

土の粒度加積曲線に関する統計学的研究*

正員 工学博士 岩井重久**
正員 松尾新一郎***

A STATISTICAL STUDY OF THE SIZE ACCUMULATION CURVES OF SOIL

(JSCE Dec.1951)

Dr. Eng., Shigehisa Iwai, C.E. Member, Shinichiro Matsuo, C.E. Member

Synopsis The evaluation or estimation of the engineering properties of soil is very difficult, because their original properties are usually hidden behind their various factors with various degrees of deviation.

But here, the degree of deviation could be made clear by a statistical method using comparatively large number of samples.

As comparatively concise analytical representation of size accumulation curves, the formula based on the totally bounded type of logarithmic normal distribution was newly used in this paper.

The correlation between their characteristic coefficients and values of consistency of soil, coefficient of internal friction, cohesive strength was studied by using the data of 223 samples.

要旨 土性の本質は従属諸素因により種々に偏移するから土性の取扱いは厄介であるが、その偏移の程度は相当多数の試料を用いて統計学的方法を採用することにより探求せられないかという考えの下に、粒度加積曲線の比較的簡明な表示法として両側有限の対数正規分布に基く式を提唱し、この式の特性係数と土のコンシステンシー、内部摩擦角、凝集強度等との相関々係を求めた。

1. 従来の粒度加積曲線とその特性表示法

粒度分析法の発達に伴い土の組織を広い粒径範囲にわたり求めることができ、Terzaghi はこの粒径の分布状態を図-1 の如く横軸に粒径の対数を、縦軸に加

積百分率を採り加積曲線としての表示を提唱した¹⁾。

この加積曲線の特性を表示するために提案せられた方法を挙げると次の通りである。

D.M. Burmister²⁾ は頻度曲線と粒度加積曲線の形式とを見掛けの上から分類、記述している。

J.M. Turnbull³⁾ は最近土の分類を目的として、粒度加積曲線の特性係数を求めた。すなわち彼は、最大粒径と粒度加積曲線により囲まれる面積との2要素をもつて表現することを提唱している。

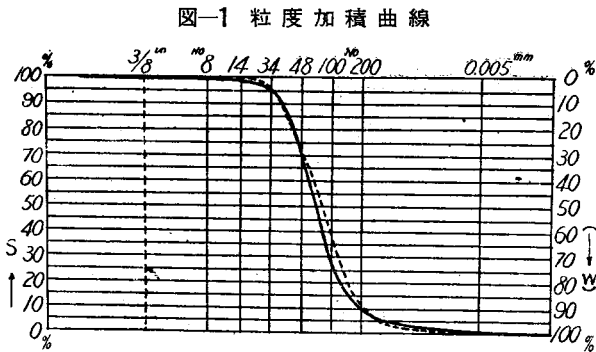
これらは、粒度加積曲線の特性を表示したり、土の分類に役立たしめるためには統計学的根拠を欠いているものと考えられる。

近年になつて米国の A. Hazen が、対数確率紙を粒度加積曲線の表示に用いるようになり、ここに始めて確率統計論的な考え方が導入されてきたのであるが⁴⁾、いまだ完全なものとはいえない。

粒度加積曲線に統計的考察を加えた最初の人 は Grassberger¹⁾ である。この理論をさらに厳密に述べると次のようになる。

粒度に統計的考察を加えた論拠としては、まず土の粒径を確率変数 x として考えた場合の統計的分布を考える。

つぎに粒径の如何に拘らず土の比重は一定でその形状も相似であるとすると、土粒子の重量は x の大きに応じて x^3 で表わされ、結局粒径 x についての密度函数を $V(x)$ とすれば、 $C_1 x^3 V(x) dx$ が一定の



註: 図中の実線は標本上、破線は推定上の曲線を示す

* 土木学会第5回年次学術講演会にて発表

** 京都大学教授 工学部土木工学教室

*** 京都大学助教授

粒径 x をもつ土粒子の全重量になる。したがって採取土試料の全重量の逆数を C_2 とすると粒度曲線は一般に

$$M(x) = \int_{x_{\text{下限値}}}^x C_1 C_2 x^3 V(x) dx$$

の函数で表わされ、こゝでこの積分の上限値を x の上限値までとすれば、当然 $M(x)$ は 1、すなわち 100% となるわけである。

一般に原点のまわりの t 次積率 (定積分の上下限をそれぞれ上下限として全範囲で定積分したもの) を常に 1 とし、その定積分の上限値だけを x としたもの、

$$\text{const} \int_{x_{\text{下限値}}}^x x^t V(x) dx$$

を x に関する t 次の混合函数と名付ける。いまもとの統計的分布を「Gauss の正規分布の確率変数を対数変換して得られる分布」のうちの片側のみ有限な分布で、しかもその下限値が 0 となるような分布であると考える⁵⁾⁶⁾。この場合上記混合函数は密度函数についての

$$V(x) dx = \frac{1}{2} \varphi_0(\xi) d\xi,$$

ただし $\xi = k \log(x/x_0)$

という変換を用いると、たゞちに、

$$\frac{1}{2} \text{const} x_0^t e^{t^2 K^2/4} [\Phi_0(\eta_t)]_{\eta_t \rightarrow \infty}^{\eta_t}$$

たゞし

$$\eta_t = \xi - (tK)/2, K = (1/k) \log e$$

の形となることが判る。

こゝに φ_0 及び Φ_0 はそれぞれ Gauss の誤差函数、及び誤差積分を示す記号である。

ところで

$$\eta_t = k \log x - k \log x_0 - (tK)/2 = k \log(x/x')$$

たゞし

$$\log x' = \log x_0 + (t/2k^2) \log e$$

の書直しを利用すると、混合函数は次数 t の如何にかゝらず全積分が常に 1 の値をとることから、常数 $\frac{1}{2} \text{const} x_0^t e^{t^2 K^2/4}$ にもとずいた影響が消え去る結果と相まつて常に $\frac{1}{2} [1 + \Phi_0(\eta_t)]$ の形をとる。これは 0 次の混合函数、すなわち原分布についての累加函数 $S(x) = \frac{1}{2} [1 + \Phi_0(\xi)]$ と全く同様な形をとるものであつて、たゞ原分布における中央値 x_0 の代りにその混合函数における値 x' を用いたものに過ぎないことが証明されるわけである。

本論主題の粒度曲線は前記 $M(x)$ の式から単に $t=3$ とした 3 次の混合函数で表わされることが判り、上記の事実から粒度曲線上の中央値 (50% 値) x' を x_0 として利用すれば、この型の分布にもとずいた一般の累

加函数と全く同様に推定し得ることが判る。以下ではすべて上記の意味での x' を x_0 で示すことにする。

こうした粒度曲線の推定に当つて Grassberger は Bruns の θ 級数による漸近展開で第 1 修正項までを用い 3 個の標本値から推定する方法を採用した。彼は多くの事例につきこの修正を要しない場合が多く、もし要するとしてもその値は僅少であつて、この方法が妥当であることを強調し、はなはだしく偏しているようなものは 2 種以上の土が混合されて存在することを示すから、その 1 つずつについて上の方法を用いて推定すれば、混合状態そのものを合理的に解析し得ると考えている。

以上の Grassberger の考え方は粒度曲線に統計的根拠を始めて与えたものとして高く評価し得るものであるが、次節で述べるように理論的、実用的に遺憾な点が少くない。

2. 累加曲線の応用

(a) 粒度加積曲線の統計学的推定法 Grassberger の採用した分布型は片側有限でしかも原分布の下限常数を常に 0 としており、もし漸近展開による修正項を無限にとつて計算すれば理論的に満足することができ、これは到底不可能であつて、従つて彼の如く第 1 修正項のみをとれば結果的に不完全な下限常数を生ずることはすでに論じた所である。さらに上限値が無限大となることは、無限大または $\log x$ 軸の方向を逆にして、無限小の粒径が存在することを認めなくてはならないから、我々の常識をもつては許し難い結果となる。

したがつてこゝに必ず両側有限の分布に基くことが要請せられ、実用的にもさらに計算手数のかゝらないことが望ましいわけである。

両側有限分布として有効と思われるものは、やはり「Gauss の正規分布の確率変数を対数変換した分布」に基くものであつて、これについては Slade⁶⁾ が種々究明を試みたが、著者は最近これについて次式の如き提案を行つた⁷⁾⁸⁾。

密度函数

$$\left. \begin{aligned} V_g(x) &= \frac{(g+b)c_0 \log e}{(x+b)(g-x)} V_x = e^{-c_0^2 \{ \log(x+b) - (g-x) \}} \\ &= \frac{1}{2} \varphi_0(\xi) \frac{d\xi}{dx} \\ \xi &= c_0 [\log \{ (x+b)/(g-x) \} - X_0] = c_0 d(x) \\ X_0 &= (x_0 + b)/(g - x_0) \end{aligned} \right\}$$

たゞし $g > x > -b, g > b$ とする

.....(1)

累加函数

$$S_g(x) = \frac{1}{2} [1 + \Phi_0(\xi)] \dots \dots \dots (2)$$

上式中の諸常数で g, b は上・下限値, また x_0 は中央値を表し, c_0 は ξ についてのいわゆる分散に関するものである。

いまこの型の分布が粒度加積曲線にも応用されるためには, Grassberger の場合のようにこの密度函数 $V_s(x)$ を 0 次混合函数とした場合, 3 次の混合函数たる粒度加積曲線が, やはり原分布に関する累加函数と同じ形となることを理論的に証明しなければならない。任意の i 次の場合函数を考えたときにこのことがやはり同様に成立するであろうことは容易に推察しうる。こゝには, これを完全に誘導する余裕を持たないが, 原分布の累加函数における中央値 X_0 の代りに

$$\log X_0' = \log X_0 + \text{func}(t)$$

の形の X_0' を中央値として用いると, i 次の混合函数は容易に原累加函数と同じ形で表わされるのである。粒度曲線は $t=3$ とした 3 次の混合函数であるから, 式(1)中の x_0 を始め g, b, c_0 のすべてを粒度曲線上の常数とみなせば式(2)によつて表わしうることになる。

つぎにいよいよ実際に式(1)の媒介変数によつて式(2)の粒度曲線を標本値から推定する場合, 篩の番号沈降時間などに従つて粒径が定まつているために x 変数に対する標本値 x が常に一定の値をもつて 0.005 mm, 0.074 mm……などの如く定つており, 単に非超過の確率のみが土の性質に応じて色々な値をもつて記録される。したがつて両側有限分布に対して先に導いた平均値や特性係数を利用する推定法, Slade の類推分散法および Kimball 法などは, 標本数の少いために標本上の平均値や特性が信頼出来ないことから, 利用することができない。

また片側有限の場合の岩井法の如く 1 対の対称変量

を用いる方法も, 標本値が対称に配置されていないために, 1 点を定めると図上から対称点を推定しなければならないから, これも利用することができない。

そこで色々考究した結果, 次のような推定法を用いることにした。まず $\log x$ 軸の進行方向を逆に考えて, 式(1),(2)における x の符号をすべて負にとつて推定を行う。

したがつて式中の常数上限値は $(-g)$, 下限値は $(+b)$ で, また中央値は $(-x_0)$ で表わされるのである。

式(2)を定めるには 4 常数さえ推定できればよいから, まずこの 3 つの値を図上から判断し仮定する。いま標本として表-1 に示された 7 組の $(-x_s)$ と S_s とが与えられたとすれば, 図-1 の如くこれらをプロットした図上実曲線から $(-x_0)$ がわかり, さらに $(-g)$ と $(+b)$ とを仮定する。かくして表-1 に示す順序をもつて式(1)の x の式を 1 つずつ標本値に適用する。この場合 1 つの標本値 x_s に対する ξ_s は, 標本上の確率, S_s より数表を引くことによつてたゞちに求められるのである。さらに残りの未知数 c_0 としては x_s に応じて(1)式から求められた $I(x_s)$ で上の ξ_s を割ることにより, 容易に計算せられ, 7 個の x_s に対して 7 個の値を生ずるから, これを算術平均して所要の c_0 とし, かくして 4 常数が定まつたことになる。4 常数が定まれば一応この値をもつて式(2)から推定粒度曲線を書いて標本点との適合性を判定し, もし悪ければさらに g, b の値の仮定をくりかえし, かくして最後に最良の諸常数が求まるわけであつて, 慣れれば 2, 3 回以内ですますことができる。表-1 中の x_0, g, b および $\sqrt{2}c_0 = 3.129$ はこの場合に定められた最良の諸常数值を示すもので, これによつて推定粒度曲線を描くと, 図-1 中の破曲線を生ずる。

表-1 粒度加積曲線推定順序

s	$-x_0$	$\frac{b-55}{x_0+b}$	$\frac{-g-0}{g-x_0}$	$\frac{x_0+b}{g-x_0}$	$X_0' = \frac{x_0+b}{\log \frac{x_0+b}{g-x_0}}$	$I(x_s) = X_s - X_0$	S_s	$\sqrt{2}c_0$	$\sqrt{2}c_0 \sqrt{2} \xi = I(x_s)$
	$-x_s$	$\frac{b-55}{x_s+b}$	$\frac{g-0}{g-x_s}$	$\frac{x_s+b}{g-x_s}$	$X_s' = \frac{x_s+b}{\log \frac{x_s+b}{g-x_s}}$				
1	2.380	52.6	2.380	22.1	1.344 4	- 1.115 0	0.99	- 2.326 3	2.086
2	1.410	53.6	1.410	38.0	1.579 8	- 0.879 6	0.98	- 2.053 7	2.335
3	0.589	54.4	0.589	92.4	1.965 7	- 0.493 7	0.95	- 1.644 9	3.332
4	0.295	54.7	0.295	185	2.267 2	- 0.192 2	0.72	- 0.582 8	3.032
5	0.149	54.9	0.149	368	2.565 8	+ 0.106 4	0.25	+ 0.674 5	6.339
6	0.075	54.9	0.075	732	2.864 5	+ 0.405 7	0.09	+ 1.340 8	3.310
7	0.005	55.0	0.005	11 000	4.041 4	+ 1.582 0	0.01	+ 2.326 3	1.470

註: 粒径はすべて mm 単位

$\sum \sqrt{2}c_0 = 21.904$
平 $\xi_j = 3.129$

(b) 推定粒度加積曲線の特性係数 以上推定粒度加積曲線の統計学的特性を完全に表わすためには、Pearson 流のいわゆる位置、散布度、歪度、尖度に関する係数を用いることが理想的であつて、これはすでに誘導した理論式により算出することができる⁷⁾。しかし与えられた標本値の性質から統計的に厳密な推定法を考え出すことは到底困難であるために、上記の如く統計的ではあるが半試算的方法を採用した。したがつてこゝに複雑な計算を行つて上のような Pearson 流の特性係数の全部を求めることは釣合を欠くものと考えられる。

ゆゑにこゝでは個々の粒度曲線の特性係数として上記の4係数 x_0 , $(-g)$, b , c_0 のみを採用することにした。

このうち x_0 は粒度曲線の中央値、すなわちこれより大及び小となるような粒径をもつ土粒子の総和が等しくなるような粒径を示し、粒度曲線の全体としての相対的位置を定めるものである。この x_0 して標本値をそのまま採用したことは上述の如く標本の数が多いためにそれらの対数平均値をとるような手段に危険を感じたためである。

つぎに $(-g)$ および $(+b)$ はそれぞれ粒径についての推定上の最小、および最大粒径を示し、粒度曲線の巾を定めるものである。この2常数については、始めに標本上の粒度曲線を見目当て延長することにより仮定せられたことに対し幾分の疑問を生ずるが、しかしこれらは各標本値が式 (1), (2) の関係を最も満足するように、その後 2, 3 回試算してから正式に推定されるのであるから、少くとも統計的な根拠を持つと考えられる。

以上3常数は分布の位置や巾を示す以外に、複雑な形で散布度、歪度、尖度にも影響を及ぼすものであるが、後の3係数に含まれる最大の因子は常数 c_0 であつて、これが原密度曲線、ひいては粒度曲線の形状を左右するものとなる⁷⁾。すなわち x_0 , $(-g)$, b が一定であつても c_0 が変化して大きくなる程粒度曲線中央部の水平に対する角は大となり、この逆も言えるわけである。しかもこの c_0 の値は $(-g)$, b を試算してゆくと同時に推定されるものであつて、やはり統計的な根拠に基いているわけである。

以上の4常数は、式 (1), (2) 中の全常数を決定してこの型の粒度曲線形を完全に表現しうるのみならず、粒度曲線の統計的特性をいかに定量的に示しうるものであつて、実用的にも極めて満足すべきもの

と考える。

3. 結 語

粒度曲線を表わすべき統計的函数数とその推定法及び諸特性係数を新たに提案して曲線の特性を数的に把握し、これらと他の土性との相関々係を、223 箇の本邦資料⁸⁾につき、仮りに直線相関とした後相関係数を Student の分布 (t -分布) を用いて検定し、表-2 の如き結果をえた。表中の+または-の記号は有意水準を 0.01 としたときに、無相関であるという仮設がそれぞれ捨てられる、または捨てられないという場合を示し、また(+の)記号は有意水準を 0.05 としたときの前者の場合を示すものである。4特性係数中で $(-g)$ は常に極めて小さい値をとつたから、これと土性との相関々係は吟味しなかつた。

附記 本研究は統計的部門を岩井が、土性部門を松尾が担当した。

表-2 粒度加積曲線の特性係数と土性との相関関係

特性係数 土性	x_0	b	$\sqrt{2}c_0$
P.L.	-	(+)	+
L.L.	+	+	+
P.I.	(+)	(+)	(+)
S.L.	+	(+)	-
φ	+	-	+
C	(+)	-	-

文 献

- 1) H. Grassberger: Der Aufbau der Böden, die Wasserwirtschaft, 1933
- 2) D. M. Burmister: The grading-density relations of granular materials, Proc. A.S.T.M., Vol. 38, 1938
- 3) J. M. Turnbull: a new classification of soils based on the particle size distribution curves, Proc. 2nd Intern. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Vol. V, 1948
- 4) A. Hazen: Flood Flows, N. Y., 1930
- 5) 岩井重久: 水文学における非対称分布に就て, 土木学会論文集, 1, 2 合併号, 昭 22.
- 6) J. J. Slade: An asymmetric probability functions, Trans. A.S.C.E., Vol 62, 1936.
- 7) 岩井重久: Slade 型分布の非対称性の吟味及び 2, 3 の新解法, 土木学会論文集 4 号, 昭. 24.
- 8) 岩井重久: 水文学に於ける統計的継続曲線とその水工計画上の利用, 統計数理研究, 3 卷, 昭 24
- 9) 鉄道省土質調査委員会報告, 第 3, 4 輯昭. 8 (昭. 26. 9. 17)