

すなわち、剪断力に対する e を与える公式として、曲げモーメントに対すると同一公式を使用するのは、不適当であつて、もし公式を使用するものとする、式 (4), (5) のようなものが適当であると思う。

米国の示方書では剪断力に対する e は規定されていないが、曲げモーメントに対する e の規定をみると⁶⁾、主鉄筋が車輛の進行方向に直角な場合と平行な場合とでは、全く別の式を使つており、後者の場合が小さい値を与えるようになってゐる。これは当然のことであり、日本の剪断力に関する規定も同様であるべきはずであつて、この点日本の示方書は矛盾してあり、著者の式が合理的であると思う。

剪断力を計算するのに有効中の公式を使用しないとするれば、表-1, 3 によればよい。

なお示方書に規定されている e' なる規定は片持版では不必要なものであり、また示方書の e および e'

を説明した図は誤りであることに気付いたことを附記しておきたい。

本研究は京大教授小西博士の御示唆にもとずき、成岡助教授の御指導の下に行つたものである。ここに附記して謝意を表したい。

参考文献

- 1) 道路協会 (現在の日本道路技術協会) 発行の示方書解説中にも説明されていない。
- 2) 成岡: 土木学会論文集第 4 号 (昭 24) p.1
- 3) 成岡, 米沢: 土木学会誌第 36 巻第 11 号 (昭. 26) p.492.
- 4) N.M. Newmark: A Distribution Procedure for the Analysis of Slabs Continuous over Flexible Beams. : University of Illinois Bulletin. No. 304 (1938)
- 5) 成岡, 米沢: 土木学会誌第 36 巻第 10~11 号及び第 37 巻第 1 号 (昭.26~27)
- 6) 小西: 土木学会誌第 35 巻第 10.11 号 (昭.25) (昭. 27.1.16)

UDC 624.072.233

弾性支承上にある有限長梁が集中荷重を受ける 場合の解法とその機械的計算法の提案

正 員 柴 田 元 良*

A PROPOSAL OF MECHANICAL CALCULATION METHOD, AS A SOLUTION OF THE BEAM ON AN ELASTIC FOUNDATION UNDER CONCENTRATED LOADS

(JSCE May 1952)

Motoyoshi Shibata, C.E. Member

Synopsis In this paper, the author proposed one solution of the beam on elastic foundation under a single concentrated load acting at any section on the beam. He induced the solution by means of modifying the actual beam length with the auxiliary length added to one end of the beam, and considering the acting load at the center of the beam with modified length. And based on the solution, he made some tables of various factors necessary for mathematical calculations of the beam, and made clear that calculations are easily and mechanically done with helps of these mathematical tables.

要旨 本文は弾性支承上にある有限長梁の任意の断面に、単一集中荷重が働く場合、梁の一端に補助長を附加して梁の長さを修正し、荷重が修正長梁の中央に働くと考えて得られる解法を誘導し、且つ本解法を利用して数値計算を行うに必要な諸元の数値表を作製しこれらを利用して容易にしかも機械的に数値計算を行うことが出来る方法を提案したものである。

1. 概説

地盤上につくられる帯状基礎が集中荷重を受ける場合の応力計算は、弾性支承上にある有限長梁の問題と

して取扱われるのが合理的である。この問題の理論的な解法は微分方程式に出發して解析され、多くの業績が発表されている。然しこれらの理論解法に基いて直接数値計算を行うには相当複雑な作業を伴うのが一般である¹⁾。実用数値計算を簡易化する一方法として、Hans Bleich 博士²⁾は、無限長梁に単一集中荷重が働く場合の影響線を利用して誘導される計算法を提案したが、その計算の過程には 4 元 1 次の連立方程式を解かねばならない。その外、岡本教授³⁾の有限長梁の両端に支持点を考えた方法や、三沢氏⁴⁾の連立方程式を機械的に解く計算法等がある。

* 国鉄名古屋鉄道管理局施設長

筆者は有限長梁に補助長を附加して、梁長を修正し単一集中荷重が修正された梁長の中央に働くものとして誘導される解法を求め、この解法による機械的な計算方法を提案した。なお本文で取扱っている範囲では次の如く仮定した。

- a. 地盤反力は変位に比例する。
- b. 載荷後の梁断面の中立軸の変位と、梁外面の変位との差は無視する。
- c. 梁の浮上つた部分には、弾性張力が下方に働く。
- d. 断面2次率は梁全長に亘り一定である。
- e. 地盤と梁との接触摩擦抵抗は考えない。
- f. 地盤係数は支承面の各点で同一である。

2. 基本式の誘導

図-1(a)を参照して、長さ l なる有限長梁 AB の任意の点 C に P なる集中荷重が働くと考え。なお使用記号は図示に従う。図-1(b)

の如く、梁 AB を $CB-AC=s-r=Z$ に等しく、左側に延長して $A'C=CB$ 、即ち載荷点 C が丁度修正梁長 $A'B$ の中央になるようにする。この $A'A=Z$ を補助長と名付ける。

この場合梁 $A'B$ の平衡状態から、弾性曲線は載荷点 C を通る垂直軸に関して左右対称となる。又この平衡状態を梁 AB につ

いて考えると図-1(c)の如くに、梁 AB の A 端に於て、梁 $A'B$ の $A'A$ 部分に働く反力によって生ずる曲げモーメント M_A と剪力 Q_A が働いて平衡を保っていることになる。然し実際の梁 AB の A 端では、曲げモーメント及び剪力は零であるべきであるから、もしこの A 端にそれぞれ M_A 及び Q_A と大さは同じであつて、方向の相反する $-M_A$ 及び $-Q_A$ を働かせて、即ち図-1(c)に図-1(d)及び図-1(e)の場合を累集すれば、図-1(a)に等しい平衡状態を保つべきである。言い換えれば、

- a. 長さ $l+Z=l'$ なる梁 $A'A$ の中央点 C に荷重

P が働く場合、任意の断面 m に於ける弾性量を p_1, M_1, Q_1 , A 断面の曲げモーメントを M_A , 剪力を Q_A

- b. 長さ l なる梁 AB の A 端に $-M_A$ が働く場合、任意の断面 m に於ける弾性量を p_2, M_2, Q_2
 - c. 長さ l なる梁 AB の A 端に $-Q_A$ が働く場合、任意の断面 m に於ける弾性量を p_3, M_3, Q_3
- で表わせば、求める弾性量は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 \\ M &= M_1 + M_2 + M_3 \\ Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

以下それぞれの場合についての算式を誘導する。なお使用記号は次のものを表わすものとする。

- E : 梁の弾性係数 ($\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2}$)
 - J : 梁断面の水平重心軸に関する断面2次率 (cm^4)
 - b : 梁の巾 (cm)
 - K : 支承盤の地盤係数 ($\text{kg}\cdot\text{cm}^{-3}$)
 - p : 単位面積に働く反力 ($\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2}$)
 - M : 曲げモーメント ($\text{kg}\cdot\text{cm}$), 符号は m 断面の左側で時計針廻りを+とする
 - Q : 剪力 (kg) 符号は m 断面の左側で上向きを+とする
 - x' : 梁 $A'B$ において A' を原点とする直交座標軸の水平軸距 (cm)
 - x : 梁 AB において A を原点とする直交座標軸の水平軸距 (cm)
 - y : x' 又は x に於ける垂直変位 (cm)
 - $AC=r, CB=s, AB=r+s=l, A'A=CB-AB=s-r=Z, A'B=A'A+AB=Z+l=2s=l'$
 - $L = \sqrt{\frac{4EJ}{6K}}, \sigma = \frac{r}{L}, \alpha = \frac{s}{L}, \lambda = \frac{l}{L} = \sigma + \alpha$
 - $\lambda' = \frac{l'}{L} = \frac{2s}{L} = 2\alpha, \xi = \frac{x}{L}, \xi' = \frac{x'}{L},$
 - $\xi_1' = \sinh \xi' \cdot \sin \xi', \xi_2' = \sinh \xi' \cdot \cos \xi',$
 - $\xi_3' = \cosh \xi' \cdot \sin \xi', \xi_4' = \cosh \xi' \cdot \cos \xi'$
 - $\xi_1 = \sinh \xi \cdot \sin \xi, \xi_2 = \sinh \xi \cdot \cos \xi,$
 - $\xi_3 = \cosh \xi \cdot \sin \xi, \xi_4 = \cosh \xi \cdot \cos \xi$
-(2)

(1) p_1, M_1, Q_1 及び M_A, Q_A の算式 図-1(b)を参照して、図示のような座標軸につき、長さ l' なる梁 $A'B$ の中央点 C に荷重 P が働く場合に求められる弾性量を表わす諸式は、その結果のみをかくと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{P}{bL} \left[[\lambda_1'] (\xi_2' + \xi_3') + [\lambda_1']' \xi_1' \right] = \frac{P}{bL} \cdot p_1 \\
 M_1 &= \frac{PL}{2} \left[-[\lambda_1'] (\xi_2' - \xi_3') + [\lambda_1']' \xi_1' \right] \\
 &= \frac{PL}{2} m_1 \\
 Q_1 &= \frac{P}{2} \left[[\lambda_1'] 2\xi_1' + [\lambda_1']' (\xi_2' + \xi_3') \right] \\
 &= \frac{P}{2} \cdot Q_1
 \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
 [\lambda_1'] &= \frac{\cosh \frac{\lambda'}{2} \cdot \sin \frac{\lambda'}{2} - \sinh \frac{\lambda'}{2} \cdot \cos \frac{\lambda'}{2}}{\sinh \lambda' + \sin \lambda'} \\
 [\lambda_1']' &= \frac{2 \cosh \frac{\lambda'}{2} \cdot \cos \frac{\lambda'}{2}}{\sinh \lambda' + \sin \lambda'}
 \end{aligned}$$

.....(3)

以上の諸式は梁 A'B の A'~C の範囲の弾性量を表わすものであるが、C~B の範囲のそれは、C 点を通る垂直軸に関し、x' 軸上対称の位置に於いて A'~C 範囲の弾性量と相等しい値をとるから容易にもとめられる。但し C~B 範囲の剪力 Q₁ は慣用の規約によつて反対の符号をとる。

次に A 断面に於ける M_A 及び Q_A は式 (3) で x' = Z, 従つて ξ' = α - σ とおけばよい。

$$\begin{aligned}
 M_A &= [M_1]_{\xi' = \alpha - \sigma} = PL/2 \cdot [m_1]_{\xi' = \alpha - \sigma} \\
 &= PL/2 \cdot [m_1]_A \\
 Q_A &= [Q_1]_{\xi' = \alpha - \sigma} = P/2 \cdot [Q_1]_{\xi' = \alpha - \sigma} \\
 &= P/2 \cdot [Q_1]_A
 \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
 [m_1]_A &= [-[\lambda_1'] (\xi_2' - \xi_3') \\
 &\quad + [\lambda_1']' \xi_1']_{\xi' = \alpha - \sigma} \\
 [Q_1]_A &= [[\lambda_1'] 2\xi_1' \\
 &\quad + [\lambda_1']' (\xi_2' + \xi_3')]_{\xi' = \alpha - \sigma}
 \end{aligned}$$

.....(4)

表-1 λ' に対する [λ₁'], [λ₁']' の値

λ'	[λ ₁ ']	[λ ₁ ']'	λ'	[λ ₁ ']	[λ ₁ ']'	λ'	[λ ₁ ']	[λ ₁ ']'
0.0	∞	∞	3.4	0.2071	-0.0771	7.2	0.0124	-0.0090
0.2	0.0015	5.0004	4.0	0.1975	-0.1017	8.0	0.0078	-0.0119
0.4	0.0067	2.4786	4.5	0.1858	-0.1180	9.0	0.0040	-0.0154
0.6	0.0150	1.6627	5.0	0.1727	-0.1372	10.0	0.0020	-0.0194
0.8	0.0266	1.2004	5.5	0.1588	-0.1588	11.0	0.0010	-0.0239
1.0	0.0413	0.8914	6.0	0.1445	-0.1817	12.0	0.0005	-0.0289
1.2	0.0569	0.6815	6.5	0.1303	-0.2067	13.0	0.0003	-0.0344
1.4	0.0730	0.5424	7.0	0.1163	-0.2341	14.0	0.0002	-0.0404
1.6	0.0899	0.4521	7.5	0.1028	-0.2637	15.0	0.0001	-0.0469
1.8	0.1077	0.3950	8.0	0.0900	-0.2954	16.0	0.0000	-0.0539
2.0	0.1263	0.3574	8.5	0.0779	-0.3291	17.0	0.0000	-0.0614
2.2	0.1453	0.3292	9.0	0.0667	-0.3647	18.0	0.0000	-0.0694
2.4	0.1647	0.3075	9.5	0.0563	-0.4021	19.0	0.0000	-0.0779
2.6	0.1844	0.2917	10.0	0.0468	-0.4411	20.0	0.0000	-0.0869
2.8	0.2044	0.2805	10.5	0.0382	-0.4816	21.0	0.0000	-0.0964
3.0	0.2246	0.2728	11.0	0.0305	-0.5235	22.0	0.0000	-0.1064
3.2	0.2450	0.2680	11.5	0.0237	-0.5665	23.0	0.0000	-0.1169
3.4	0.2655	0.2647	12.0	0.0176	-0.6115	24.0	0.0000	-0.1279

式 (3) に於て [λ₁'], [λ₁']' は λ' のみの函数であり、予め数値表として作製することが出来る。λ' の 0.0~10.0 に対し [λ₁'], [λ₁']' の値を計算して表にしたものが表-1 である。

ξ₁'~ξ₃' の値は ξ' のみの函数であつて、これには林博士の高等函数表⁵⁾がある。数値計算の必要上表-5 として末尾に引用した。即ち式 (3) 及び式 (4) による数値計算は表-1 と表-5 の組合せで容易に行うことができるものである。

(2) p₂, M₂, Q₂ の算定 図-1 (c) を参照して、図示のような坐標軸につき長さ l なる梁 AB の A 端に -M_A が働く場合に求められる弾性量を表わす諸式はその結果のみをあげると次のようである。

表-2 λ に対する [λ₂'], [λ₂']' の値

λ	[λ ₂ ']	[λ ₂ ']'	λ	[λ ₂ ']	[λ ₂ ']'	λ	[λ ₂ ']	[λ ₂ ']'
0.0	∞	-∞	1.8	1.2461	-1.1574	3.6	1.0012	-1.0033
0.2	200.0000	-2000.0000	1.9	1.1830	-1.1102	4.0	1.0010	-1.0030
0.4	72.7273	-363.7273	2.0	1.1341	-1.0762	5.0	1.0015	-1.0027
0.6	33.3426	-111.2315	2.2	1.0966	-1.0520	6.0	1.0016	-1.0024
0.8	18.7889	-47.0821	2.4	1.0660	-1.0350	7.0	1.0015	-1.0021
1.0	12.0240	-24.1811	2.6	1.0427	-1.0233	8.0	1.0015	-1.0018
1.2	8.3668	-14.1046	2.8	1.0230	-1.0154	9.0	1.0014	-1.0015
1.4	6.1750	-9.0050	3.0	1.0078	-1.0104	10.0	1.0012	-1.0013
1.6	4.7541	-6.1558	3.2	1.0119	-1.0072	11.0	1.0011	-1.0010
1.8	3.7581	-4.4485	3.4	1.0067	-1.0054	12.0	1.0009	-1.0008
2.0	3.1040	-3.3679	3.6	1.0033	-1.0044	13.0	1.0009	-1.0006
2.2	2.6850	-2.6602	3.8	1.0014	-1.0040	14.0	1.0007	-1.0005
2.4	2.2324	-2.1783	4.0	1.0004	-1.0038	15.0	1.0007	-1.0005
2.6	1.7475	-1.8431	4.2	1.0000	-1.0037	16.0	1.0005	-1.0004
2.8	1.2715	-1.6057	4.4	0.9963	-1.0037	17.0	1.0004	-1.0003
3.0	0.8153	-1.4354	4.6	1.0000	-1.0037	18.0	1.0003	-1.0002
3.2	0.4665	-1.3249	4.8	1.0003	-1.0037	19.0	1.0003	-1.0002
3.4	0.2430	-1.2121	5.0	1.0006	-1.0036	20.0	1.0003	-1.0002
3.6	0.1269	-1.1226	5.2	1.0009	-1.0036	21.0	1.0003	-1.0002

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \frac{P}{bL} \cdot [m_2]_A [[\lambda_2'] \xi_1 \\
 &\quad + [\lambda_2']' (\xi_2 + \xi_3) + \xi_1] = \frac{P}{bL} \cdot [m_2]_A \cdot p_2 \\
 M_2 &= \frac{PL}{2} \cdot [m_2]_A \cdot [[\lambda_2'] \xi_1 - [\lambda_2']' \\
 &\quad \times (\xi_2 - \xi_3) - \xi_1] = \frac{PL}{2} [m_2]_A m_2 \\
 Q_2 &= \frac{P}{2} [m_2]_A \cdot [[\lambda_2'] (\xi_2 + \xi_3) + [\lambda_2'] 2\xi_1 \\
 &\quad - (\xi_2 - \xi_3)] = \frac{P}{2} [m_2]_A Q_2
 \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
 [\lambda_2'] &= \frac{\cosh 2\lambda - \cos 2\lambda}{\cosh 2\lambda + \cos 2\lambda - 2} \\
 [\lambda_2']' &= -\frac{\sinh 2\lambda + \sin 2\lambda}{\cosh 2\lambda + \cos 2\lambda - 2}
 \end{aligned}$$

.....(5)

式 (5) で [λ₂'], [λ₂']' は λ のみの函数である。

表-2 は λ の 0.0~0.5 の値に対する $[\lambda_3]'$, $[\lambda_3]''$ の値を計算して表にしたものである。 $\xi_1 \sim \xi_4$ の値は表-5 に示されている。 $[m_1]_A$ は式(4)で求められる値である。この場合も(1)と同様、数値表の組合せによつて容易に計算が行なわれる。

もし λ の値が大きい場合、即ち l が L に比して大きい場合は、近似的に $[\lambda_3]'=1$, $[\lambda_3]''=-1$ とおけるから式(5)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= \frac{P}{bL} [m_1]_A \cdot [\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4] \\ M_3 &= \frac{PL}{2} [m_1]_A \cdot [\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4] \\ Q_3 &= P [m_1]_A \cdot [-\xi_1 + \xi_3] \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

(3) p_3, M_3, Q_3 の算式 次に図-1 (e) を参照して、図示のような坐標軸につき、長さ l なる梁 AB の A 端に $-Q_A$ が働く場合の弾性量を表わす諸式は、その結果のみをあげると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= \frac{P}{bL} [Q_1]_A \cdot [\lambda_3] \xi_1 - [\lambda_3]'' \\ &\quad \times (\xi_2 + \xi_3) + \xi_4 = \frac{P}{bL} [Q_1]_A \cdot p_3 \\ M_3 &= \frac{PL}{2} [Q_1]_A \cdot [\lambda_3] \xi_1 \\ &\quad + [\lambda_3]'' (\xi_2 - \xi_3) - \xi_4 = \frac{PL}{2} [Q_1]_A \cdot m_3 \\ Q_3 &= \frac{P}{2} [Q_1]_A \cdot [\lambda_3] (\xi_2 + \xi_3) - [\lambda_3]'' \cdot 2\xi_1 \\ &\quad + (\xi_1 - \xi_4) = \frac{P}{2} [Q_1]_A \cdot Q_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

但し

$$\begin{aligned} [\lambda_3]' &= \frac{\sinh 2\lambda - \sin 2\lambda}{\cosh 2\lambda + \cos 2\lambda - 2} \\ [\lambda_3]'' &= \frac{\cosh 2\lambda - 1}{\cosh 2\lambda + \cos 2\lambda - 2} \end{aligned}$$

表-3 λ に対する $[\lambda_3]'$, $[\lambda_3]''$ の値

λ	$[\lambda_3]'$	$[\lambda_3]''$	λ	$[\lambda_3]'$	$[\lambda_3]''$	λ	$[\lambda_3]'$	$[\lambda_3]''$
0.0	∞	∞	1.8	1.2148	1.1230	3.6	1.0069	1.0006
1	13.5000	100.5000	1.9	1.1727	1.0715	7	1.0008	1.0007
2	9.6818	36.8636	2.0	1.1376	1.0671	8	1.0008	1.0008
3	6.6667	17.1759	1	1.1084	1.0483	9	1.0008	1.0008
4	5.0088	7.8744	2	1.0845	1.0340	4.0	1.0008	1.0008
5	4.0012	6.5120	3	1.0650	1.0233	1	1.0008	1.0007
6	3.3356	4.6834	4	1.0493	1.0155	2	1.0007	1.0007
7	2.8635	3.5865	5	1.0368	1.0099	3	1.0007	1.0006
8	2.5096	2.8771	6	1.0270	1.0060	4	1.0007	1.0005
9	2.2359	2.3941	7	1.0195	1.0033	5	1.0006	1.0005
1.0	2.0189	2.0520	8	1.0138	1.0017	6	1.0006	1.0004
1	1.8433	1.8025	9	1.0096	1.0007	7	1.0005	1.0003
2	1.6792	1.6162	3.0	1.0066	1.0002	7.2	1.0005	1.0003
3	1.5795	1.4747	1	1.0044	1.0000	8	1.0004	1.0003
4	1.4795	1.3657	7	1.0037	1.0000	9	1.0004	1.0002
5	1.3955	1.2812	2	1.0030	1.0000	5.0	1.0003	1.0002
7/2	1.3049	1.2333	3	1.0020	1.0001	10	1.0003	1.0002
6	1.3247	1.2151	4	1.0014	1.0003	1	1	1
7	1.2651	1.1635	5	1.0011	1.0004			

式(6)で $[\lambda_3]'$, $[\lambda_3]''$ は λ のみの函数である。表-3 は λ の 0.0~5.0 に対する $[\lambda_3]'$, $[\lambda_3]''$ の値を計算して表にしたものである。又 $\xi_1 \sim \xi_4$ は表-5 の値である。 $[Q_1]_A$ は式(4)でも求められるものである。この場合も前と同様、数表の組合せて計算を行うことができる。

もし λ の値が、大きい場合は、(2)と同様に、近似的に $[\lambda_3]'=1$, $[\lambda_3]''=1$ とおけるから、上式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= \frac{P}{bL} [Q_1]_A \cdot [-\xi_2 + \xi_4] \\ M_3 &= \frac{PL}{2} [Q_1]_A \cdot [\xi_1 - \xi_3] \\ Q_3 &= \frac{P}{2} [Q_1]_A \cdot [-\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_4] \end{aligned} \right\} \dots\dots (6')$$

表-4 計算順序表

順位	区分	基本計算式	備考
(I)	断面		1. L, l, a, d, \lambda, \lambda^2 2. \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5 3. \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5 4. \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5 5. 表-5の \xi_1 対おける \xi_1 \sim \xi_4 6. 表-1の \lambda 対おける [\lambda_3]', [\lambda_3]'' 7. A断面(\xi_1)の [m_1]_A, [Q_1]_A の算定 8. A断面(\xi_1)の [Q_1]_A, [Q_2]_A の算定 9. m, n は任意の断面 C の荷重 P の載荷位置を示す
(II)	断面		1. \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5 2. \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5 3. 表-5の \xi_1 対おける \xi_1 \sim \xi_4 4. 表-2の \lambda 対おける [\lambda_3]', [\lambda_3]'' 5. (I)の [m_1]_A の使用 6. A断面 \xi_1 7. m, n は任意の断面 C の荷重 P の載荷位置を示す
(III)	断面		1. \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5 2. \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5 3. 表-5の \xi_1 対おける \xi_1 \sim \xi_4 4. 表-3の \lambda 対おける [\lambda_3]', [\lambda_3]'' 5. (I)の [Q_1]_A の使用 6. (II)の [Q_1]_A の使用 7. (I)の [m_1]_A の使用
(IV)	断面		

(4) p, M, Q の算定 以上(1)(2)(3)で求められた諸式を式(1)に代入すると所要の弾性量を求める諸式として次のものが得られる。

$$\left. \begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 = P/bL \cdot [p_1 + [m_1]_A \cdot p_2 + [Q_1]_A \cdot p_3] \\ M &= M_1 + M_2 + M_3 = PL/2 \times [m_1 + [m_1]_A m_2 + [Q_1]_A m_3] \\ Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = P/2 \times [Q_1 + [m_1]_A Q_2 + [Q_1]_A Q_3] \end{aligned} \right\}$$

以上の基本式の誘導では載荷点 C が梁 AB の中央断面の左側にあり、従つて、

AC<CB で補助長を左側に附加した。載荷点が中央断面の右側にある場合は、中央断面を通る垂直軸に關し、載荷位置と梁上対称の位置に同一の荷重を働かせた時に得られる弾性量、即ち上述の場合のものの相当値によつて求められることは明らかである。ただ剪力については、慣用の規約に一致させるため、求められた結果につきその符号を反対にすればよい。

なお梁が多数の集中荷重を担う場合の弾性量は個々の集中荷重について得られた弾性量の累集によつて求められることは言うまでもない。

又集中荷重が梁 AB の中央に働く場合は、補助長 $Z=0$ であり、従つて $\delta'=\alpha-\sigma=0$ であるから、式(4)で $[m_1]_{A=0}, [Q_1]_{A=0}$ となり、この場合の弾性量は(1)の計算のみを行えばよい。

3. 計算順序表(附 計算例)

以上提案の方法による計算の順序を表にまとめると表-4 のようになる。

この表によつて計算を行うには次の順序をふまべよ。

- a. E, J, b, K, l, l' より L, λ, λ' の算出
- b. 表-1 より λ' に対する $[\lambda_1]'$, $[\lambda_1]''$ の発見
- c. (I) の諸式で $[\lambda_1]'$, $[\lambda_1]''$ 及び表-5 の δ' に対する $\xi_1 \sim \xi_4$ を用いて, $p_1, m_1, Q_1, [m_1]_A, [Q_1]_A$ を計算
- d. 表-2 より λ に対する $[\lambda_2]'$, $[\lambda_2]''$ の発見
- e. (II) の諸式で $[\lambda_2]'$, $[\lambda_2]''$, $[m_1]_A$ 及び表-5 の δ' に対する $\xi_1 \sim \xi_4$ を用いて $[m_1]_A \cdot p_2, [m_1]_A m_2, [m_1]_A \cdot Q_2$ の計算
- f. 表-3 より λ に対する $[\lambda_3]'$, $[\lambda_3]''$ の発見
- g. (III) の諸式で, $[\lambda_3]'$, $[\lambda_3]''$, $[Q_1]_A$ 及び表-5 の δ' に対する $\xi_1 \sim \xi_4$ を用いて $[Q_1]_A \cdot p_3, [Q_1]_A \cdot m_3, [Q_1]_A \cdot Q_3$ の計算
- h. (IV) の諸式で c, e, g 項の結果を加え、荷重項を乗ずる。

なお以上の計算は、表-1、表-2、表-3 及び表-5 が十分に準備されていれば、算盤と計算尺のみで全く機械的に作業を行うことができる。以下簡単な例について、数値計算を行い、計算過程を示すことにする。

4. 計算例

図-2 に示すような鉄筋コンクリート帯状基礎に図示の位置に集中荷重 $P=50t$ が働く場合、各断面に生ずる弾性量 p, M, Q を計算すること。

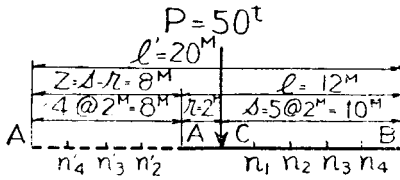
なお計算に必要な基本数値は次のようである。
 $l=1200 \text{ cm}, E=1.4 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2},$
 $J=0.256 \times 10^6 \text{ cm}^4, b=140 \text{ cm}, K=4 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-3},$

表-5 δ' 又は δ に対する $\xi_1 \sim \xi_4$ 又は $\xi_1 \sim \xi_4$ の値

δ'	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	δ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
0.01	0.0001	0.0100	0.0100	0.0000	0.21	0.623	0.579	1.029	0.644
0.02	0.0004	0.0200	0.0200	0.0000	0.22	0.623	0.579	1.029	0.644
0.03	0.0009	0.0300	0.0300	0.0000	0.23	0.623	0.579	1.029	0.644
0.04	0.0016	0.0400	0.0400	0.0000	0.24	0.623	0.579	1.029	0.644
0.05	0.0025	0.0500	0.0500	0.0000	0.25	0.623	0.579	1.029	0.644
0.06	0.0036	0.0600	0.0600	0.0000	0.26	0.623	0.579	1.029	0.644
0.07	0.0049	0.0700	0.0700	0.0000	0.27	0.623	0.579	1.029	0.644
0.08	0.0064	0.0800	0.0800	0.0000	0.28	0.623	0.579	1.029	0.644
0.09	0.0081	0.0900	0.0900	0.0000	0.29	0.623	0.579	1.029	0.644
0.10	0.0100	0.1000	0.1000	0.0000	0.30	0.623	0.579	1.029	0.644
0.11	0.0121	0.1100	0.1100	0.0000	0.31	0.623	0.579	1.029	0.644
0.12	0.0144	0.1200	0.1200	0.0000	0.32	0.623	0.579	1.029	0.644
0.13	0.0169	0.1300	0.1300	0.0000	0.33	0.623	0.579	1.029	0.644
0.14	0.0196	0.1400	0.1400	0.0000	0.34	0.623	0.579	1.029	0.644
0.15	0.0225	0.1500	0.1500	0.0000	0.35	0.623	0.579	1.029	0.644
0.16	0.0256	0.1600	0.1600	0.0000	0.36	0.623	0.579	1.029	0.644
0.17	0.0289	0.1700	0.1700	0.0000	0.37	0.623	0.579	1.029	0.644
0.18	0.0324	0.1800	0.1800	0.0000	0.38	0.623	0.579	1.029	0.644
0.19	0.0361	0.1900	0.1900	0.0000	0.39	0.623	0.579	1.029	0.644
0.20	0.0400	0.2000	0.2000	0.0000	0.40	0.623	0.579	1.029	0.644
0.21	0.0441	0.2100	0.2100	0.0000	0.41	0.623	0.579	1.029	0.644
0.22	0.0484	0.2200	0.2200	0.0000	0.42	0.623	0.579	1.029	0.644
0.23	0.0529	0.2300	0.2300	0.0000	0.43	0.623	0.579	1.029	0.644
0.24	0.0576	0.2400	0.2400	0.0000	0.44	0.623	0.579	1.029	0.644
0.25	0.0625	0.2500	0.2500	0.0000	0.45	0.623	0.579	1.029	0.644
0.26	0.0676	0.2600	0.2600	0.0000	0.46	0.623	0.579	1.029	0.644
0.27	0.0729	0.2700	0.2700	0.0000	0.47	0.623	0.579	1.029	0.644
0.28	0.0784	0.2800	0.2800	0.0000	0.48	0.623	0.579	1.029	0.644
0.29	0.0841	0.2900	0.2900	0.0000	0.49	0.623	0.579	1.029	0.644
0.30	0.0900	0.3000	0.3000	0.0000	0.50	0.623	0.579	1.029	0.644
0.31	0.0961	0.3100	0.3100	0.0000	0.51	0.623	0.579	1.029	0.644
0.32	0.1024	0.3200	0.3200	0.0000	0.52	0.623	0.579	1.029	0.644
0.33	0.1089	0.3300	0.3300	0.0000	0.53	0.623	0.579	1.029	0.644
0.34	0.1156	0.3400	0.3400	0.0000	0.54	0.623	0.579	1.029	0.644
0.35	0.1225	0.3500	0.3500	0.0000	0.55	0.623	0.579	1.029	0.644
0.36	0.1296	0.3600	0.3600	0.0000	0.56	0.623	0.579	1.029	0.644
0.37	0.1369	0.3700	0.3700	0.0000	0.57	0.623	0.579	1.029	0.644
0.38	0.1444	0.3800	0.3800	0.0000	0.58	0.623	0.579	1.029	0.644
0.39	0.1521	0.3900	0.3900	0.0000	0.59	0.623	0.579	1.029	0.644
0.40	0.1600	0.4000	0.4000	0.0000	0.60	0.623	0.579	1.029	0.644
0.41	0.1681	0.4100	0.4100	0.0000	0.61	0.623	0.579	1.029	0.644
0.42	0.1764	0.4200	0.4200	0.0000	0.62	0.623	0.579	1.029	0.644
0.43	0.1849	0.4300	0.4300	0.0000	0.63	0.623	0.579	1.029	0.644
0.44	0.1936	0.4400	0.4400	0.0000	0.64	0.623	0.579	1.029	0.644
0.45	0.2025	0.4500	0.4500	0.0000	0.65	0.623	0.579	1.029	0.644
0.46	0.2116	0.4600	0.4600	0.0000	0.66	0.623	0.579	1.029	0.644
0.47	0.2209	0.4700	0.4700	0.0000	0.67	0.623	0.579	1.029	0.644
0.48	0.2304	0.4800	0.4800	0.0000	0.68	0.623	0.579	1.029	0.644
0.49	0.2401	0.4900	0.4900	0.0000	0.69	0.623	0.579	1.029	0.644
0.50	0.2500	0.5000	0.5000	0.0000	0.70	0.623	0.579	1.029	0.644
0.51	0.2601	0.5100	0.5100	0.0000	0.71	0.623	0.579	1.029	0.644
0.52	0.2704	0.5200	0.5200	0.0000	0.72	0.623	0.579	1.029	0.644
0.53	0.2809	0.5300	0.5300	0.0000	0.73	0.623	0.579	1.029	0.644
0.54	0.2916	0.5400	0.5400	0.0000	0.74	0.623	0.579	1.029	0.644
0.55	0.3025	0.5500	0.5500	0.0000	0.75	0.623	0.579	1.029	0.644
0.56	0.3136	0.5600	0.5600	0.0000	0.76	0.623	0.579	1.029	0.644
0.57	0.3249	0.5700	0.5700	0.0000	0.77	0.623	0.579	1.029	0.644
0.58	0.3364	0.5800	0.5800	0.0000	0.78	0.623	0.579	1.029	0.644
0.59	0.3481	0.5900	0.5900	0.0000	0.79	0.623	0.579	1.029	0.644
0.60	0.3600	0.6000	0.6000	0.0000	0.80	0.623	0.579	1.029	0.644
0.61	0.3721	0.6100	0.6100	0.0000	0.81	0.623	0.579	1.029	0.644
0.62	0.3844	0.6200	0.6200	0.0000	0.82	0.623	0.579	1.029	0.644
0.63	0.3969	0.6300	0.6300	0.0000	0.83	0.623	0.579	1.029	0.644
0.64	0.4096	0.6400	0.6400	0.0000	0.84	0.623	0.579	1.029	0.644
0.65	0.4225	0.6500	0.6500	0.0000	0.85	0.623	0.579	1.029	0.644
0.66	0.4356	0.6600	0.6600	0.0000	0.86	0.623	0.579	1.029	0.644
0.67	0.4489	0.6700	0.6700	0.0000	0.87	0.623	0.579	1.029	0.644
0.68	0.4624	0.6800	0.6800	0.0000	0.88	0.623	0.579	1.029	0.644
0.69	0.4761	0.6900	0.6900	0.0000	0.89	0.623	0.579	1.029	0.644
0.70	0.4900	0.7000	0.7000	0.0000	0.90	0.623	0.579	1.029	0.644
0.71	0.5041	0.7100	0.7100	0.0000	0.91	0.623	0.579	1.029	0.644
0.72	0.5184	0.7200	0.7200	0.0000	0.92	0.623	0.579	1.029	0.644
0.73	0.5329	0.7300	0.7300	0.0000	0.93	0.623	0.579	1.029	0.644
0.74	0.5476	0.7400	0.7400	0.0000	0.94	0.623	0.579	1.029	0.644
0.75	0.5625	0.7500	0.7500	0.0000	0.95	0.623	0.579	1.029	0.644
0.76	0.5776	0.7600	0.7600	0.0000	0.96	0.623	0.579	1.029	0.644
0.77	0.5929	0.7700	0.7700	0.0000	0.97	0.623	0.579	1.029	0.644
0.78	0.6084	0.7800	0.7800	0.0000	0.98	0.623	0.579	1.029	0.644
0.79	0.6241	0.7900	0.7900	0.0000	0.99	0.623	0.579	1.029	0.644
0.80	0.6400	0.8000	0.8000	0.0000	1.00	0.623	0.579	1.029	0.644

$P=50\,000\text{ kg}$

図-2



(I) の計算

$$I_r = \sqrt{\frac{4EJ}{bK}} = \sqrt{\frac{4 \times 1.4 \times 10^5 \times 0.256 \times 10^8}{140 \times 4}} = 400(\text{cm})^*$$

$$* \alpha = \frac{s}{L} = \frac{1\,000}{400} = 2.5, \quad \sigma = \frac{r}{L} = \frac{200}{400} = 0.5,$$

$$\alpha - \sigma = 2.5 - 0.5 = 2.0$$

$$\lambda = \frac{l}{L} = \frac{1\,200}{400} = 3.0 \quad \lambda' = 2\alpha = 5.0$$

表-1 より $\lambda' = 5.0$ に対し $[\lambda_1'] = 0.1163,$

$$[\lambda_1']' = -0.1341$$

各断面につき $\xi' = x'/L = x'/400$ を計算し、表-5 より $\xi_1' \sim \xi_4'$ を求め表-4 の (I) の諸式で $p_1 m_1, Q_1$ を計算すれば表-6 のようになる。

表-6

区分	断面	A'	n_4'	n_3'	n_2'	A	C	n_1	n_2	n_3	n_4	B
	ξ'	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5					
p_1	$0.1163(\xi_2' + \xi_3')$ $-0.1341(\xi_4')$ Σ	0 -0.1341 -0.1341	0.1161 -0.1327 -0.0166	0.2249 -0.1118 0.1131	0.2904 -0.0223 0.2681	0.2223 0.2099 0.4322	-0.1369 0.6588 0.5219	0.4322	0.2681	0.1131	-0.0166	-0.1341
m_1	$-0.1163(\xi_2' - \xi_3')$ $-0.1341(\xi_1')$ Σ	0 0 0	0.0097 -0.0335 -0.0238	0.0772 -0.1326 -0.0554	0.2554 -0.2848 -0.0294	0.5734 -0.4422 0.1312	0.9905 -0.4856 0.5049	0.1312	-0.0294	-0.0554	-0.0238	0
						$[m_1]_A$						
Q_1	$0.1163 \cdot 2 \xi_1'$ $-0.1341(\xi_2' + \xi_3')$ Σ	0 0 0	0.0581 -0.1338 -0.0757	0.2300 -0.2593 -0.0293	0.4940 -0.3349 0.1591	0.7671 -0.2564 0.5107	0.8422 0.1578 1.0000	-0.5107	-0.1591	0.0293	0.0757	0
						$[Q_1]_A$						

なお $[m_1]_A = 0.1312, [Q_1]_A = 0.5107$ となる。

各断面につき、 $\xi = x/L = x/400$ を計算し、表-5 より

(II) の計算

$\xi_1 \sim \xi_4$ を求めて表-4 の (II) の諸式の計算を行うと

表-2 より $\lambda = 3.0$ に対する $[\lambda_2]' = 1.0004, [\lambda_2]'' = -1.0038,$ (I) より $[m_1]_A = 0.1312$

表-7 のようになる。

表-7

区分	断面	A	C	n_1	n_2	n_3	n_4	B
	ξ	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$[m_1]_A p_2$	$1.0004 \xi_1$ $-1.0038(\xi_2 + \xi_3)$ $+ \xi_4$ Σ	1.0004 0 0 1.0004	0.9899 -1.0017 0.2498 0.2380	0.8340 -1.9408 0.9889 -0.1179	0.1665 -2.5066 3.2979 -0.2162	-1.5662 -1.9188 3.2979 -0.1871	-4.9148 1.1815 3.6209 -0.1124	-9.9709 8.5292 1.4137 -0.0280
$[m_1]_A m_2$	$1.0004 \xi_1$ $+1.0038(\xi_2 - \xi_3)$ $- \xi_4$ Σ	0 0 -1.0000 -1.0000	0.2499 -0.0836 -0.9895 -0.8232	0.9893 -0.6660 -0.8337 -0.5104	2.1247 -2.2042 -0.1664 -0.2459	3.2992 -4.9488 1.5656 -0.0840	3.6223 -8.5494 4.9128 -0.0143	1.4143 -911.384 0.9619 -0.0062
		0.1312	0.0312	-0.0670	-0.0523	-0.0110	-0.0019	-0.0000
$[m_1]_A Q_2$	$1.0004(\xi_2 + \xi_3)$ $-1.0038 \cdot 2 \xi_1$ $- (\xi_2 - \xi_3)$ Σ	0 0 0 0	0.9983 -0.5015 0.0833 0.5801	1.9343 -1.9853 0.6635 0.6125	2.4981 -4.2639 2.1959 0.4301	1.9123 -6.6209 4.9301 0.2215	-1.1775 -7.2693 8.5170 0.0702	-8.5003 -2.8381 11.3383 -0.0001
		0	0.0761	0.0804	0.0564	0.0291	0.0092	0.0000

(III) の計算

各断面につき、 $\xi = x/L = x/400$ を計算し表-5 より

表-3 より $\lambda = 3.0$ に対する $[\lambda_2]' = 1.0066, [\lambda_2]'' = 1.0002,$ (I) より $[Q_1]_A = 0.5107$

$\xi_1 \sim \xi_4$ を求めて表-4 の (III) の諸式の計算を行うと表-8 のようになる。

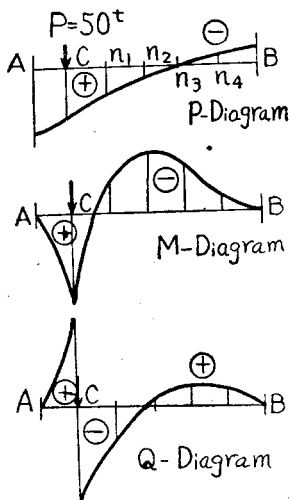
表-8

区分	断面	A	C	n_1	n_2	n_3	n_4	B
	ξ	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
[Q ₁] _A P ₃	1.0066 ξ_1	1.0066	0.9960	0.8392	0.1675	-1.5759	-4.9452	-10.0327
	-1.0002($\xi_2 + \xi_3$)	0	-0.9981	-1.9339	-2.4976	-1.9119	1.1772	8.4986
	+ ξ_3	0	0.5406	1.2985	2.3465	3.4208	3.6700	1.4207
	0.5107 Σ	1.0066	0.5385	0.2038	0.0164	-0.0670	-0.0980	-0.1134
		0.5141	0.2750	0.1041	0.0034	-0.0342	-0.0500	-0.0379
[Q ₁] _A m ₃	1.0066 ξ_1	0	0.2514	0.9954	2.1379	3.3197	3.6448	1.4230
	+1.0002($\xi_2 - \xi_3$)	0	-0.0833	-0.6636	-2.1963	-4.9311	-8.5187	-11.3406
	- ξ_2	0	-0.4573	-0.6350	-0.1506	1.5093	4.8470	9.9176
	0.5107 Σ	0	-0.2892	-0.3032	-0.2090	-0.1021	-0.0269	0.0000
		0	-0.1477	-0.1548	-0.1067	-0.0521	-0.0137	0
[Q ₁] _A Q ₃	1.0066($\xi_2 + \xi_3$)	0	1.0045	1.9463	2.5136	1.9241	-1.1848	-8.5530
	-1.0002.2 ξ_1	0	-0.4997	-1.9782	-4.2486	-6.5971	-7.2432	-2.8280
	+ ($\xi_1 - \xi_1$)	-1.0000	-0.7397	0.1552	1.9575	4.8635	8.5337	11.3306
	0.5107 Σ	-1.0000	-0.2349	0.1233	0.2225	0.1905	0.1057	-0.0004
		-0.5107	-0.1200	0.0630	0.1136	0.0973	0.0540	0

表-9

断面	A	C	n_1	n_2	n_3	n_4	B
Σp	1.0775	0.8281	0.5208	0.2481	0.0544	-0.0813	-0.1957
$P=8.929 \Sigma p(t/m^2)$	9.621	7.394	4.650	2.215	0.486	-0.726	-1.746
Σm	0	0.2492	-0.0906	-0.1684	-0.1185	-0.0394	0
$M=100 \Sigma m(t.m)$	0	24.92	-9.06	-16.84	-11.85	-3.94	0
ΣQ	0	0.9561	-0.3673	0.0109	0.1557	0.1389	0
$Q=25 \Sigma Q(t)$	0	23.90	-9.18	0.27	3.89	3.47	0

図-3



(I), (II) (III)の計算の結果を表-4 の (IV) の式で加えてそれぞれの荷重項を乗じると求める弾性量は表-9 のようになる。

図-3 は以上の結果を図示したものである。尚この例題につき他の方法(前掲備考欄の(1)及び(2))で計算を行つてみたが、当然のこととはいえその結果はよく一致した。

参考文献

- 1) 例えば K. Hayashi : Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage Berlin 1921, S.99~ の諸式
- 2) Hans Bleich : "Berechnung von Eisenbetonstreifenfundamenten als elastisch gestützte Träger". Bautech. Heft 37, 27 Aug. 1937 S.477 ~478
- 3) 岡本舜三 : "弾性床上の梁の簡易計算法" 土木技術第4巻12号(昭.24.12)
- 4) 三沢 浩 : "弾性基礎計算論" 土木技術, 第4巻5号(昭.18.5), 第4巻6号(昭.18.6)
- 5) 林 桂一 : "高等函数表" 昭.16.2.5 [第1版発行 p.88~98 第3表

(IV) の計算

荷重項は $P/bL=50/1.4 \times 4=8.929t/m^2$, $PL/2=50 \times 4/2=100t.m$, $P/2=50/2=25t$ であるから、以上

(昭.27.1.21)