

# 報 文

## 堤体下部への滲透流に関する不滲透層の影響

准 員 嶋 祐 之\*

### ON THE EFFECT OF IMPERVIOUS STRATUM ON SEEPAGE FLOW UNDERNEATH DAMS

(JSCE March 1951)

Sukeyuki Shima, C.E. Assoc. Member

**Synopsis** In this paper the author analysed the two-dimensional seepage problems with the following three different boundary conditions assuming the pervious stratum homogeneous and using the method of conformal representation.

From these results he made it possible to appreciate the amount of error of the model test due to its restricted size which is generally used for some complicated boundary conditions.

**要旨** 滲透流が均一な透水層内を流れるものとして次の如き境界条件を有する場合の解析を試み、複雑な境界条件を有する場合に対してなされる模型実験に於て生ずる誤差の程度を評価し得る様にした。

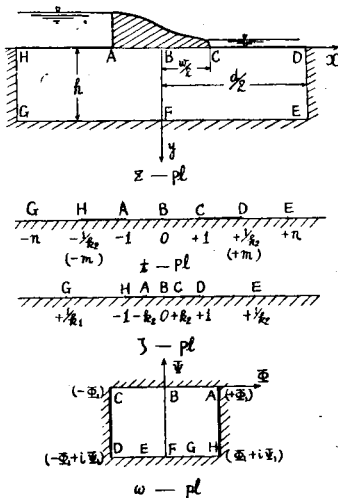
#### 1. 緒 論

本解析に於ては先づ透水層が水平及び垂直両方向の不滲透層に依つて囲まれている場合の解を求め、領域がかなりの範囲に亘るものに対しても模型実験ではこの様な有限のものとしなければならぬ事から生ずる誤差がどの程度のものであるかを確かめた。次に不滲透層が傾斜している場合の解を垂直方向に不滲透層が無い場合と有る場合とについて求めたものである。

なお解法は Darcy 法則を満足する均一性地盤であるとして、二次元の Laplace の方程式を等角写像法を用いて求めたものである。

#### 2. 水平及び垂直両方向に不滲透層を有する時の解

図-1



(1) 写像函数 此の場合の物理面  $z-pl$ , 媒介面  $\zeta-pl$  及び  $t-pl$ , 複素速度ポテンシャル面  $\omega-pl$  に於ける各点の対応関係は図-1 のようにとる。

但し  $w$ : 堤巾,

$d$ : 透水層の水平方向の長さ,

$h$ : 透水層の厚さ,

Schwarz-Christoffel の定理より  $z-pl$  を  $\zeta-pl$  の上半面に写像する函数は

$$\zeta = \text{Sn} \left( \frac{2K_1}{d} z \right) \dots \dots \dots (1)$$

mod =  $k_1$

となり各点の対応関係より母数  $k_1$  及び  $m$  の値は

$$\frac{2h}{d} = \frac{K_1'}{K_1} \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{1}{m} = \text{Sn} \left( K_1 \frac{w}{d} \right) \dots \dots \dots (3)$$

mod =  $k_1$

を満足しなければならない。一方同様にして  $\omega-pl$  を  $t-pl$  に写像する函数は

$$t = -\text{Sn} \left( \frac{K_2}{\phi_1} \omega \right) \dots \dots \dots (4)$$

mod =  $k_2$

而るに  $t = m\zeta$  ... (5) なる故対応図より  $1/k_2 = m$  となり、従つて (3) 式より

$$k_2 = \frac{1}{m} = \text{Sn} \left( K_1 \frac{w}{d} \right) \dots \dots \dots (6)$$

mod =  $k_1$

となる。このようにして  $w, d, h$  及び Potential drop  $\Delta\phi = 2\phi_1$  の値が定まれば (2), (6) 式より  $k_1, k_2$  の値が定まり、従つて (1), (4), (5) 式より  $\zeta$  を消去すれば問題は解決された事になる。

但し  $K_1, K_2$  は夫々  $k_1, k_2$  を母数とした第 1 種完全楕円積分の値,  $K_1', K_2'$  は夫々  $k_1' = \sqrt{1-k_1^2}, k_2' = \sqrt{1-k_2^2}$  を母数とした第 1 種完全楕円積分の値である。

(2) 物理的諸量 今滲透流量と堤体に働く揚圧力分布とに注目すれば上記の物理的諸量は次のようにし

\*東京大学, 大学院特研究生, 工学部土木工学教室

て求められる。

i) 滲透流量 (4) 式に於てD点の対応を考えれば

$$1/k_2 = -\text{Sn} \left\{ \frac{K_2'}{\theta_1} (-\theta_1 + i\Psi_1) \right\}_{\text{mod} = k_2}$$

この式より  $\Psi_1/\Delta\theta = \frac{-K_2'}{2K_2} \dots\dots\dots(7)$

然るに total potential drop  $\Delta\theta$  は上流, 下流水位の差を  $\Delta h$  とすれば Darcy 法則より

$$\Delta\theta = \frac{k\gamma g \Delta h}{\mu} \dots\dots\dots(8)$$

但し  $k$ : 滲透係数

$\gamma g$ : 滲透水の単位重量

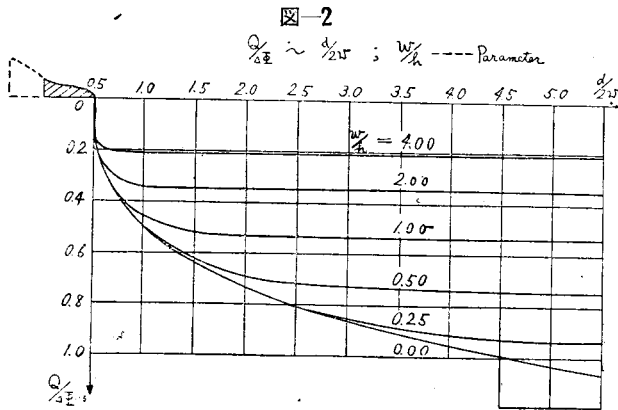
$\mu$ : 滲透水の粘性係数

従つて今滲透流量を  $Q$  とすれば (7), (8) 式より

$$Q = \Delta\theta \frac{K_2'}{2K_2} = \frac{k\gamma g \Delta h}{2\mu} \frac{K_2'}{K_2} \dots\dots\dots(9)$$

となり, この種の問題はすべて単位ポテンシャル落差当りの滲透流量  $Q/\Delta\theta$  即ち  $K_2'/2K_2$  なる無次元量を計算する事に帰着される<sup>2)</sup>。

今  $w/h$  を parameter として  $Q/\Delta\theta$  と  $d/2w$  との関係を示せば図-2 のようになり

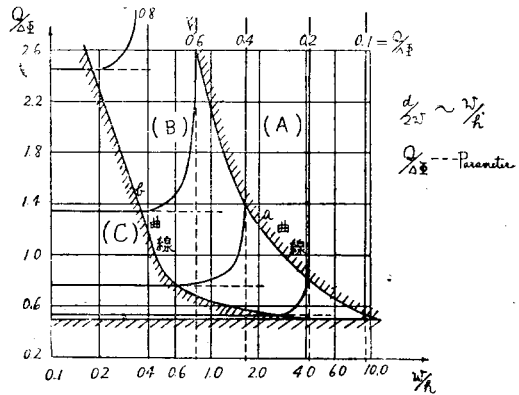


a)  $w/h=0$  の曲線以外はすべて  $d/2w$  軸に平行な漸近線をもつ。

b)  $d/2w=0.5$  では  $Q/\Delta\theta$  は  $w/h$  の如何にかかわらず0であるが 0.5をわづかに超えると  $Q/\Delta\theta$  はかなりの値を持つ。

又  $Q/\Delta\theta$  を parameter として  $d/2w$  を縦軸,  $w/h$  を横軸に採つて考えれば図-3 に示すようになる。更に或る値の  $w/h$  に対して  $d \rightarrow \infty$  のときの  $Q/\Delta\theta$  の値に比べて1%丈少い値を与えるような  $d/2w$  の値を求める事により, その様な関係を満足するa曲線を求め, 更に或る  $d/2w$  の値に対して  $h \rightarrow \infty$  のときの流量に比べて1%丈少い値を与える様なb曲線を求める。斯くすれば図-3のA領域では流量は  $w/h$  のみの値に関係しており  $d/2w$  の値には殆んど関係せず  $d \rightarrow \infty$  と

図-3



した時の流量と同じである。又O領域ではもはや  $w/h$  には関係せず  $d/2w$  の値に対する  $h \rightarrow \infty$  の時の流量と殆ど同一である。従つてこの図より此の種の更に複雑な境界条件を有する問題を模型実験しようとする場合, 模型の寸法をどの程度迄大きくすれば良いかを評価する目安となると思われる。

ii) 揚圧力分布 堤体下部に働く単位圧力差当りの揚圧力を  $p/\Delta p$  であるとし, 今上流側で1, 下流側で0なる圧力であれば(4)式より  $z-pl$  に於て  $|r| \leq \frac{w}{2}$ ,  $y=0$  は  $z-pl$  に於て  $\Psi=0$  に対応する事から揚圧力分布は次式にて表わされる<sup>3)</sup>。

即ち

$$\frac{p}{\Delta p} = \frac{\theta}{\Delta\theta} = -\frac{1}{2K_2} \times F(\sin^{-1}t, k_2) + \frac{1}{2} \dots\dots\dots(10)$$

但し

$$F(\sin^{-1}t, k_2) = \int_0^{\sin^{-1}t} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k_2^2 \sin^2\phi}}$$

を意味する。

然るに (1), (5), (6) 式より

$$t = \frac{\text{Sn} \left( \frac{2z}{d} K_1 \right)_{\text{mod} = k_1}}{\text{Sn} \left( \frac{w}{d} K_1 \right)_{\text{mod} = k_2}} = \frac{\text{Sn} \left( \frac{2z}{d} K_1 \right)_{\text{mod} = k_1}}{k_2} \dots\dots\dots(11)$$

なる故 (10), (11) 式より  $t$  を消去すれば堤体下部の任意点の揚圧力分布が計算出来る。

数値計算を次の4通りの場合につき行つた結果表-1 のようになった。但し圧力差を1として堤体の中心より右半分の値を示している。

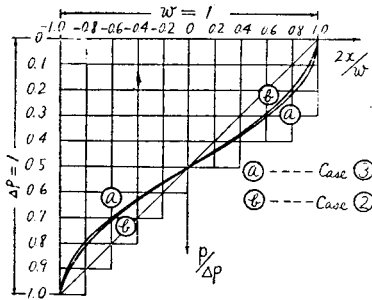
表-1より揚圧力分布に及ぼす不滲透層の影響は堤体の巾  $w$  を一定とした時に  $d$  が小さく且つ  $h$  が大きい程図-4 (a) のようになり、逆に  $d$  が大きく且つ  $h$  が小なる程図-4 (b) のような分布となる事が示される。

表-1

$t_{max}$	$\frac{w}{h}$	$\frac{d}{h}$
①	1	$\infty$
②	1	1
③	1	0

$t_{max}$	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0
①	0.277	0.377	0.420	0.445	0	0
②	0.277	0.377	0.420	0.445	0.138	0
③	0.277	0.377	0.420	0.445	0.151	0
④	0.277	0.377	0.420	0.445	0.144	0

図-4



3. 不滲透層が傾斜している場合の解

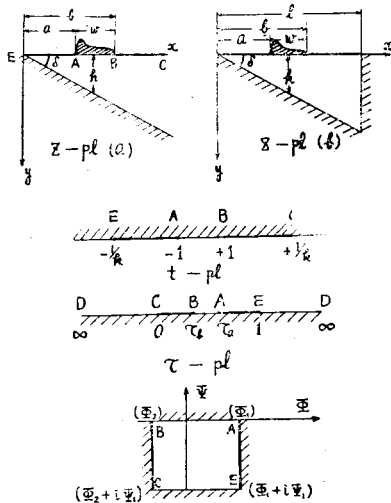
前節の場合と全く同一の立場から図-5  $z-pl$  (a) 及び (b) で示される場合の解析を行った。要は  $z-pl$  から  $t-pl$  への写像函数が求まり、各点の対応から  $k$  の値が知られれば  $w-pl$  から  $t-pl$  への写像函数は既知であるから

滲透流量は 
$$Q/\Delta\phi = \frac{K'}{2K} \dots (12)$$

揚圧力分布は 
$$\frac{p}{\Delta p} = -\frac{1}{2K} F(\sin^{-1}t, k) + \frac{1}{2} \dots (13)$$

の型式で求める事が出来る。

図-5



(1) 傾斜した不滲透層が無限に続く時の解  $z-pl$

(a) から  $t-pl$  への写像函数は Schwarz-Christoffel の定理より求めると

$$t = \frac{z^{\frac{\pi}{\delta}}(\beta - \alpha) - a^{\frac{\pi}{\delta}}\beta}{z^{\frac{\pi}{\delta}}(\alpha - \beta k) + a^{\frac{\pi}{\delta}}\beta k} \dots (14)$$

但し

$$\alpha = \frac{1+k}{2}; \beta = \frac{b^{\frac{\pi}{\delta}}}{b^{\frac{\pi}{\delta}} - a^{\frac{\pi}{\delta}}} \dots (15)$$

且つ対応関係より

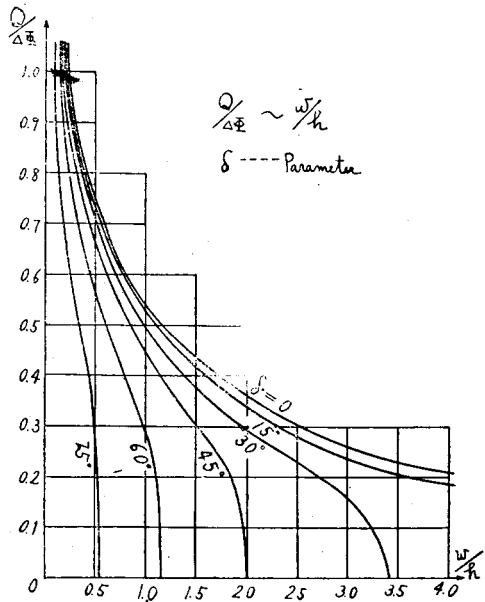
$$k = \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\pi}{2\delta}}}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\pi}{2\delta}}} \dots (16)$$

即ち  $a, b$  及び傾斜角  $\delta$  が決れば (12)~(16) 式から物理的諸量が決定される事になる。此処に於て堤体の巾  $w$  及び堤体中心より直下の不滲透層迄の深さ  $h$  は夫々

$$w = b - a; h = \left(a + \frac{w}{2}\right) \tan \delta$$

となるから、 $w/h$  を変数  $\delta$  を parameter として滲透流量を計算すれば図-6 のようになる。

図-6



而して  $\delta = 0$  の曲線は Muskat の与えた水平不滲透層に対する解と一致する<sup>4)</sup>。

揚圧力分布に対する数値計算例は (2) の場合と共に後述する事にする。

(2) 傾斜不滲透層と垂直な不滲透層とがある時の解  $z-pl$  (b) の場合であつて模型実験に際しては此

の様な境界条件となる。

$z-pl(b)$  を  $\tau-pl$  へ写像する函数は前と同様にして求めると次のような超幾何函数で与えられる<sup>5)</sup>。

$$1 - \frac{z}{l} = \frac{2 \tan \delta}{B(1/2, q)} \sqrt{\tau} F(1/2 + q, 1/2, 3/2, \tau) \dots (17)$$

但し  $q = 1/2 + \delta/\pi$

$B(p, q)$ : 第1種の Euler 積分<sup>6)</sup>

次に  $\tau-pl$  から  $t-pl$  への一次変換

$$t = \frac{\tau(m+1) - (m\tau_a + \tau_b)}{\tau(m-1) - (m\tau_a - \tau_b)} \dots (18)$$

但し

$$m = \sqrt{\frac{\tau_b(1-\tau_b)}{\tau_a(1-\tau_a)}}$$

を行い (18) 式より E 点の対応を考えて  $k$  を求めれば

$$k = \frac{1-n}{1+n}; n = \sqrt{\frac{\tau_b(1-\tau_a)}{\tau_a(1+\tau_b)}} \dots (19)$$

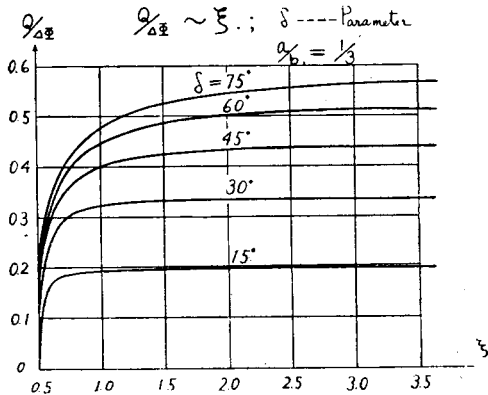
となる。然るに (17) 式で A, B 点の対応を考えれば  $\tau_a, \tau_b$  は次式を満足する必要がある。

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{a}{l} &= \frac{2 \tan \delta}{B(1/2, q)} \sqrt{\tau_a} F(1/2 + q, 1/2, 3/2, \tau_a) \\ 1 - \frac{a}{l} &= \frac{2 \tan \delta}{B(1/2, q)} \sqrt{\tau_b} F(1/2 + q, 1/2, 3/2, \tau_b) \end{aligned} \right\} (20)$$

従つて  $k$  は (20) 式を満足する  $\tau_a, \tau_b$  を用いて (19) 式より求める事が出来るので (12) 式へ代入して滲透流量を求める事が出来る。又 (13), (17), (18) 式より  $\tau, t$  を消去すれば揚圧力分布を知る事が出来る。

滲透流量に関しては 1 例として  $a/b = 1/3$  の場合に傾斜角  $\delta$  を parameter とし,  $\xi = \{l - (a+w/2)\}/w$  を変数として流量  $Q/\Delta\theta$  を表わせれば, 図-2 に似た関係を有する図-7 を求める事が出来る。此の図からも斯様な場合模型実験に用うべき模型の大きさを推測し得る。

図-7



揚圧力分布については (1), (2) の両方の場合を併せて考える事とし不滲透層の傾斜角, 位置の揚圧力分布に及ぼす影響を知る為次に次の 4 通りの計算例を表-2 に示した。但し堤体の巾を 1 とし, 1 なる圧力差

があり, 圧力分布を示す位置は堤体 base の上流端を 0, 下流端を 1 としてある。

表-2

Case	$l/b$	$a/b$	$\delta$
①	$\infty$	$1/2$	$75^\circ$
②	$\infty$	$1/2$	$30^\circ$
③	$\infty$	$1/3$	$30^\circ$
④	$3/4$	$1/3$	$30^\circ$

Case	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
①	1.00	0.789	0.683	0.593	0.511	0.435	0.360	0.294	0.234	0.179
②	1.00	0.770	0.667	0.584	0.510	0.442	0.376	0.312	0.244	0.165
③	1.00	0.731	0.673	0.528	0.448	0.377	0.313	0.253	0.195	0.131
④	1.00	0.755	0.671	0.611	0.541	0.478	0.414	0.348	0.271	0.177

表-2 より

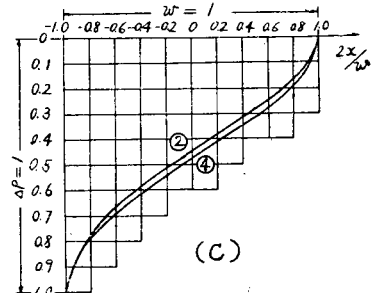
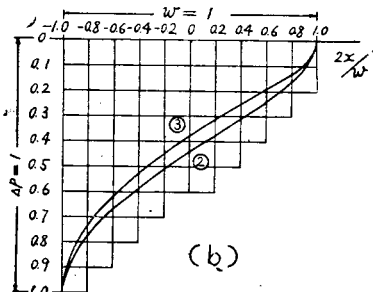
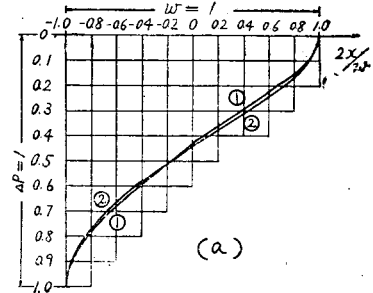
i) ①②の場合を比較すれば不滲透層の傾斜角  $\delta$  の影響が知られる事になり, 傾向として  $\delta$  の大小に依り 図-8 (a) に示されるような圧力分布となる。

ii) ②③の場合を比較すれば  $a/b$  即ち不滲透層の地表に現われる地点, 換言すれば不滲透層の深さの影響が知られ,  $a/b$  の大小に依り 図-8 (b) に示されるような圧力分布となる。

iii) ②④の場合を比較すれば  $l/b$ , 即ち透水層を無限に続くとした場合と更に垂直方向の不滲透層で区切った場合の影響が知られ  $l/b$  の大小に依り 図-8 (c) に示されるような圧力分布となる。

而して i) ii) iii) 何れの場合も前節の場合と異り揚圧力分布は堤体中心に関して左右非対称となる。

図-8



## 4. 結 語

滲透流に対する数学的取扱いは、境界条件に依つては、かなりの繁雑さを伴うものである。従つて複雑な要素の中から適当な一要素を取り出して、その影響が堰堤の設計上必要な諸量に如何に及ぼされるかを正確に調べて置き、其等の要素の綜合された結果を正しく把握出来るようにする事が必要である。又それと同時に此の分野において甚だ有効である模型実験を行うに當つて、模型自体の誤差を出来る丈少くする事が望ましい。以上の見地に立つて、本解析を行いその解析結果に対しては粘性流、或いは電氣的相似性を用いた。模型実験を行う事により、本解析の一致する事を確めた。本研究に當つて、終始懇切なる御指導を賜はつた

東京大学本間教授に厚く御礼を申し上げる次第である。

## 参考文献

- 1) 竹内端三: 函数論 p. 567  
林 柱一: 高等函数表 p. 187; p. 213
- 2) Muskat: The flow of Homogeneous fluids through Porous Media p. 212
- 3) 同 上 p. 215
- 4) 同 上 p. 214 fig. 61
- 5) Whitaker: Modern Analysis p. 293
- 6) 寺沢寛一: 数学概論 p. 97
- 7) 本計算には適当な数表等が無く Graphical Method に依つた。(昭. 25. 11. 21)

## 堤体の滲透に関する実験的研究 (第1報)

— 滲透水量の決定 —

正 員 久 保 田 敬 一\*

EXPERIMENTAL RESEARCH OF A SEEPAGE THROUGH  
AN EARTH DAM. (Part I)

(JSCE March 1951)

Keiichi Kubota, C.E. Member

**Synopsis** It is quite clear that the seepage water through a levee body has harmful effects upon its stability. The phreatic line must lie inside the downstream face of the levee. Calculation of the position of a seepage line and the seepage water volume has been done rationally by the method of Dachler, A. Casagrande and etc. But these assumptions and the results of some experimental research (for instance by C. Keutner) are unsatisfactory to the present author.

He has studied this problem to find a reasonable method of computation. In this paper he explains some results of his experimental researches of seepage through an earth dam.

**要旨** 築堤或いは土堰堤の滲透水がその堰堤の安全さに重大な影響を及ぼすことは明らかである。滲潤線は堤体の下流側法面の内側に納まる必要があるであつて、その為に滲潤線の形を究めること及び滲透水量を決定することが重要になつてくる。従来は Dachler や A. Casagrande の方法等を用いて一応の計算を行つてゐるが、之等の仮定においても又実験的研究においても(例えば Keutner や Schmied) の実験においても不満足の点が少ない。著者はこの意味で以下に述べ

るような実験を行つた。著者は実験内容を(1)滲透水量の決定(2)流線の決定(3)抵抗係数の決定(4)核心壁を有する場合の問題に分けた。以下は滲透水量の決定に関する結果のみの説明である。

## 1. 著者の研究及び実験装置

漏水問題は堤体自身を通る滲透水と堤体の下を透過する水とに分けて研究されている。著者の研究は前者の問題についての実験的研究である。然し之等は滲透に関する極く基礎的研究であつて、滲透によつて惹き起される築堤の崩壊、斜面の安定等に関することは之

\* 徳島大学教授, 工学部土木工学教室