研究”の成果の一部であり、ここに関係方面及び御指導を賜つた京大教授石原、小西両博士並びに計算に多大の勞を煩わした森忠次君に謝意を表する。

(昭.27.2.2)

## 新刊紹介

緒方乙丸著 鑿岩機操業の理論と実際(第三輯) A・5判 180ページ 220円 白亜書房刊(昭.27.6.5発行)

鑿岩操業の急所はビットにある。それは手掘の頃、たがねのかねの質を吟味し焼入れのこつに通じていなければ名人と云われなかつた事でも判る。鑿岩機の性能が向上すればする程ビットに要求される条件は難かしくなる。太平洋戦争後鑿岩機の能率は極めて大きくなつてきたがその主要原因は、ビットの進

歩であると云えよう。鑿岩機を使用する現場の人々は、この意味でビットに対する充分の知識を持たないと思わないところで損害を被むることがある。本書は鑿岩機用のたがね炭素鋼の発達から説き起し、種類成分、熱処理にふれ次いでデタッチャブル・ビット(替刃鑽)、超硬ビット、スローアウエー・ビット、エキスパンディング・ビット等昨今発達しつつある色々のビットについて種類、材料、特徴等について親切に記述したお代表的なデータを巧みに織込んである。従つて鑿岩機に従事する鉱山、炭鉱、土木関係の技術家に極めて有益な参考書、指導書である。

(早大教授 工博 中野 繁)