

的解法によらねばならない。この方法については更に検討を進める考えである。

2. 垂直圧変化の式について(式(4)) 式(4)は近似的にレールを1種のスプリング作用をなすものと仮定して導いた式であるが、この式に用いる数値については、今後更に実験的に十分検討されねばならないと考えられる。

3. 横応力の計算について レールに作用する横方向の外力は既述のような複雑な諸原因によつて生ずるもので、これらを理論的に求めることは困難でやはり多くの実測結果による外はないであろう。著者の場合外力を数理的に表わさねばならない関係上一応の近似的取扱いをしたが、これらの点については今後更に検討を要するものと考えられる。

以上レール応力の動力学的研究の一部として考察を行つたものであるが、更に詳細な検討を進めて行きたい考えである。終りに臨み種々有益な御援助をいただいた京大教官各位に対し深謝の意を表する次第である。

#### 参考文献その他

- 1) 波谷巖：機械学会論文集第13巻45号昭.22., 穂坂衛：機械学会論文集第15巻50号昭.24., 高橋憲雄：土木学会論文集第4号昭.24.6., 後藤尙男：土木学会誌第35巻4号昭.25.4., 土木学会論文集第6号昭.26.8., 小野一良：土木学会論文集

第5号昭.25.11., 鉄道技術研究所, 報告書, 昭.26.11.

- 2) 波谷巖：弾性力学における過渡的諸問題(第1報), 機械学会論文集第13巻第45号昭.22..pp.16~20.
- 3) 最上幸夫：レール応力算定に関する一考察, 山口大学工学部学報, 第2巻, 昭.26.7. pp.107~111
- 4) 千秋邦夫：軌条に作用する横圧力, 土木学会誌, 第27巻第8号昭.16.8. pp.714~744.
- 5) 神谷修作：車輪により軌条に与えられる側圧応力に関する一試験(第1報)土木学会論文集第1, 2, 合併号 pp.1~19. 昭.22.6.
- 6) 佐藤裕：軌道の横強度理論, 土木学会論文集第5号, pp.23~32. 昭.25.11., 第6号, pp.103~112. 昭.26.8.
- 7) 上掲文献 4) p.715. 式(1)
- 8) 井上隆根：機関車働論の釣合錘が軌道に及ぼす影響について, 土木学会誌第20巻第5号, pp.369~384. 昭.9.5.
- 9) Inglis, "A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges." Cambridge (1934) より計算した概値である。
- 10) Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Nov. 30, 1931, p.14. の結果より最大垂直圧として静輪重の1.22を用いた。
- 11) 上掲論文 6) p.25. より求めた概値である。
- 12) 同上論文 p.24. より求めた概値である。(昭.26.8.2)

UDC 532.542

## 暗渠内の水流について

准員 栗津清蔵\*

### ON THE FLOW IN CLOSED CONDUIT

(JSCE April 1952)

Setzo Awazu, C.E. Assoc. Member

**Synopsis** Natural phenomenon doesnot appear without the influence of circumstances.

In hydraulics, we summarize waterflows through natural water courses, regular cannal, conduit, etc. in a general name "open channel flow."

But the flow in cannal differs the in conduit, where the relative motion of the air and the water is taken into account.

Therefore the author gave in this paper an explanation of the difference between states of motion in cannal and [conduit, for example, growth of wave motion, resistance on the surface, etc.

**要旨** 自然現象はその環境を越えて存在しない、開水路の流れとして水理学では自然水路、人工水路、暗渠等の流れを取り扱っている。しかし人工水路の流れと暗渠内の流れは空気と水の相対運動を考える時違つ

て来るもので、筆者はこの報文で例えば波動の発達、水面抵抗等の相違点を明らかにするものである。

#### 1. 緒言

開水路と管路の水流の相違について、筆者は既に述べた<sup>1)</sup>。ここでは更に開水路の一種である開渠と暗渠

\* 日本大学土木教室

の差違を物理的立場から述べる。

開水路の水流の環境は自由水面と云う管路と比較して1つの大きな特異性を持つている。しかるに自由水面を動水勾配線と解するとこの特異性は失われるけれども、総ての現象をそのように解しては自然のあるがままの姿をとらえることは難かしい。

そこで空気と水との接触面即ち自由水面の物理的説明に入る前に、開水路の水流と地球自転の関係を調べ開渠と暗渠の相違を考えて見る。

自由水面の抵抗を考えない場合については既に海洋学方面で扱われているが<sup>2)</sup>、筆者は運動方程式を解く場合水面抵抗を加味したところ次の結果を得た。

- x; 流れの方向の座標軸
- y; 水路巾の方向の座標軸
- z; 水面 (xy 平面) より鉛直下方を向く座標軸
- I; 水面勾配      b; 水路巾      d; 水深
- u; x の方向の流速    v; y の方向の流速
- μ; 渦動粘性係数    ρ; 水の密度    T<sub>0</sub>; 水面抵抗
- φ; 緯度            ω; 地球自転の角速度

運動方程式

$$\left. \begin{aligned} \rho g I + 2 \rho r \omega \sin \phi + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 \\ -2 \rho u \omega \sin \phi + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.1)$$

$$u = \frac{2}{g} \left[ \frac{s}{2} \{ \sinh B(d+z) \sin B(d-z) + \sinh B(d-z) \times \sin B(d+z) \} + a_0 e^{-Bd} \left\{ \frac{1}{2} (\sin Bd + \cos Bd) \times \sinh B(d+z) \sin B(d-z) + \sinh B(d-z) \times \sin B(d+z) \right\} - a_0 e^{-Bd} \left\{ \frac{1}{2} (\cos Bd - \sin Bd) \times \cosh B(d+z) \cos B(d-z) + \cosh B(d-z) \times \cos B(d+z) \right\} \right] \dots\dots\dots(1.2)$$

$$v = \frac{2}{g} \left[ \frac{s}{2} \{ \cosh B(d+z) \cos B(d-z) + \cosh B(d-z) \times \cos B(d+z) \} + a_0 e^{-Bd} \left\{ \frac{1}{2} (\cos Bd - \sin Bd) \times \cosh B(d+z) \cos B(d-z) + \cosh B(d-z) \times \cos B(d+z) \right\} + a_0 e^{-Bd} \left\{ \frac{1}{2} (\cos Bd - \sin Bd) \times \sinh B(d+z) \sin B(d-z) + \sinh B(d-z) \times \sin B(d+z) \right\} - a_0 e^{-Bd} (\cos Bz^2 + \sin Bz) - s \right] \dots\dots\dots(1.3)$$

$$s = gI/2\omega^2 \sin \phi, \quad q = \cosh 2Bd + \cos 2Bd$$

$$a_0 = T_0/2\mu B, \quad B = \sqrt{\omega \rho \sin \phi / \mu}$$

(1.2), (1.3) の2式は  $Z = \pi/B$  であるとその符号が変るから海洋学で<sup>3)</sup> 取扱われているように  $Z = \pi/B$

より下方では河底の影響が入つて来るものと解すると一般に水路巾、水深が共にかなり大きくなると自転の影響が現われ、両極に近い程渦動粘性係数の程度如何に依つてはその影響は考えるに充分な程度に効いて来るに違いない。然し一方では今の所渦動粘性係数そのものについての解析も不充分であり、或はこの影響が打ち消される何等かの働きが水流内部に起るのではないかと一応考えられる。

暗渠は一般にその断面は小さく、河川のように大きな断面をもつていないから、暗渠の場合には一応上述の影響は考えなくても良いと言うことになる。

2. 接触面又は自由水面

空気と水との接触面即ち自由水面は2つの粘性流体が相対運動をしている一部分であつて、今その接触面に圧力方程式を応用すると、

$$p' + \rho' v'^2/2 = C_1 \dots\dots\dots(2.1)$$

$$p + \rho v^2/2 = C_2 \dots\dots\dots(2.2)$$

前式は空気、後式は水についての式で、今空気と水とが接触面に於て附着力に依つて一体となつて流動しているものと考え且つ  $p' = p, v' = v$  であるならば接触面は滑かな面と解せられる。空気の流速分布の如何によつては水流に接触面を通じてエネルギーの増減をもたらすものである。その様な場合の解析は既に筆者が述べた<sup>4)</sup> からこの節では略す。

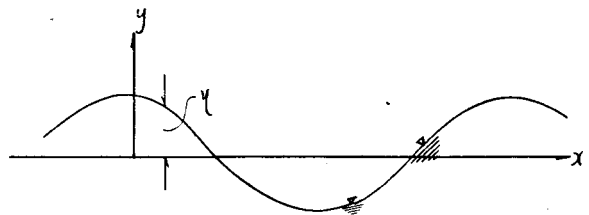
一方  $v' = v, p' \neq p$  又は  $v' \neq v, p' = p$  の場合には現象の安定性を保たんために少くとも波動が起るべきで、圧力差が表面張力と釣合らうものと考えると即ち表面張力波が起つているものと考えるのが妥当であり、後者の場合には接触面に1つの渦の層が出来るものと解せられる。

いづれにせよ接触面に於て圧力差、流速差を生ずる時はその面は1つの不連続性の面と解せられ、一般に波が発生するものと推論せられる。

3. 接触面の非粘性流体力学的考察

接触面が不連続性の面である場合即ち空気と水との相対運動に依つて起る表面波について考えることにする。

図-1



i) 波のエネルギー 自由水面の高さが (3.1) 式で与えられるものとする1波長の有するエネルギー

は (3.2) に依つて示される。

$$\eta = a \sin(mx - nt) \dots \dots \dots (3.1)$$

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2 \lambda \dots \dots \dots (3.2)$$

$a$ : 波高の半分  $\lambda$ : 波長

今  $a$  と  $\lambda$  との比を  $\alpha$  と置かれるならば 1 波長当りのエネルギーは  $\lambda$  のみの函数となり,  $\lambda$  に比例して単位長さ当りのエネルギーは増加する故に相対運動に於て  $\lambda$  の大きい波が発生するならば水流に与えられる或いは水流が外部になす仕事量が大いと言ふことが出来る。(3.1) から  $\lambda = 2\pi/m$ , 波の伝播速度を  $C$  とすると

$$C = n/m \dots \dots \dots (3.3)$$

故に  $\lambda$  と  $C$  とは比例することが容易に知られる。

ii) 波の発生についての条件 2 流体の相対運動に於て, 各々流体の深さ, 密度, 流速を  $h, h'; \rho, \rho'; v, v'$  とする。今接触面が波動現象している場合の伝播速度  $C$  は表面張力  $T$  を加味すると次の式で与えられる<sup>5)</sup>。

$$m\rho(v-C)^2 \coth mh + m'\rho'(v'-C)^2 \coth mh' - g(\rho-\rho') - Tm^2 = 0 \dots \dots \dots (3.4)$$

$$\therefore C = \left[ \rho v \coth mh + \rho' v' \coth mh' \pm \left[ (\rho v \coth mh + \rho' v' \coth mh')^2 + \frac{1}{m} (\rho^2 \coth mh + \rho'^2 \coth mh') \{ g(\rho-\rho') + Tm^2 - v^2 m \rho \coth mh - v'^2 m \rho' \coth mh' \} \right]^{1/2} \right] (\rho \coth mh + \rho' \coth mh') \dots \dots \dots (3.5)$$

(3.5) の正負の附号は進行波と逆行波を意味する。 $C$  が実数であると波動現象は釣合の状態では虚数であると波動現象は不安定で, 波はどんどん発達すると言ふことを意味する。

故に波の発生する条件は伝播速度が虚数になる条件と同一である。今  $v-v'=v_r$  (相対速度) と置くと求める条件は

$$v_r^2 > \left\{ 1 + \frac{\tanh mh' - 1 + s(\tanh mh - 1)}{1+s} \right\} \left\{ \left( \frac{\rho+\rho'}{\rho\rho'} \right) \times \left( \frac{g(\rho-\rho')}{m} + Tm \right) \right\} \dots \dots \dots (3.6)$$

$$s = \rho'/\rho, \quad m = 2\pi/\lambda$$

上式から波の発生する相対速度は  $h, h'$  に支配せられることが示され, 且つ  $\alpha \rightarrow 0$  の時  $\tanh \alpha \rightarrow 0$  で,  $\alpha > 8.8$  で  $\tanh \alpha \approx 1$  と見做し得る<sup>6)</sup>。それ故に  $h, h'$  の組合せに依つて波の発生する限界が違つて来るはずでそれ等を調べて見る。

iii) 限界相対速度 波が発生する最小相対速度を限界相対速度と名付けると (3.6) 式から容易に得られる。

$$v_c^2 = \left\{ 1 + \frac{\tanh mh' - 1 + s(\tanh mh - 1)}{1+s} \right\} \left\{ \left( \frac{\rho+\rho'}{\rho\rho'} \right) \times \left( \frac{\lambda g(\rho-\rho')}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\lambda} \right) \right\} \dots \dots \dots (3.7)$$

今 2 流体を水と空気に取り, 温度を 15°C とすると  $\rho = 0.99913, \rho' = 0.001226, T = 73.49 \text{ dyne/cm}$

a)  $mh, mh' > 8.8, m = 2\pi/\lambda$

$$v_c^2 = \frac{\rho+\rho'}{\rho\rho'} \left\{ \frac{\lambda g(\rho-\rho')}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\lambda} \right\} \dots \dots \dots (3.8)$$

$v_c = 6.6 \times 10^2 \text{ cm/sec}$  その時の  $\lambda = \lambda_c = 1.72 \text{ cm}$ , 尚水の代りに海水を取ると  $v_c = 671 \text{ cm/sec}$  である<sup>7)</sup>。

b)  $mh > 8.8, mh' < 8.8$

$$v_c^2 = \left\{ 1 + \frac{\tanh mh' - 1}{1+s} \right\} \left\{ \left( \frac{\rho+\rho'}{\rho\rho'} \right) \left[ \frac{\lambda g(\rho-\rho')}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\lambda} \right] \right\} \dots \dots \dots (3.9)$$

$$\text{但し } 0 < 1 + \frac{\tanh mh' - 1}{1+s} < 1$$

この場合の限界相対速度は a) の場合のそれよりも一般に小さいと言ふことが出来る。もし  $\lambda$  が増加  $h'$  が減少すると限界相対速度が小さくなる。極端に言うて無限小相対速度で波が発生すると言ふことになる。一方表面張力を考えると相対速度が 23.1 cm/sec より小さくなるが出来ない<sup>8)</sup>。

しかし相対速度が 23.1 cm/sec の場合の波長は相当大きいもので, そのようなことが暗渠の場合には可能であるかどうかと云う課題が残っている。

実際の波の例から波高と波長の比は  $1/10 \sim 1/100$  で, その内最も多いのは  $1/20 \sim 1/40$  である<sup>9)</sup>。そのことから波動現象を推論すると自然に  $h'$  に或る制限を受けると言ふことが理解せられる故に無限小相対速度で波が発生すると云う矛盾が解決せられる。

従つて限界相対速度は  $h'$  の種々の値に対して考えられるものであるが波高と波長の比についての理論的解答が与えられない限り a) のように決定することが

表-1

Values of $v_c \cdot 10^{-5}$ (cm/sec); $\frac{\lambda}{h'} \text{ (cm)}$					
$\frac{\lambda}{h}$	0.1	0.2	0.3	1.0	1.5
1.0	378371	19,092	129513	5,0420	4,4183
0.8	"	"	"	5,0415	4,4090
0.6	"	"	"	5,0365	4,3626
0.4	"	"	"	4,9754	4,1243
0.2	"	"	129448	4,2882	3,0298
0.1	"	19,0285	12,5628	28,119	1,7527
$\frac{\lambda}{h}$	1.72	2.0	3.0	5.0	10.0
1.0	4,3727	4,4111	4,9179	6,0464	7,0538
0.8	4,3550	4,3695	4,7303	5,4329	5,8902
0.6	4,3104	4,2265	4,3120	4,6089	4,5723
0.4	3,9320	3,7656	3,4750	3,3108	3,1317
0.2	2,7341	2,4692	2,0428	3,2432	1,6088
0.1	1,5370	1,3530	1,0530	0,9203	0,8234

出来ない。尚 (3.9) 式の数値計算の結果は 表-1 の通りである。

$$c) \cdot \frac{2\pi h}{\lambda} < 8.8, \frac{2\pi h'}{\lambda} > 8.8$$

$$v_{c^0} = \left\{ 1 + \frac{s(\tanh mh - 1)}{1+s} \right\} \left[ \frac{\rho + \rho'}{\rho \rho'} \left\{ \frac{\lambda g(\rho - \rho')}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\lambda} \right\} \right] \dots \dots \dots (3.10)$$

この場合には a) より小さい限界相対速度を与え、b) と比較するともし  $h$  と  $h'$  が同じ程度の大ききとすると b) より限界相対速度を与える。尚この場合は薄層流<sup>10)</sup>の非粘性流体力学的考察とも考えることが出来る。

4. 接触面の粘性流体力学的考察

a) 水面抵抗 空気、水の2粘性流体の相対運動に於てその接触面を通じて、水にエネルギーが加えられたり、或いは水よりエネルギーが取り去られたりする事は、そのエネルギーの大小にかかわらず起るものである。

エネルギーの増減の程度は相対速度の大小に依るので限界相対速度より大きい場合或いは小さい場合に依つては、接触面自身の現象が違うから当然接触面を通じてのエネルギーの増減も違うものと考えられる。

エネルギーの増減を工学的に水面抵抗として取扱うならば、自ら水面抵抗はこれを限界速度より小さい場合と大きい場合について考えるべきである。

i) 限界相対速度以下の場合 現象学的に例えば空気が静止、水が流動すると言う初期条件をもつた流動に於ては空気は水の流動に依つて運動が与えられ、釣合の状態として水面上に空気の境界層が出来るものと解せられる<sup>11)</sup>。その考えから出発して水面抵抗を求めるとその抵抗係数は次の式で与えられる。

$$C_f = f(R)^{0.5}, R = v_r \cdot x / \nu_a \dots \dots \dots (4.1)$$

x: 水路の勾配、彎曲等の条件の変化する点から点までの距離

$\nu_a$ : 空気の動粘性係数

ii) 相対速度が限界速度より大きい場合

$$C_f = 0.004 \sim 0.005 \dots \dots \dots (4.2)$$

相対速度の大小に依つて水面抵抗も変るから、水流の流速分布も自然に変つて来るもので、その事については筆者の研究成果を参考せられたい<sup>12)</sup>。さて前節の考察と併せて暗渠の水流を考えると、開渠の場合の限界相対速度は 671cm/sec であつたが、暗渠の場合には空気の層の厚さの大小に依つて限界相対速度が違つて来る。それ故に同一相対速度でも開渠より一般に大きい抵抗を受け水流のエネルギーの消耗も従つて大きいと言うことになる。

この様に非粘性、粘性流体力学的考察から暗渠内の空気の厚さが、小さい場合には現象的に開渠の場合とは違うものである事が理解せられる。

5. 結 語

1) 波の発生 一般に空気と水との相対運動に依る波の発生は空気の厚さに依つて支配せられる。その厚さが無限大の時には、或る定つた限界相対速度が唯一つ考えられる。

しかし、その厚さが小さい時には、限界相対速度は前述より小さい。又或る一定の厚さに対して唯一つの限界相対速度を与える。

もし風の機構が空気の層が薄い場合と同一な機構であるならば、やはり同一の結果が見出される。

2) 暗渠内の水流現象 空気の層が薄く相対速度が限界相対速度以上になると一般に波が発生する。そして水面抵抗も亦大きくなる。今暗渠の空気の厚さと抵抗を考えると、水位が或る限度までは表面流速が増加するに比例して増加する。しかし水位が更に増加して空気の厚さが 1cm 以下になると空気の影響が更に効いて来る。そして限界相対速度より大きいと波が発生すると共に抵抗も大きいと言うことになる。

もし水位が徐々に増加して、最後に満管状態になるものとする、水面抵抗は段々大きくなり(但し円形断面のような場合には水面よりの抵抗より側壁の影響が大きき効いて来るが、矩形断面の場合には側壁よりも水面抵抗が効いて来るから)最後に固体壁面抵抗と変り、概して連続的に水面抵抗が増加するものと解せられる。在来のように水面抵抗を考えないならば、水面抵抗は満管と同時に起り、不連続現象のように考えられる。そもそも自然現象はもし不連続性が起るとそれは不安定であつて、安定になるべく1つの現象が必ず起り、連続性が保たれるものであると言う事柄を考えても筆者の考察が妥当であると考えられる。以上暗渠の水流現象を物理的立場から述べたが、定量的問題例えば波高、波長、相対速度等の関係は実験に依つて得られる。

最後に本研究を行うに当り種々の御指導を賜りました本間博士に厚く感謝致します。

参 考 文 献

拙著:「開水路の等流に対する理論的考察」; 1) 4), 11), 12), 13)  
 日高:「海洋物理学」; 2), 3)  
 須田:「海洋科学」; 3), 9)  
 Thomson: "Theoretical Hydrodynamics"; 5)  
 林:「高等函数表」; 6)  
 浜田:「風浪に関する一考察」; 7)  
 藤本:「応用流体力学」; 8)  
 石原, 岩垣, 合田:「薄層流に関する研究」; 10)  
 (昭. 26. 11. 19)