

Pre-Stressed Concrete の収縮とクリープについて

正 員 岡 田 清*

SHRINKAGE AND PLASTIC FLOW OF PRE-STRESSED CONCRETE

(JSCE Jan. 1952)

Kiyoshi Okada, C. E. Member

Synopsis On the pre-stressed concrete it is well-known that the steel stress decreases gradually due not only to the shrinkage and creep of concrete, but also to the creep of steel. This paper represents by use of the Davis-Granville's and Whitney's laws of concrete creep the theoretical solutions that give the total amount of stress decrease of steel due to these behaviors of pre-stressed concrete and that coincide well with the experiments done lately. The writer believes that this paper would give an effective clue to the design of pre-stressed concrete.

1. 序

Pre-Stressed Concrete においては、コンクリートの収縮及びクリープによつて、初応力の減退が起ることは周知の事実である。と同時に高い初応力を受けるピアノ線自身においても、僅かではあるがクリープを起すものであつて、コンクリートのクリープに関する。(1) Davis, Glanville の法則 (2) Whitney の 2 法則を基礎として、これらが初応力減退に及ぼす影響につき理論的考察を行つた。その結果は諸種の実験結果と較べ満足すべきものがある。

2. ピアノ線がクリープしない場合

(i) 断面重心と一致する緊張力を与えた時

A_c, A_s : コンクリート, ピアノ線の断面積
 $p = A_s/A_c$

P : ピアノ線の緊張力

P_0 : ピアノ線の緊張解放直後の張力

E_c, E_s : コンクリート及びピアノ線のヤング係数

n : 弾性係数比

とすれば、緊張解放直後においては

$$P_0 = P \frac{1}{1+np} \quad \dots\dots\dots(1)$$

となるから、その時のコンクリート、ピアノ線の応力 σ_{co}, σ_{so} はそれぞれ

$$\sigma_{co} = \frac{P_0}{A_c} = \frac{P}{A_c} \frac{1}{1+np}, \quad \sigma_{so} = \frac{P_0}{A_s} = \frac{P}{A_s} \frac{1}{1+np} \quad \dots\dots\dots(2)$$

である。¹⁾

次にコンクリートのクリープについては、いわゆる (1) Davis-Glanville の法則, (2) Whitney の法則が成立するものとする、コンクリートが応力 $\sigma(t)$

を受けた時の総歪み $\delta(t)$ は

$$\delta(t) = \frac{\sigma(t)}{E_c} + \frac{1}{E_c} \int_0^t \sigma(t) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \quad \dots\dots\dots(3)$$

$\phi(t)$: コンクリートのクリープ特性

式 (3) で $\phi(t)$ を独立変数の如く考えて

$$\delta(\phi_t) = \frac{\sigma(\phi_t)}{E_c} + \frac{1}{E_c} \int_0^{\phi_t} \sigma(\phi_t) d\phi_t \quad \dots\dots\dots(4)$$

とすることができる。²⁾

又コンクリートの収縮歪みは、コンクリートの品質養生保存状態によつて異なるものであるが、一定条件の下では 2~3 年後にはほぼ一定値を持つに至るもので、その増大は材令初期において著しく、材令と共にその増大率は小さくなり、その状況はクリープ特性と類似している。従つて一般的には収縮歪み S_t は

$$S_t = f(\phi_t) \quad \text{かつ} \quad (S_t)_{\max} = S_n = f(\phi_n) \\ S_t = 0 \quad \text{at} \quad \phi_t = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

S_n, ϕ_n : 夫々 S_t, ϕ_t の終局値

として実験的に $S_t = f(\phi_t)$ 曲線を決定できる。

$S_t - \phi_t$ 関係として以下の計算を簡単にするために

$$S_t = k\phi_t \quad \text{or} \quad S_t = \frac{S_n}{m} \phi_t \quad \dots\dots\dots(6)$$

k : 常数 m : $\phi_n = \phi_t$ の終極値

$$\text{又は} \quad S_t = a\phi_t + b\phi_t^2 \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$a = \frac{2S_n}{m} \quad b = -\frac{a}{2m} = -\frac{S_n}{m^2}$$

の如き簡単な 1 次、或いは 2 次関係を仮定しても、その結果は充分である。³⁾

ピアノ線の緊張解放後、コンクリートのクリープおよび収縮によつて、コンクリートの縮みは次第に増大し、従つてピアノ線の初期緊張力 P_0 は次第に減少する。

この減少緊張力を P_t とすると、緊張解放後の時間

* 京都大学助教授, 工学部建築教室

t (その時のクリープ特性値は ϕ_t) における, コンクリートの縮みの増大量は式 (2), (4), (6) の関係を用いると

$$l_c \left[\frac{P_0}{A_c E_c} \phi_t - \frac{1}{A_c E_c} \left\{ P_t + \int_0^{\phi_t} P_t d\phi_t \right\} + k \phi_t \right]$$

(ただし l_c : コンクリート部材の長さ) となる。上式の第1項は初期応力によるクリープ歪みを表わす。一方ピアノ線の縮みの増量は $\frac{P_t}{A_s E_s} \cdot l_s$ (ただし l_s : ピアノ線の長さ) で表わされ, コンクリートとピアノ線の間に滑動はないものとする, 上記コンクリートの縮みと等しくなければならない。従つて次式が成立する。

$$\begin{aligned} l_c \left[\frac{P_0}{A_c E_c} \phi_t - \frac{1}{A_c E_c} \left\{ P_t + \int_0^{\phi_t} P_t d\phi_t \right\} + k \phi_t \right] \\ = \frac{P_t}{A_s E_s} l_s \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

これを $t=0$ ($\phi_t=0$) の時 $P_t=0$ を初期条件として

$$\left. \begin{aligned} \text{解くと } P_t = (P_0 + k D_c) \left(1 - e^{-\frac{r}{1+r} \phi_t} \right) \\ \text{ただし } D_c = A_c E_c, D_s = A_s E_s, r = \frac{D_s l_c}{D_c l_s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

もし式 (2), (4), (7) を用いると

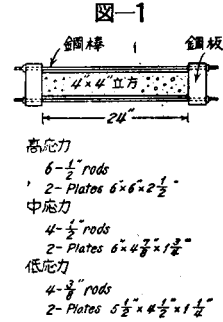
$$\left. \begin{aligned} P_t = \left\{ P_0 + \left(a - \frac{2b}{R} \right) D_c \right\} (1 - e^{-R \phi_t}) \\ + 2b D_c \phi_t \\ R = \frac{r}{1+r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

を得る。

これよりコンクリートおよびピアノ線の応力減衰が求められ, 又部材全体の縮みも求められる。

A. C. I. 1946 年所載の Howard R. Staley & Dean Peabody 両氏の実験結果⁴⁾

と比較すると次の如くである。用いられたコンクリートは, セメント 356 kg/m³ 配合 1:2.1:3.2, w/c=45%。Pre-Stress の方法は図-1 の如く鋼板, 鋼棒を用い, コンクリートの初応力は (a) 2390 psi (=167kg/cm²) (b) 1550 psi (=109kg/cm²) (c) 935 psi (=65kg/cm²) の高低中の3段階につき, 各々 15 個の供試体 (寸法 4"×4"×24") を作り, 材令 9~16 日で初応力をかけ約 400 日間コンクリート, 鋼棒の歪みが測定されている。その時同一配合のプレ



ンコンクリートの収縮歪みは

- (a) の場合 (材令 16 日載荷) 61.5×10⁻⁵
- (b) " (" 12 日 ") 68.4×10⁻⁵
- (c) " (" 9 日 ") 79.5×10⁻⁵

と, かなり大きい。これは配合が富であり, かつ保存湿度が 50% という低値であるからである。なおこの実験ではクリープ特性 ϕ_t を求める実験が行われていないが, 彼等が実験を解折して求めているクリープ係数 $\phi_t = \frac{\epsilon_f}{f_c} (\epsilon_f$: 収縮を除外したコンクリートの総歪み, f_c : コンクリートの応力) の平均値より $\phi_t = C_t E_c - 1$ として ϕ_t を求めると表-1 の如くなる。

表-1

材令 50 日において	$\phi_t = 43.4 \times 10^{-8}$	$\phi_t = 0.89$
" 100 日 "	-51.4 "	" 1.24
" 200 日 "	-64.2 "	" 1.78
" 380 日 "	-70.2 "	" 2.06
" 450 日 "		$m = n \div 2.10$

ただし $E_c = 4.35 \times 10^6$ psi. を採用。

一方収縮歪みは既述の値より僅か増大するから, 式 (6) を用いるために次の如く仮定した。

- (a) の場合 $S_t = 31 \times 10^{-5} \phi_t$
- (b) の場合 $S_t = 35 \times 10^{-5} \phi_t$
- (c) の場合 $S_t = 40 \times 10^{-5} \phi_t$ これより式 (9)

により材令約 400 日 ($\phi_t \div 2.0$) における鋼棒の縮み歪み $\frac{P_t}{D_s}$ を求め, 実験と比較すると表-2 を得, 極めてよく一致する。

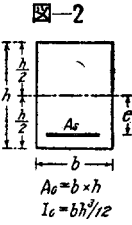
表-2

	理論値[式(9)] *	実験値	理論値 実験値
(a) の場合	72.3×10 ⁻⁵	80.2×10 ⁻⁵	0.903
(b) "	74.0×10 ⁻⁵	80.0×10 ⁻⁵	0.925
(c) "	75.2×10 ⁻⁵	76.0×10 ⁻⁵	0.989

* $E_c = 4.35 \times 10^6$ psi.
 $E_s = \begin{cases} \text{(a), (b) の場合 } 28.4 \times 10^6 \text{ psi.} \\ \text{(c) " } 29.3 \times 10^6 \text{ psi.} \end{cases}$

ϕ_t の値を一定応力の下で測定した資料があれば, 結果は更によくなるものと思われる。

(ii) 偏心緊張力を与える時
 Pre-Stressed Concrete を曲げ材として使用する場合には, 図-2 の如く偏心緊張力があたえられる。この場合には, 緊張解放直後では式 (1), (2) に相当して



$$\left. \begin{aligned} P_0 &= P \frac{1}{1+np'} \\ \sigma_{20} &= \frac{P_0}{A_c'} & \sigma_{s0} &= \frac{P_0}{A_s} \\ \text{ただし} & \frac{1}{A_c'} = \frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c}, & p' &= \frac{A_s}{A_c'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

をうる。

故に緊張解放後ピアノ線挿入位置において、コンクリートとピアノ線は常に同一の縮みを示すという条件式を立てれば、式(9)、(10)と同じ式が得られる。ただ A_c の代わりに A_c' 、 $D_c = A_c E_c$ の代わりに $D_c' = A_c' E_c$ とすればよい。従つてたとえ式(9)に相当して、減退緊張力 P_t は

$$\left. \begin{aligned} P_t &= (P_0 + k D_c') \left(1 - e^{-\frac{r'}{1+r'} \varphi_t} \right) \\ D_c' &= A_c' E_c, & r' &= \frac{D_s}{D_c'} \frac{l_c}{l_s}, & D_s &= A_s E_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

となる。

これより断面上下縁の歪みの増大、従つてその差 δ をも求めることが出来る。式(12)を用いて δ を計算すると

$$\begin{aligned} \delta &= (c' - c) \frac{1}{D_c'} \left[P_0 \varphi_t - (P_0 + k D_c') \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \varphi_t - \frac{1}{r'} \left(1 - e^{-\frac{r'}{1+r'} \varphi_t} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots(13) \\ c' - c &= A_c' \frac{eh}{I_c} \end{aligned}$$

である。

この式を先年仁杉博士が行われた鋼弦コンクリートに関する実験桁中⁵⁾ プレソコンクリートの収縮、Pre-Stressed 部材の上下縁歪みを約 140 日に亘つて観測された本桁 VII について適用すると次の如くである。

- 桁断面 $A_c = b \times h = 8 \times 12 \text{ cm}$
- ピアノ線 $A_s = 0.259 \text{ cm}^2$, $e = 5 \text{ cm}$
- $P = 2000 \text{ kg}$, $E_c = 270\,000 \text{ kg/cm}^2$, $n = 8$
- コンクリート配合 = 1:0.7:1.33 $w/c = 29\%$
- 7 日間空中養生後ピアノ線の緊張解を行つた。
- プレソコンクリート材令約 140 日の収縮歪み $S_t \doteq 20 \times 10^{-5}$

なお本実験でも、コンクリートのクリープ特性 φ_t についての実験が行われていないのは残念である。従つて今 $k = 15 \times 10^{-5} \varphi_t$, ($S_n \doteq 30 \times 10^{-5}$, $m = \varphi_n = 2.0$) 材令 140 日で $\varphi_t = 1.5$ と仮定する。この仮定はコンクリートの品質等から考えて不当な値ではない。故に

$p' = 0.0666$, $P_0 = 1900 \text{ kg}$, $D_c' = 96 \times 2.7 \times 10^5 \text{ kg}$, $r' = 0.0533$, $\varphi_t = 1.5$ を用いると減退緊張力 $P_t = 235 \text{ kg}$ ピアノ線の応力減退 $\frac{P_t}{A_s} = 907 \text{ kg/cm}^2$ となり、式(13)より上下縁歪みの差 $\delta = 46.5 \times 10^{-5}$ をうる。実験では $\delta \doteq 49 \times 10^{-5}$ であり、理論上の大略の予想とよく一致する。従つて今後このような実験では φ_t の実験が同時に行われることが望まれる。

3. ピアノ線もクリープする場合

Pre-Stressed 部材のピアノ線は普通クリープしないものとされているが、応力がかかなり大きくなれば、普通ピアノ線では僅かではあるが、やはりクリープする。最近 Gustav Magnel が Pre-Stressed Concrete に普通使用のピアノ線 5-I ($\phi 5 \text{ mm}$) と、特別試作した 5-II-B ($\phi 5 \text{ mm}$), 7-I-B ($\phi 7 \text{ mm}$) 3 種について実験した所によれば⁶⁾, 5-I 線では 123 000 psi. (= 8600 kg/cm²) の応力に対しては、初期弾性歪みはクリープのため約 16% 増大しうる。若し最初 137 000 psi. (= 9600 kg/cm²) の応力をあげ約 2 分間一定に保つた後 123 000 psi. に下げると、この増加は 7% と減少する。長さを一定に保つ実験では初期応力 123 000 psi. に対して応力の減少は 12%, もし最初 137 000 psi. の応力を上げ、2 分間一定に保つた後 123 000 psi. に下げた場合には応力の減少は 4% になつた。

5-II-B 線では 147 000 psi. (= 10 150 kg/cm²) の応力では 123 000 psi. の 5-I 線に較べクリープは遙かに小で、188 000 psi. (= 13 160 kg/cm²) で始めて 5-I 線位クリープする。

又 7-I-B 線では 125 000 psi. (= 8750 kg/cm²) でのクリープは殆んどなく、150 000 psi. (= 10 500 kg/cm²) で 5-I 線程クリープしたという。

そしてこの普通ピアノ線のクリープは載荷後 20 時間迄がかかなり大きく、それ以後歪みの増大率は漸減する。

ピアノ線のクリープ特性 ϕ_t は、コンクリートの φ_t と類似の形を持つから、近似的に $\phi_t = \alpha \varphi_t$ (α : 常数) とし、かつ ϕ_t についても φ_t 同様にクリープ基礎式(3)、(4)が成立するものとして、減退緊張力 P_t を求めると次の如くである。

緊張解放後のコンクリートの縮みの増大は 1. の場合と同様に表わされ、ピアノ線の縮みは

$$\begin{aligned} & l_s \left[-\phi_t \frac{P_0}{A_s E_s} + \frac{1}{A_s E_s} \left(P_t + \int_0^{\phi_t} P_t d\phi_t \right) \right] \\ &= l_s \left[-\alpha \varphi_t \frac{P_0}{A_s E_s} + \frac{1}{A_s E_s} \left(P_t + \int_0^{\alpha \varphi_t} P_t \alpha d\varphi_t \right) \right] \end{aligned}$$

で表わされるから式(8)に相当して次式をうる。

$$l_c \left[\varphi_t \frac{P_0}{A_c E_c} - \frac{1}{A_c E_c} \left(P_t + \int_0^{\varphi_t} P_t d\varphi_t \right) + k \varphi_t \right]$$

$$= l_s \left[-\alpha \varphi_t \frac{P_0}{A_s E_s} + \frac{1}{A_s E_s} \left(P_t + \int_0^{\alpha \varphi_t} P_t \alpha d\varphi_t \right) \right] \dots\dots\dots(11)$$

これを $t=0$ のとき $\varphi_t=0$ $P_t=0$ なる初期条件を入れて解くと

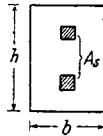
$$P_t = \left(P_0 + \frac{r}{r+\alpha} k D_c \right) \left(1 - e^{-\frac{r+\alpha}{r+\Gamma} \varphi_t} \right) \dots\dots\dots(12)$$

$$r = \frac{D_s}{D_c} \frac{l_c}{l_s}, \quad D_s = A_s E_s, \quad D_c = A_c E_c$$

偏心緊張力があたえられる時には D_c の代わりに D_c' , r の代わりに r' を用いることは 2. で述べたと同様である。

Magnel は実験桁の歪みを分析して、時間 800 日におけるコンクリートの総歪み(収縮を除く)と初期弾性歪みの比 C を 2.12 と求め、これより 8" 立方体圧縮強度 8700 psi. (609 kg/cm²) 程度のコンクリートの C は安全を見て $C=2.2$ (従つて $\varphi_n=C-1=1.2$) とし、このコンクリートを用いた Pre-Stressed Prism に $\sigma_{co}=1440$ psi. $\sigma_{so}=123\ 000$ psi. の初応力をあたえた時、コンクリートの収縮 ($S_n=20 \times 10^{-5}$), コンクリートおよびピアノ線のクリープによる σ_{so} の減退応力を略算的に求めている。

図-3



$A_c = b \times h$
 $A_s = 32 \phi \frac{3}{10}$
 $= 0.0107 A_c$
 $G_{so} = 123\ 000$ Psi
 $E_c = 5\ 000\ 000$ Psi
 $E_s = 268\ 000\ 000$ Psi
 $\gamma = 3.36$

式(12)を用いてこれ等を計算すると次の様になる(図-3 参照)。

$\sigma_{co}=1440$ psi. $\sigma_{so}=123\ 000$ psi.

$\therefore p = \frac{A_s}{A_c} \frac{\sigma_{co}}{\sigma_{so}} = 0.0107$

今 $A_s = 32 \phi \frac{3}{10} = 2.262$ in.² とすると $A_c = 193$ in.²
 $P_0 = 2.783 \times 10^5$ lb. $E_c = 5\ 000\ 000$ psi. $E_s = 268\ 000\ 000$ psi. $\therefore n = 5.36$

$l_c = l_s$ として $r = \frac{D_s}{D_c} = np = 0.0628$

$S_n = 20 \times 10^{-5}$ $\therefore k D_c = \frac{S_n}{m} D_c = \frac{20 \times 10^{-5}}{1.2} \times 193$
 $\times 50 \times 10^5 = 1.770 \times 10^5$ lb.

(a) 5-I 線使用でピアノ線クリープ 12% の場合
 $\alpha = \frac{0.12}{1.2} = 0.1$ $\therefore P_t = 0.574 \times 10^5$ lb. $= 0.2060 P_0$
 即ち緊張力減退は 20.6%

(b) 5-I 線を使用しても、最初 137 000 psi. 迄 over-stress した後 123 000 psi. に下げたためクリープ 4% となる場合。

$\alpha = \frac{0.04}{1.2} = 0.0333$ $\therefore P_t = 0.4015 \times 10^5$ lb. $= 0.1443 P_0$

即ち緊張力減退は 14.4%

(c) 5-I-B 線又は 7-I-B 線使用で、 $\sigma_{so}=123\ 000$ psi. では實際上ピアノ線クリープのない場合
 $\alpha=0$ $\therefore P_t = 0.3088 \times 10^5$ lb. $= 0.1110 P_0$

緊張力減退は 11.1%

Magnel の略算では (a), (b) の場合緊張力の減退はそれぞれ 22%, 16% であり, (c) の場合には 12% になると言っているが、これは上記理論値にほぼ等しい。

4. 結 び

コンクリートのクリープに関する Davis-Glanville, Whitney の 2 法則を基礎として Pre-Stressed Concrete に及ぼすコンクリートの収縮, クリープ, 鋼のクリープ等の影響について理論的に考察した。これによれば緊張力の減退は、初期緊張力 P_0 , コンクリートの収縮 S_t , コンクリートおよび鋼のクリープ φ_t , ϕ_t , 鋼とコンクリートの剛度比 $\frac{E_s A_s}{E_c A_c}$ (or $\frac{E_s A_s}{E_c A_c'}$) の大きい程大きく、特に φ_t の影響は大きい。従つて緊張力の減退を最小限に止めるためには、コンクリートについてはその材料, 配合, 養生等について、厳密な検討を要し、又緊張力解放時について充分な考慮が払われねばならぬことは明らかである。更にピアノ線については、使用量小なる程よいが、それによつて起る高応力のためのクリープを減少又はなくすためには Magnel の実験等を参照とすべきであり、更にクリープのない良質ピアノ線の製作が期待される。又設計に際し、減退緊張力の予測を行うについても単に Hoyer が述べている如く最初よりピアノ線応力を、所定応力より 1500 kg/cm² 高めておく等の処置をとることは必ずしも正当ではない。使用コンクリートの性質、或いは養生保存状態、ピアノ線の種類等についても考察の上適当な処置をとるべきである。

上記理論解、とくに鋼のクリープを考慮する場合についてはなお議論の余地もあるが、以上の点につき一つの有力な手懸をあたえるものである。

最後に本研究について多大の御教示を賜わっている本学坂静雄教授に多謝する次第である。

参考文献

- 1) Ewald Hoyer: "Der Stahlsaitenbeton" Bd I 1938
- 2) 岡田 清:「鉄筋コンクリート梁のクリープ応力」土木学会誌 36 巻 5 号, 昭.26.5
- 3) 同 上:「鉄筋コンクリートの収縮応力」日本セメント技術年報 巻5, 昭.26.8
- 4) Howard R. Staley & Peabody: "Shrinkage and Plastic Flow of Pre-Stressed Concrete" A. C. I., Proceeding V. 42., 1946
- 5) 仁杉 巖:「鋼筋コンクリートに関する実験的研究」土木学会論文集第 7 号, 昭.25.11
- 6) Gustav Magnel: "Creep of Steel and Concrete in Relation to Prestressed Concrete" A. C. I., Proceeding V. 48, 1948

(昭.26.9.20)