UDC 624.041 : 624.072.4

曲梁の歪エネルギーに対する公式

正員・大 野 謙*

FORMURA FOR STRAIN ENERGY OF CURVED BEAM[1]

(JSCE Dec. 1951)

Isamu Ohno, C.E. Member

Synopsis Up to the present, Regarding the normal stress of curved beam, there have been formulas by Müller-Breslau, Grüning, Bach and Timoshenko. But the author, introducing the new section constant or modified moment of inertia $J=r\int y^2\frac{dF}{r}$, has introduced a formula

$$\sigma=\frac{N}{F}+\frac{My}{J},$$

and applying this to expressions of strain energy of curved beam, he has obtained the new equations as follows:

$$A_i=\int\frac{N_0^2}{2EF}ds_0+\int\frac{M_0^2}{2EJ_0}ds_0 \quad \text{(Formula for strain energy)}$$

then $$L_x=\frac{\partial A_i}{\partial X}=\int\frac{N_0}{EF}\frac{\partial N_0}{\partial X}ds_0+\int\frac{M_0}{EJ_0}\frac{\partial M_0}{\partial X}ds_0 \quad \text{(Elastic condition for statically indeterminate quantity } X\text{)}$$

when $L_x=0$, $A_i=$ Minimum (Principle of least work)

and $$\delta=\int\frac{N_0\overline{N}_0}{EF}ds_0+\int\frac{M\overline{M}_0}{EJ_0}ds_0 \quad \text{(Equation of virtual work)}$$

where $J_0=r_0\int y^2\frac{dF}{r}$; $\quad r_0=\dfrac{F}{\int\frac{dF}{r}}$

The chief characteristic of these new equations is to apply the conception of neutral axis to clasification of all the equations.

1. 従来の仕事方程式の検討

構造力学において変形または不静定力の研究のため応用広く有名な原理は最小仕事の原理と仮想仕事の原理である。而して曲梁に対しては従来次の如き公式が与えられている。今，陳述を簡単にするため剪力及び温度変化の影響を省略して書けば

先ず Müller-Breslau によれば[2]

曲梁の仕事方程式として

$$A_i=\int\frac{\mathfrak{n}^2}{2EF}ds_g+\int\frac{M^2}{2EZ_g}ds_g \quad \cdots\cdots(1)$$

而して不静定力 X を求める弾性条件式として

$$L_x=\frac{\partial A_i}{\partial X}=\int\frac{\mathfrak{n}}{EF}\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial X}ds_g+\int\frac{M}{EZ_g}\frac{\partial M}{\partial X}ds_g \quad \cdots\cdots(2)$$

$L_x=0$ の場合 $A_i=$ Minimum

（最小仕事の原理）[3]…………(3)

また，仮想仕事の方程式として

$$\delta=\int\frac{\mathfrak{n}\overline{\mathfrak{n}}}{EF}ds_g+\int\frac{M\overline{M}}{EZ_g}ds_g \quad \text{（仮想仕事の原理）} \cdots\cdots(4)$$

を与えている。これらの式において積分は重心軸にそつて行われる。以上の式において

$$\mathfrak{n}=N-\frac{M}{r_g},\quad \overline{\mathfrak{n}}=\overline{N}-\frac{\overline{M}}{r_g} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$Z_g=r_g\int\frac{v^2}{r_g-v}dF \quad \text{（この積分は断面全体に施される）} \cdots\cdots(6)$$

而して $\overline{\mathfrak{n}}$, $\overline{M}$ は仮想的力 1（または仮想的モーメント 1）を加えた場合の $\mathfrak{n}$ 及び M の値で，δ は変位（または廻転角）を表わす。原書では変位は δ_m，廻転角は $\Delta\varphi$ と区別して表わしてあるが簡単のためここでは δ を以て仮想力 1 に対する時は変位，仮想モーメント 1 に対する場合は廻転角を表わすものとして記号の数を節約した。

次に Timoshenko によれば[4]

仕事方程式として（原書のままの記号で示せば）

$$V=\int_0^s\left(\frac{M^2}{2AEeR}+\frac{N^2}{2AE}-\frac{MN}{AER}\right)ds \quad \cdots\cdots(7)$$

を与えている。ここに V は曲梁の全歪エネルギー，M は曲げモーメント，N は垂直重心軸力，ds は重心

---

* 徳島大学教授，工学部土木教室

軸の長さの成分，A は横断面，E は弾性係数，R は重心軸の曲率半径，e は中立軸の重心軸よりの偏心距離であつて，積分は重心軸にそい曲梁の全長について行われる。

さて著者は Müller-Breslau の仕事方程式 (1) を著者の応力度公式 $\sigma_1=\frac{N}{F}+\frac{My_1}{J_1}$ 及び $J_1=r_1\int y^2\frac{dF}{r}=r_1eF$，$\sigma=\sigma_1\frac{r_1}{y_1}\frac{y}{r}$ (σ_1 は内縁の垂直応力度，y_1 は中立軸より内縁に到る距離，J_1は内縁に対応する断面常数，y 及び r は夫々断面の任意点に対する中立軸よりの距離及び曲率半径，σ は任意点における垂直応力度)[5] を用いて導出し且つ Timoshenko の公式 (7) との関係を明らかにしよう。

先ず重心軸の成分 ds_g の長さの変化 Δds_g，及び ds_g が曲率中心に対して挟む角即ち中心角 $d\varphi$ の変化 $\Delta d\varphi$ を求めれば

$$\Delta ds_g=\frac{N}{F}\frac{ds_g}{E},\quad \Delta d\varphi=\frac{\Delta ds_g}{r_g}=\frac{1}{r_g}\frac{N}{F}\frac{ds_g}{E}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(ここに N は重心軸力，F は曲梁横断面，E は弾性係数) となる。次に曲げモーメント M による中心角 $d\varphi$ の変化 $\Delta d\varphi$ 及び重心軸の成分 ds_g の変化 Δds_g を求めれば

$$\left.\begin{aligned}\Delta d\varphi&=\frac{\varepsilon ds}{y}=\frac{\sigma}{E}\frac{ds}{y}=\frac{\sigma_1}{E}\frac{r_1}{y_1}\frac{y}{r}\frac{ds}{y}\\&=\frac{My_1}{EJ_1}\frac{r_1}{y_1}\frac{1}{r}\frac{r}{r_1}ds_1=\frac{M}{EJ_1}ds_1\\\Delta ds_g&=-e\cdot\Delta d\varphi=-e\frac{M}{EJ_1}r_1d\varphi\\&=-\frac{M}{EJ_1}\frac{Fr_1e}{F}d\varphi=-\frac{M}{EF}\frac{ds_g}{r_g}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

ここに $-e$ は重心軸の中立軸に対する偏心距離，ds は中立軸より y なる距離における繊維の長さの成分，ds_1 は内縁における繊維の成分，ε は ds の歪度，$d\varphi$ は ds_g, ds, ds_1 が曲率中心に対してはさむ角即ち中心角を表わす。

(8) 及び (9) の値を基本の仕事方程式

$$A_i=\int\frac{N}{2}\Delta ds_g+\int\frac{M}{2}\Delta d\varphi\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

に代入すれば (ここに積分は重心軸にそつて曲梁の全長について施される)

$$\begin{aligned}A_i&=\int\frac{N}{2}\left(\frac{N}{F}\frac{ds_g}{E}-\frac{M}{FE}\frac{ds_g}{r_g}\right)\\&\quad+\int\frac{M}{2}\left(\frac{M}{EJ_1}ds_1-\frac{N}{FE}\frac{ds_g}{r_g}\right)\\&=\int\frac{N^2}{2EF}ds_g-\int\frac{NM}{2EF}\frac{ds_g}{r_g}-\int\frac{NM}{2EF}\frac{ds_g}{r_g}\\&\quad+\int\frac{M^2}{2EJ_1}ds_1\\&=\int\frac{N^2}{2EF}ds_g+\int\frac{M^2}{2EJ_1}ds_1-\int\frac{NM}{EFr_g}ds_g\cdots(11)\end{aligned}$$

今　$J_g=r_g\int y^2\frac{dF}{r}=\frac{r_g}{r_1}J_1$，$ds_g=\frac{r_g}{r_1}ds_1$ と置けば

$$A_i=\int\left(\frac{M^2}{2EJ_g}+\frac{N^2}{2EF}-\frac{MN}{FEr_g}\right)ds_g\cdots\cdots(12)$$

$J_g=Fer_g$ は Timoshenko の記号で書けば AeR，また F は A，ds_gはds となるから (12)式は Timoshenko の式 (7) に外ならない。

更に(12)式を $\mathrm{n}=N-\frac{M}{r_g}$ を以て変形すれば

$$\begin{aligned}A_i&=\int\frac{\mathrm{n}^2}{2EF}ds_g+\int\frac{M^2}{2EJ_1}ds_1-\int\frac{M^2}{2EF}\frac{ds_g}{r_g^2}\\&=\int\frac{\mathrm{n}^2}{2EF}ds_g+\int\frac{M^2}{2E}\frac{1}{r_g^2}\left(\frac{r_1r_g}{J_1}-\frac{1}{F}\right)ds_g\end{aligned}$$

然るに Müller-Breslau の断面常数 Z_g と著者の常数 J_1, J_2, J_g との間には次の関係が成立つ[6]。即ち

$$Z_g=\frac{r_g^2}{\frac{r_1r_g}{J_1}-\frac{1}{F}}=\frac{r_g^2}{\frac{r_2r_g}{J_2}-\frac{1}{F}}=\frac{r_g^2}{\frac{r_g^2}{J_g}-\frac{1}{F}}$$

$$Z_g=\frac{r_g^2}{r_0r_1}J_1=\frac{r_g^2}{r_0r_2}J_2=\frac{r_g}{r_0}J_g,\quad\text{ここに } J_g=r_geF,$$

$$J_1=r_1eF,\quad J_2=r_2eF,\quad r_0=\frac{F}{\int\frac{dF}{r}}$$

この関係を上式に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}A_i&=\int\frac{\mathrm{n}^2}{2EF}ds_g+\int\frac{M^2}{2EJ_1}\frac{r_1r_0}{r_g^2}ds_g\\&=\int\frac{\mathrm{n}^2}{2EF}ds_g+\int\frac{M^2}{2EJ_2}\frac{r_2r_0}{r_g^2}ds_g\\&=\int\frac{\mathrm{n}^2}{2EF}ds_g+\int\frac{M^2}{2EJ_g}\frac{r_0}{r_g}ds_g\\&\text{または}\\A_i&=\int\frac{\mathrm{n}^2}{2EF}r_gd\varphi+\int\frac{M^2}{2EJ_g}r_0d\varphi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(13)$$

となる。これは著者の断面常数 J_g を以て表わした重心軸にそつての積分としての曲梁の仕事方程式であつて，Müller-Breslau の公式 (1) の Z_g を J_g にて書きかえたもので全く同じ結果に達したことが知られる。以上述べた曲梁に対する仕事方程式は積分を重心軸にそつて行うのであるから常数として中立軸に関して考えた値 J または e で表わすと (12) または (13) の如く式の形が少し不揃になつてくる。従つて著者は次に示すように中立軸に関して考えた σ の公式を用い曲梁の仕事方程式もまた中立軸にそつての積分として考えて見た。

2. 曲梁に対する著者の仕事方程式

今，横断面にはたらく偏心力を中立軸にはたらく垂直力 N_0 と曲げモーメント M^0 とに分けて考えること

にすれば，仕事に影響する項は従来の如き重心軸についての積分としての仕事方程式を立てる場合とちがつて，N_0 によつて生ずる中立軸の長さの成分 ds_0 の変化 Δds_0 と，モーメント M_0 によつて生ずる中心角 $d\varphi$ の変化 $\Delta d\varphi$ との2つの項のみとなつて簡便である。

然るに $\sigma=\dfrac{N}{F}+\dfrac{My}{J}$，$J=r\int y^2\dfrac{dF}{r}=reF$ を用い

$$\Delta ds_0=\frac{N_0}{EF}ds_0,\quad \Delta d\varphi=\frac{\sigma}{E}\frac{ds}{y}$$

$$=\frac{M_0 y}{EJ}\frac{ds}{y}=\frac{M_0}{EJ_0\frac{r}{r_0}}ds_0\frac{r}{r_0}=\frac{M_0}{EJ_0}ds_0\cdots(14)$$

ここに $J_0=r_0\int y^2\dfrac{dF}{r}=\dfrac{r_0}{r}J=r_0eF$ 故に(14)の値を

仕事の基本式 $A_i=\int\dfrac{N}{2}\Delta ds+\int\dfrac{M}{2}\Delta d\varphi$ に代入すれば

$$A_i=\int\frac{N_0^2}{2EF}ds_0+\int\frac{M_0^2}{2EJ_0}ds_0$$

$$=\int\frac{N_0^2}{2EF}r_0d\varphi+\int\frac{M_0^2}{2EJ_0}r_0d\varphi\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

これは Müller-Breslau の公式(1)または Timoshenko の公式(7)に対応する著者の仕事方程式であつて積分を中立軸にそつて行うのが従来の公式と違つているところである。r_0 は中立軸の曲率半径を表わす。

従つて不静定力を求めるに必要な弾性条件(2)及び仮想仕事の方程式(4)に対応する著者の公式として次の如く書くことができる。即ち

$$L_x=\frac{\partial A_i}{\partial X}=\int\frac{N_0}{EF}\frac{\partial N_0}{\partial X}ds_0+\int\frac{M_0}{EJ_0}\frac{\partial M_0}{\partial X}ds_0$$

$$=\int\frac{N_0}{EF}\frac{\partial N_0}{\partial X}r_0d\varphi+\int\frac{M_0}{EJ_0}\frac{\partial M_0}{\partial X}r_0d\varphi\cdots(16)$$

$L_x=0$ の場合 $A_i=$Minimum（最小仕事の原理）及び

$$\delta=\int\frac{N_0\bar{N}_0}{EF}ds_0+\int\frac{M_0\bar{M}_0}{EJ_0}ds_0$$

$$=\int\frac{N_0\bar{N}_0}{EF}r_0d\varphi+\int\frac{M_0\bar{M}_0}{EJ_0}r_0d\varphi\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

ここに J_0 は著者の導入せる断面常数であつて

$$J_0=r_0\int y^2\frac{dF}{r}=r_0eF=r_0(r_g-r_0)F,$$

$$r_0=\frac{F}{\int\frac{dF}{r}}=\frac{F}{L}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

これらの公式によつて円環，円筒，アーチ眼かん，円孔，を持つ板等の諸問題を解くことができる。

3. 結論

直梁においては $\int ydF=0$ 従つて中立軸と重心軸とが一致するが曲梁では $e\int y\dfrac{dF}{r}=\int ydL=0$ 従つて中立軸と重心軸とは偏心距を示し両軸は分離する。Müller-Breslau に属する公式は垂直応力度公式も仕事方程式も共に重心軸をもととして考えたものである。それに反し Timoshenko は垂直応力度[7]は中立軸の考えを入れて立てているが仕事方程式の方は重心軸の考えが残存しているので式の形が稍不揃になつている。従つて著者は仕事方程式の方も垂直応力度の場合と同じく中立軸に関して立てて見た。かくして曲梁に対しては従来の公式の外に直梁の場合に親しんだ形と相似な式を立てうることを知つた。

註

1) 昭和25年10月15日関西工学大会にて講演

2) Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der statik der Baukonstruktionen, 5. Aufl., 1921. 245頁及び247頁，原著で Z,ds 及び r と表わしてあるのは夫々重心軸に関する断面常数，重心軸の長さの成分及び重心軸の曲率半径であるからそれを明示するため本論文では Z_g, ds_g 及び r_g で表わすことにした。

3) 原書で $L=\dfrac{\partial A_i}{\partial X}$ として表わした L の記号の代りに L_x としたのは本論文で $L=\int\dfrac{dF}{r}$ としているのでそれと混同をさけるため不静定量 $X=1$ に対する反力の仮想仕事を表わすことを示したものである。

4) Timoshenko: Strength of Materials, Part Ⅱ. 439頁，又は Timoshenko and Lessels: Applied Elasticity, 1st edition 228頁。

5) 著者：徳島大学工学部研究報告，昭和25年12月，Vol.2. No.1. p.8.

6) 著者：土木学会誌第29巻10号，但し記号は今は多少改めている。尚常数値の表に一，二誤植があるがそれは常数値の計算公式より容易に訂正して見ることができる。

7) こゝで Timoshenko の垂直応力度公式というのは Winkler の公式とも呼ばれている。

（昭.26.9.10）