

# 羽目板の安定問題

正員 工学博士 倉田 宗章\*

## ON STABILITY OF A TRAIN OF RECTANGULAR PLATES WITH HINGE CONNECTION.

(JSCE Feb. 1951)

Dr. Eng. Muneaki Kurata, C.E. Member

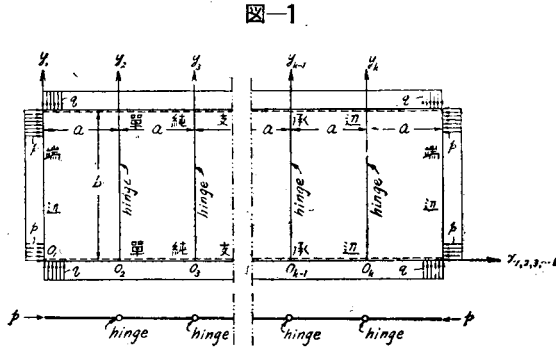
**Synopsis** In the former paper, the author has shown that the buckling problems of the continuous rectangular plate with multiple spans can be treated by means of the method of finite difference equation.

In this paper, he shows that the similar treatments can also be applied to such a structural element as inscribed on the subject.

**要旨** 著者は前に任意径間数の等径間連続板の挫屈荷重を求める方法を発表したが、同様な方法によつて任意数の矩形板が互に突合せ並列している（例えば建築等に於ける所謂腰羽目の一種の駈斗羽目と呼ばれる如き）構造物の側圧による安定問題を論ずる事が出来るので要約して報告する。但し羽目板の上下両端は単純支承され中間では無支承であるものとする。

### 1. 基本方程式及び其の解式

図-1 に示す如く各板毎に座標系を定めれば第  $r$  番目の板の  $y$  方向に  $m-1$  ケの節線を有つ如き撓曲面は例の如く次式で表わされる。



$$w_r = \{K_r \cosh \pi \lambda_1 \xi_r + L_r \sinh \pi \lambda_1 \xi_r + M_r \cosh \pi \lambda_2 \xi_r + N_r \sinh \pi \lambda_2 \xi_r\} \sin m \pi \eta_r \dots (1)$$

但し  $K_r, L_r, M_r, N_r$  は未定常数,  $\xi_r = \frac{x_r}{a}, \eta_r = \frac{y_r}{b}$

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = \frac{a}{b} \times$$

\* 北海道大学助教授, 工学部土木工学教室

1) 土木學會誌論文集 (未刊)

2) 北海道大學工學部紀要第八冊第三號に多少異つた誘導法による詳細な記述を載せてある

$$\sqrt{\left\{m^2 - \frac{P}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2\right\} \pm \sqrt{\left\{m^2 - \frac{P}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}^2 - (m^2 - Q)m^2}}$$

$$P = \frac{pa^2}{D\pi^2}, Q = \frac{qb^2}{D\pi^2}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} : \text{板の曲げ剛度,}$$

$E$ : 板のヤング率,  $\nu$ : ポアソン比,  $h$ : 板厚

扱各羽目板の接合線では互に Hinge 結合をなしているものと見做せば、例えば第  $r-1$  番目の接合線に於て次の諸条件が成立しなくてはならない。即ち、

- 1) 相隣る羽目板の撓度は等しい:

$$|w_{r-1}|_{\xi_{r-1}=1} = |w_r|_{\xi_r=0}$$

- 2) 曲げモーメントは 0 である:

$$\left. \frac{\partial^2 w_{r-1}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{r-1}}{\partial y^2} \right|_{\xi_{r-1}=1} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_r}{\partial y^2} \right|_{\xi_r=0} = 0$$

- 3) 相隣る羽目板相互間の横力は平衡する:

$$\left\{ \frac{\partial^3 w_{r-1}}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_{r-1}}{\partial x \partial y^2} \right\} + \frac{p}{D} \frac{\partial w_{r-1}}{\partial x} \Big|_{\xi_{r-1}=1} = \left\{ \frac{\partial^3 w_r}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_r}{\partial x \partial y^2} \right\} + \frac{p}{D} \frac{\partial w_r}{\partial x} \Big|_{\xi_r=0}$$

此等の条件式に (1) 式を代入し新たな未定常数  $B_r$  を導入して

$$K_r = \frac{B_r}{\beta_1}, M_r = -\frac{B_r}{\beta_2} \dots \dots (2)$$

とおけば未定常数  $K_r, M_r$  は消去せられて

$$B_{r-1} \left( \frac{1}{\beta_1} \cosh \pi \lambda_1 - \frac{1}{\beta_2} \cosh \pi \lambda_2 \right) + L_{r-1} \sinh \pi \lambda_1 + N_{r-1} \sinh \pi \lambda_2 - B_r \varphi = 0 \dots \dots (3)$$

$$B_{r-1} (\cosh \pi \lambda_1 - \cosh \pi \lambda_2) + L_{r-1} \beta_1 \sinh \pi \lambda_1 + N_{r-1} \beta_2 \sinh \pi \lambda_2 = 0 \dots \dots (4)$$

$$\begin{aligned}
& B_{r-1} \left( -\frac{\gamma_1}{\beta_1} \sinh \pi \lambda_1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \sinh \pi \lambda_2 \right) \\
& + L_{r-1} \gamma_1 \cosh \pi \lambda_1 + N_{r-1} \gamma_2 \cosh \pi \lambda_2 \\
& - L_r \gamma_1 - N_r \gamma_2 = 0 \quad \dots\dots(5)
\end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} \beta_1 & \left. \begin{aligned} & = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right\} - \nu \left( \frac{ma}{b} \right)^2, \\ \beta_2 & = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \end{aligned} \right\} \\ \gamma_1 & \left. \begin{aligned} & = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left\{ \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right\} - (2-\nu) \left( \frac{ma}{b} \right)^2 + P^{\lambda_1} \right\} \\ \gamma_2 & = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left\{ \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right\} \end{aligned} \right\} + F^{\lambda_2} \\ \varphi & = \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \end{aligned}
\end{aligned}$$

なる3式を得る。依て初めの2式より  $L_{r-1}, N_{r-1}$  は夫々次の如く表わされる。

$$\left. \begin{aligned} L_{r-1} & = -B_{r-1} \frac{1}{\beta_1} \coth \pi \lambda_1 \\ & \quad + B_r \frac{1}{\beta_1} \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 \\ N_{r-1} & = B_{r-1} \frac{1}{\beta_2} \coth \pi \lambda_2 \\ & \quad - B_r \frac{1}{\beta_2} \operatorname{cosech} \pi \lambda_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

これを(5)式に代入すると次式が得られる

$$B_{r-1} S' - B_r T' + (L_r \gamma_1 + N_r \gamma_2) = 0 \quad \dots\dots(7)$$

但し  $S' = \frac{\gamma_1}{\beta_1} \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \operatorname{cosech} \pi \lambda_2$

$$T' = \frac{\gamma_1}{\beta_1} \coth \pi \lambda_1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \coth \pi \lambda_2$$

次に(6)式に於て  $r$  の代りに  $r+1$  とおいて得る関係式を用うれば

$$L_r \gamma_1 + N_r \gamma_2 = -B_r T' + B_{r+1} S' \quad \dots\dots(8)$$

と書く事が出来るから結局(7)式は次の如く書換えられる

$$B_{r-1} - B_r 2 \frac{T'}{S'} + B_{r+1} = 0 \quad \dots\dots(9)$$

これは  $B_r$  に関する階差方程式に他ならない。而して其の一般解は容易に求められて次の如く表わされる

$$\left. \begin{aligned} B_r & = C_1 \sin r \alpha + C_2 \cos r \alpha \\ \cos \alpha & = \frac{T'}{S'} \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

但し  $C_1, C_2$  は更に新たな未定常数,  
 $\alpha$  は parameter,

## 2. 端辺の条件式

残された環境条件即ち  $y$  軸に平行な両端の二辺に対しては通例の如く次の3種を想定しよう。即ち

i) 単純支承辺の場合, ii) 固定辺の場合, iii) 自由辺の場合であつて夫々の場合に対する条件式は既知の通りである。扱羽目板は  $k$  枚より成るものとし  $k$  番目の羽目板に於ける端辺の条件は (1) 式に於て  $r=k$

と置いて得る式を上述の各条件式に代入して  $\xi_k=1$  とおけば各場合に対し次の如くなる

### 1) 単純支承辺の場合

$$M_k \cosh \pi \lambda_2 + N_k \sinh \pi \lambda_2 = 0,$$

$$K_k \cosh \pi \lambda_1 + L_k \sinh \pi \lambda_1 = 0$$

を得るから、これより

$$L_k = -K_k \coth \pi \lambda_1 = -\frac{B_k}{\beta_1} \coth \pi \lambda_1,$$

$$N_k = -M_k \coth \pi \lambda_2 = \frac{B_k}{\beta_2} \coth \pi \lambda_2$$

故に  $L_k \gamma_1 + N_k \gamma_2 = -B_k T'$

依て(7)式に於て  $r=k$  と置いて得る式に代入すれば

$$B_{k-1} - B_k \left( 2 \frac{T'}{S'} \right) = 0$$

となる。次いで基本方程式の一般解(10)に於て  $r=k-1$  及び  $r=k$  と置いて得る式を上式に代入すれば下の関係式が得られる

$$C_1 \sin(k+1)\alpha + C_2 \cos(k+1)\alpha = 0 \quad \dots\dots(11)$$

2) 固定辺の場合 前同様  $L_k, N_k$  を  $B_k$  で表わすと、途中の演算を省略して、次の結果を導き得る

$$L_k \gamma_1 + N_k \gamma_2 = -B_k \left( T' - \frac{\bar{S} S''}{T'} \right)$$

但し  $\bar{S} = \frac{\lambda_1}{\beta_1} \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{\beta_2} \operatorname{cosech} \pi \lambda_2$

$$S'' = \gamma_1 \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 - \gamma_2 \operatorname{cosech} \pi \lambda_2,$$

$$T = \lambda_1 \coth \pi \lambda_1 - \lambda_2 \coth \pi \lambda_2,$$

故に(7)式に於て  $r=k$  と置いて得る式に代入して

$$B_{k-1} - B_k \left( 2 \frac{T'}{S'} - \frac{\bar{S} S''}{S' T'} \right) = 0$$

次に(10)式に於て  $r=k-1$  及び  $r=k$  とせるものを上式に代入すれば

$$\begin{aligned}
& C_1 \left\{ \sin(k+1)\alpha - \frac{\bar{S} S''}{S' T'} \sin k \alpha \right\} \\
& + C_2 \left\{ \cos(k+1)\alpha - \frac{\bar{S} S''}{S' T'} \cos k \alpha \right\} = 0 \quad \dots\dots(12)
\end{aligned}$$

### 3) 自由辺の場合: 同じく途中の演算を省略して

$$L_k \gamma_1 + N_k \gamma_2 = -B_k \left( T' - \frac{S''}{T'} \right)$$

を得るから(7)式に於て  $r=k$  と置いて上式を代入すれば

$$B_{k-1} - B_k \left( 2 \frac{T'}{S'} - \frac{S''}{T'} \right) = 0$$

此の式に  $r=k-1, r=k$  とせる(10)式を代入すれば次式を得る

$$C_1 \cos(k+1)\alpha - C_2 \sin(k+1)\alpha = 0 \quad \dots\dots(13)$$

3) 脚註2)記載論文参照

次に1番目の羽目板に属する端辺の条件は(1)式に於て  $r=1$  と置いて得る式を同じく前述の各条件に代入して  $\xi_1=0$  と置けば

1) 単純支承辺の場合:

$$K_1 + M_1 = 0, \quad K_1\beta_1 + M_1\beta_2 = 0$$

を得る。これより  $K_1 = -M_1 = 0$  となるから(2)により

$$B_1 = 0$$

故に  $r=1$  とせる(10)式より

$$C_1 \sin \alpha + C_2 \cos \alpha = 0 \quad \dots\dots(14)$$

2) 固定辺の場合: 途中の演算を省略して

$$L_2\gamma_1 + N_2\gamma_2 = B_3 \left( T' - \frac{SS''}{T} \right)$$

を導く事が出来るから(7)式に於て  $r=1$  と置いて得る式に代入すると

$$B_1 - B_2 \frac{\bar{S}S''}{S'T} = 0$$

依て(10)式に於て  $r=1, r=2$ , とせるものを上式に代入して

$$C_1 \left\{ \sin \alpha - \frac{SS''}{S'T} \sin 2\alpha \right\} + C_2 \left\{ \cos \alpha - \frac{\bar{S}S''}{S'T} \cos 2\alpha \right\} = 0 \quad \dots\dots(15)$$

3) 自由辺の場合: 此の場合は

$$K_1\beta_1 + M_1\beta_2 = 0, \quad L_1\gamma_1 + N_1\gamma_2 = 0$$

を得る。第1式は(2)の如く置く事により当然満足される。擬第2式を考慮すれば(8)式に於て  $r=1$  と置いて得る式より

$$B_1 - B_2 \frac{S'}{T'} = 0$$

が得られる。故に(10)式に於て  $r=1, r=2$  とせるものを上式に代入すれば

$$C_1 \cos \alpha - C_2 \sin \alpha = 0 \quad \dots\dots(16)$$

以上で各場合に対する両端辺の条件式を夫々未定常数  $C_1, C_2$  間の関係式として表わし得た。

3. 屈屈の条件式及び其の解説

擬以上の準備が済めば屈屈の条件式は端辺条件の種々の組合せに対して夫々次の如く求められる。

a) 両端単純支承辺の場合 (11)と(14)とより未定常数  $C_1, C_2$  を消去すれば

$$\sin k\alpha = 0 \quad \text{従つて} \quad \alpha = s \frac{\pi}{k} \quad (s=0, 1, 2, 3, \dots, 2k-1)$$

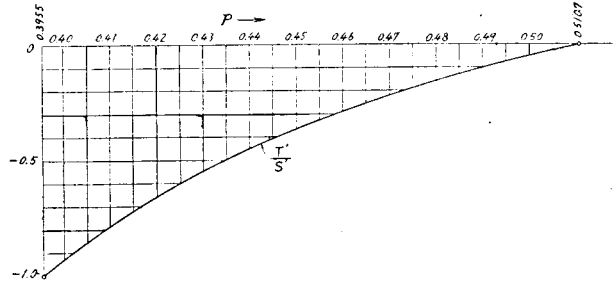
故に(10)の第2式を参照すれば此の場合の屈屈条件式は

$$\cos s \frac{\pi}{k} = \frac{T'}{S'} \quad (s=0, 1, 2, 3, \dots, 2k-1) \dots\dots(17)$$

擬計算例として  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$  なる場合(以後の計算例では

常に斯く仮定する。尚  $y$  方向に半波形屈屈の場合が実際の屈屈荷重に対応する筈だから  $m=1$  と採るものとす)に就き考えよう。先づ荷重  $p$  のみが作用する時(図-1)  $k=2$  なら  $P_{cr} = 0.5107$  なる結果が既知である<sup>4)</sup> さて此の附近で  $\frac{T'}{S'}$  は  $P$  の負値単調な増加函数であつて(図-2)任意の  $k$  に対する(17)の最小根  $P_{cr}$  が此の附

図-2



近にあるものとすれば  $\cos s \frac{\pi}{k}$  を最小ならしむる必要がある。その為に  $s=k$  とおけば  $\cos s \frac{\pi}{k} = \cos \pi = -1$  となり、公式は  $k$  に無関係に  $P_{cr} = 0.3955$  を与える。これは後述の如く両端自由辺の場合に一致し  $k$  が有限なかぎり羽目板は平面を保つ結果を来し不適である。依て次善の最小値を得るため  $s=k-1$  とおけば(17)は

$$\cos \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \pi = \frac{T'}{S'} \quad \dots\dots(18)$$

これより  $k$  の種々の値に対する上式左辺の値が丁度其の時の  $\frac{T'}{S'}$  の値である如き座標値  $P$  を読みとれば表-1の結果を得る。特に(18)に於て  $k \rightarrow \infty$  とせば

表-1			$\frac{T'}{S'} = -1$ となり
$k$	$\cos \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \pi$	$P_{cr}$	図-2より $P_{cr} =$
2	0	0.511	0.3955, これは両
3	-0.5008	0.435	端辺の影響消失し
4	-0.7071	0.416	て両端自由辺の場
5	-0.8090	0.408	合に一致する事を
6	-0.8656	0.404	示す。特に $k=5$
7	-0.9010	0.402	の場合 $y = \frac{b}{2}$ に
8	-0.9239	0.400	沿つて形状函数を
$\infty$	-1	0.3955	図示すれば所謂つ

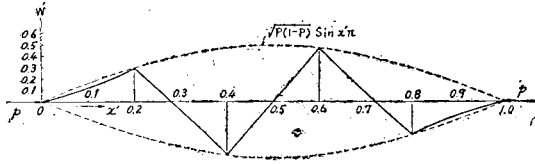
り折れなる事が解る。(図-3)

次に荷重  $q$  のみが作用する場合、先づ  $k=2$  なら各板は一長辺自由地の三辺単純支承の単一板として屈屈する筈だから  $Q_{cr} = 2.6722$  が既知である<sup>5)</sup>。又  $k = \infty$  なら(17)より  $\frac{T'}{S'} = 1$ , 故に  $Q_{cr} = 0.9288$ , これは後

4) 脚註 2) 参照  
5) 脚註 2) 論文参照

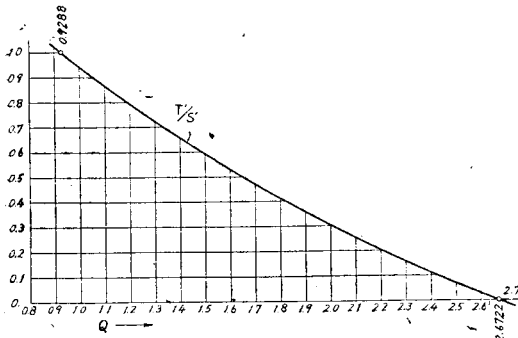
述の如く両端自由辺の単一板の正対称形挫屈に対応し \$k\$ の大なる場合には各板は上記の如き挫屈形となる事

図-3



は容易に背首される。依つて \$2 < k < \infty\$ なら \$0.928 < Q\_{cr} < 2.672\$ と予想出来るから此の領域で \$\frac{T'}{S'}\$ を \$Q\$ の函数として図示すれば単調な減少函数なる事が解る。(図-4) 故に \$\frac{T'}{S'}\$ の値の大なる程即ち \$\cos \frac{\pi}{k}\$ が 1 に近い程 (17) の根 \$Q\_{cr}\$ は小である。然し \$s=0\$ とすれば (17) は \$k\$ に無関係となり問題に不適となる。故に

図-4



\$s=1\$ とおけば図-4 より表-2 の結果を得る。即ち両端単純支承の影響は \$k\$ の増加に伴い急激に減少し両端自由辺の場合に近付く事が解る。

\$k\$	\$\cos \frac{\pi}{k}\$	\$Q_{cr}\$
2	0	2.673
3	0.5	1.650
4	0.7071	1.325
5	0.8090	1.178
6	0.8660	1.101
\$\infty\$	1	0.9288

此の場合は (12) (14) 或いは (11) (15) の組合せで挫屈条件式が求められる。即ち未定常数 \$C\_1, C\_2\$ を消去すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha} &= \frac{SS''}{S'T'} \\ \cos \alpha &= \frac{T'}{S'} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

上式は \$\alpha\$ を parameter とする挫屈条件式である。扱荷重 \$p\$ のみが作用する場合先づ \$k=\infty\$ なら端の影響消失して両端自由辺の場合に一致する筈だから \$P\_{cr}=\$

\$0.3955\$ 又 一端固定辺他端自由辺の単一板に対しては \$P\_{cr} = 0.6565\$ が既知である。故に \$2 < k < \infty\$ の時 \$0.3955 < P\_{cr} < 0.6565\$ と推定される。故に此の領域で (19) 第 1 式の両辺を夫々 \$P\$ の函数として図示し其れ等の交点より図式に \$P\_{cr}\$ を求める事が出来ればよい。 \$k=\infty\$ に対する \$P\_{cr} = 0.3955\$ は \$\cos \alpha = \frac{T'}{S'} = -1\$ の根で此の時 \$\alpha = \pi\$ と考えてよい。今

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha} = -1 - \frac{1}{k-1}$$

なる事を考慮すると、\$\cos \alpha = \frac{T'}{S'}\$ により \$\cos \alpha\$ は \$P\$ の函数として計算されるから此を用いて任意の \$k\$ に対する \$\sin k\alpha\$ の値が算出され従つて \$\frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha}\$ を \$P\$ の函数として図示出来て結局其の曲線は \$P\_{cr} = 0.3955\$ で \$-1 - \frac{1}{k-1}\$ の値を有つ事が解る故に \$k=\infty\$ なら \$-1\$ の値を探る。又 \$\frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha}\$ は

$$\alpha = m \frac{\pi}{k} \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

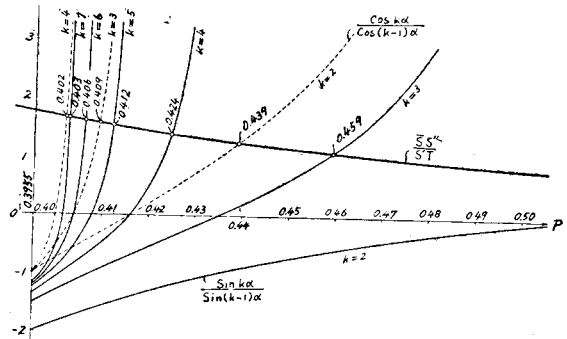
の時 0 となり

$$\alpha = m \frac{\pi}{k-1} \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

の時 \$\pm \infty\$ となる。

故に \$k\$ の大なる程、\$\alpha\$ 即ち \$P\$ の些少の変動により、

図-5



\$\frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha}\$ 曲線は \$\pm \infty\$ の間を振動する回数が大である。従つて \$k=\infty\$ では \$P\_{cr} = 0.3955\$ で \$-1\$ の点を通り \$P\$ 軸に直交する直線に合一する事となる故に \$k=\infty\$ では \$P\_{cr} = 0.3955\$ と結論出来る。但し上の曲線は振動曲線だから \$\frac{SS''}{S'T'}\$ 曲線とは多数回交叉し其れ等の交点は順次高次の限界荷重を与える。故に \$k \rightarrow \infty\$ では曲線の波長が 0 に近付き極限では高次の限界荷重が \$P\_{cr} = 0.3955\$ に於て重合し特定の撓曲形を指定し得ない。実際の作図は図-5 の如くであつて表-3 の結果が得られる。

表-3

\$k\$	2	3	4	5	6	7	\$\infty\$
\$P_{cr}\$	0.5915	0.459	0.424	0.412	0.406	0.403	0.3955

6) 脚註2)論文参照

次に  $q$  のみが作用する場合,  $k=1$  とせば (19) は良く知られている単一板の公式に一致する事を証し得る。一長辺固定他の長辺自由なる単一板に対しては,  $Q_{cr}=5.344$  である。次に  $k=\infty$  なら端の影響消失して  $Q_{cr}=0.9288$  と予想される。故に  $2 < k < \infty$  なら\*

\* $0.9288 < Q_{cr} < 5.344$  と推定出来る。此の領域で  $\frac{SS''}{S'T}$  曲線及び  $\frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha}$  曲線の交点より求むる  $Q_{cr}$  の値を読み取る事前例の如くすれば表-4の結果を得る。\*

表-4

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\infty$
$Q_{cr}$	3.805	1.955	1.442	1.235	1.132	1.075	1.038	1.014	0.997	0.985	0.975	0.9288

\*\*c) 一端自由辺他端単純支承辺の場合

此の場合の控屈条件式は (13), (14)又は (11), (16) の組合せで得られる此等の式により  $C_1, C_2$  を消去すれば

$$\cos k\alpha = 0$$

従つて

$$\alpha = \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} \quad (s=0, 1, 2, 3, \dots, 2k-1)$$

故に (10) の第2式を考慮すれば

$$\cos\left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} = \frac{T'}{S'} \quad (s=0, 1, 2, 3, \dots, 2k-1) \dots\dots(20)$$

計算例として, 先づ  $p$  のみが作用する場合,  $k=1$  なら既述の如く  $P_{cr}=0.5107$ , 又  $k=\infty$  なら  $P_{cr}=0.3955$  と予想され結局  $1 < k < \infty$  で  $0.3955 < P_{cr} < 0.5107$  と推定される。此の領域では  $\frac{T'}{S'}$  は  $P$  の負値単調な増加函数である。(図-2) 故に  $\left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k}$  を最も  $\pi$  に近からしめればよい。即ち  $s=k-1$  と採れば (20) は

$$\cos\left(1 - \frac{1}{2k}\right)\pi = \frac{T'}{S'} \quad \dots\dots(21)$$

と書かれる。前同様  $\frac{T'}{S'}$  曲線を用いて表-5の結果を得る。又上式に於

表-5

$k$	$\cos\left(1 - \frac{1}{2k}\right)\pi$	$P_{cr}$
1	0	0.5107
2	-0.7071	0.416
3	-0.8656	0.404
4	-0.9239	0.400
5	-0.9511	0.399
6	-0.9659	0.398
$\infty$	-1	0.3955

て  $k=\infty$  とおけば  $P_{cr}=0.3955$  を得て初の予想に一致する。次に  $q$  のみが作用する場合,  $k=1$  なら既述の如く  $Q_{cr}=2.6722$ , 又  $k=\infty$  なら  $Q_{cr}=0.9288$  と予想される。従つて  $1 < k < \infty$  ならば  $0.9288 < Q_{cr} < 2.6722$  と推定される。ところが此の領域で  $\frac{T'}{S'}$  は  $Q$  の単調な減少函数である。(図-4) 従つて (20) より  $\left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k}$  を最も  $0$  に近からしめれば

ならぬ故に  $s=0$  とおけば

表-6

$k$	$\cos \frac{\pi}{2k}$	$Q_{cr}$	$\cos \frac{\pi}{2k} = \frac{T'}{S'} \dots\dots(22)$
1	0	2.673	上式により $Q_{cr}$
2	0.7071	1.325	を $\frac{T'}{S'}$ 曲線より読みとれば表-6の結果を得る。又
3	0.8660	1.101	(22) に於て $k=$
4	0.9239	1.023	$\infty$ とおけば $\frac{T'}{S'}$
5	0.9511	0.990	$=1$ 従つて $Q_{cr}=$
6	0.9659	0.972	
$\infty$	1	0.9288	

0.9288 を得て当初の予想に一致する。

d) 両端自由辺の場合

此の場合は (13), (16) の組合せで与えられる。即ち未定常数の消去により

$$\sin k\alpha = 0$$

従つて

$$\alpha = s \frac{\pi}{k} \quad (s=0, 1, 2, 3, \dots, 2k-1)$$

故に (10) の第2式より

$$\cos s \frac{\pi}{k} = \frac{T'}{S'} \quad \dots\dots[(17)]$$

此は前出 (17) に他ならない。先づ荷重  $p$  のみが作用する場合,  $k=1$  とおけば上式は

$$\frac{T'}{S'} = \pm 1 \quad \dots\dots(23)$$

となり上号に対しては  $P_{cr}=1.3123$ , 下号に対しては  $P_{cr}=0.3955$  を得る。前者は両端自由辺なる単一板の  $x = \frac{a}{2}$  なる中心線に関して正対称形控屈に後者は斜対称形控屈に対応するものなる事を証明する事が出来る。扱公式 (17) に就いて説明せる如く一般に其の最小根は  $s=k$  と置いて求められる。従つて公式は (23) の下号を採る場合に一致し  $k$  に無関係に  $P_{cr}=0.3955$  を与へる。此の事は前記単一板の斜対称形控屈を交互に反対向に並列して得る。つまり折れ撓曲形が只今の控屈形に該当する事に注意すれば肯首され,  $k$  に無関係なる所以も亦明かであらう。

7) 脚註2)論文参照

次に荷重  $q$  のみが作用する場合  $Q$  の函数としての  $\frac{T'}{S'}$  曲線は図-4 にみる如く単調減少函数であるから (17) の最小根は  $s=0$  と置いて (23) 上号の場合に依つて定められ  $Q_{cr}=0.9288$  を得る。然るに此は両端自由辺の単一板の  $x=\frac{\alpha}{2}$  線に関する正対称挫屈に対するものである。この事は端辺条件の対称性により各羽目板が両端自由辺の単一板として挫屈するであろう事を想像すれば了承される。従つて  $k$  に無関係な所以も明かである。

e) 一端自由辺他端固定辺の場合 この場合は (13) (15) 又は (12), (16) の各式の組合せにより

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{\cos(k-1)\alpha} &= \frac{\bar{S}S''}{S'T} \\ \text{(1Q) の第2式より} & \\ \cos \alpha &= \frac{T'}{S'} \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

計算例として  $p$  のみ作用する場合、先づ  $k=1$  なら単一板で既述の如く  $P_{cr}=0.6565$ <sup>8)</sup>, 又  $k=\infty$  なら  $P_{cr}=0.3955$  と予想される。この時  $\cos \alpha = \frac{T'}{S'} = -1$  であるから  $\alpha=\pi$  としてよい。即ち  $P \rightarrow 0.3955$  なら  $\alpha \rightarrow \pi$  で\*

\*あるものとすれば

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{\cos \alpha}{\cos(k-1)\alpha} = -1 \dots\dots(25)$$

即ち  $\frac{\cos \alpha}{\cos(k-1)\alpha}$  曲線は  $k \rightarrow \infty$  で  $P=0.3955$  を通り  $P$  軸に直交する直線に合一する事となり  $\frac{\bar{S}S''}{S'T}$  曲線との交点は  $P_{cr}=0.3955$  を与える。依つて任意の  $k$  に対する  $P_{cr}$  は  $0.3955 < P_{cr} < 0.6565$  の領域で求められる。扱  $\frac{\cos \alpha}{\cos(k-1)\alpha}$  曲線は  $\frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha}$  曲線に類似であつて、実際の作図は図-5中に破線を以て併記してある。<sup>9)</sup>  $\frac{\bar{S}S''}{S'T}$  曲線との交点より  $P_{cr}$  の値は表-7 の如くなる。

表-7

$k$	1	2	3	4	$\infty$
$P_{cr}$	0.6565	0.439	0.409	0.402	0.3955

次に荷重  $q$  のみの場合、 $k=1$  ならば  $Q_{cr}=5.344$ <sup>9)</sup> 又  $k=\infty$  なら  $Q_{cr}=0.9288$  と予想される。故に  $0.9288 < Q < 5.344$  の領域で  $\frac{\cos \alpha}{\cos(k-1)\alpha}$  曲線と  $\frac{\bar{S}S''}{S'T}$  曲線との交点より表-8 の結果を得る。\*\*

表-8

$k$	1	2	3	4	5	6	7	$\infty$
$Q_{cr}$	5.344	1.618	1.175	1.053	1.004	0.979	0.965	0.9288

\*\*f) 両端固定辺の場合 (12), (15) 両式より  $C_1, C_2$  を消去して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin(k-1)\alpha \pm \sin \alpha}{\sin(k-2)\alpha} &= \frac{\bar{S}S''}{S'T} \\ \text{又 (10) 第2式より} & \\ \cos \alpha &= \frac{T'}{S'} \end{aligned} \right\} \dots\dots(26)$$

なる挫屈条件式が得られる。扱  $n=2m$  ならば

$$\frac{\sin(n-1)\alpha \pm \sin \alpha}{\sin(n-2)\alpha} = \begin{cases} \frac{\sin m\alpha}{\sin(m-1)\alpha} : \text{左辺上号に対し} \\ \frac{\cos m\alpha}{\cos(m-1)\alpha} : \text{左辺下号に対し} \end{cases}$$

なる関係があるから  $k$  が偶数ならば (26) の第1式左辺が上号を採る時は (19) に、下号を採る時は (24) に一致する。この事は (19) は一端固定辺他端単純支承の場合に対応し其の場合の挫屈形を2個互に単純支承の端辺を突合せて斜対称形に並べると只今の場合の斜対称挫屈形を表わし、(24) は一端自由辺他端固定辺の場合に対応し、其の場合の挫屈形を2個互に自由端辺を突合せて正対称形に並べると只今の場合の正対称挫

屈形に該当する事を直観すれば了承される処であつて尙一般に (26) 中上号は斜対称形挫屈に、下号は正対称形挫屈に対応するものである事が推察される。扱如上の考察より  $k$  が偶数ならば (19) 及び (24) によつて求めた羽目板数  $\frac{k}{2}$  の場合に対する  $P_{cr}$  或は  $Q_{cr}$  の数値的結果が其の儘只今の場合の斜対称又は正対称形挫屈に対する  $P_{cr}$  或は  $Q_{cr}$  を表わしている事となる。即ち表-3, 表-7 或は表-4, 表-8 の結果が用いられる。 $k$  が奇数ならば実際に (26) より算定しなくてはならない。荷重  $p$  のみが作用する場合若くは  $q$  のみが作用する場合に就き此等の結果を表記すれば表-9 表-10 の如くである。又特に荷重  $p$  のみが作用する場合に対する挫屈撓曲形の模様を断面的に図解すれば

表-9 荷重  $p$  のみが作用する場合の最小根  $P_{cr}$

$k$	2	3	4	5	6	$\infty$
斜対称形挫屈	2.5966	0.4975	0.5915	0.418	0.459	0.3955
正対称形挫屈	0.6565	0.8107	0.439	0.502	0.409	

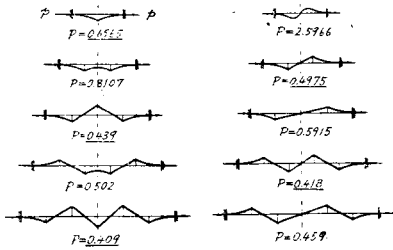
8) 脚註 6) 参照  
9) 脚註 7) 参照

表-10 荷重  $q$  のみが作用する場合の最小根  $Q_{cr}$

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\infty$
斜対称形 挫屈 [ $m=2$ ]	22.96	6.280	3.805	2.550	1.955	1.635	1.442	1.320	1.235	0.9288
正対称形 挫屈	5.344	2.455	1.618	1.315	1.175	1.098	1.053	1.025	1.004	

図-6 の如くであつて挫屈荷重は羽目板が偶数箇なら正対称形挫屈に、奇数箇なら斜対称形挫屈に対応する事が解る。表-10に於ては挫屈荷重は  $k$  の如何に拘らず正対称形挫屈に対応する事を示している。

図-6



結言

本文の結果は  $y$  方向に等間隔を以て並列せる  $x$  軸に平行な中間単純支承線のある場合に適用を拡張出来る。挫屈に際し此等の支承線の間は  $y$  方向に半波形成に相隣る区間は互に反対側に、撓曲するから該支承線に於て曲げモーメントは0である。従つて此等の一区間を採つて本文の公式を適用すればよい。又斯る支承線が無数にあつて中程の区間では  $y$  方向の末端の影響が無視出来る時は此等の末端が固定辺であつても適用出来る。

最後に文部省科学研究費の援助を受けたものである事を附記する。  
(昭.25.10.5)

コンクリートの電気養生法に関する研究

正員 山田 順 治\*  
准員 伊藤 茂 富\*\*

STUDIES ON THE CONCRETE ELECTRICALLY HEATED

(JSCE. Feb. 1951)

Junji Yamada, C.E. Member, Shigetomi Ito, C.E. Assoc. Member

**Synopsis** This paper presents several investigations on the effect of concrete electrically heated.

These investigations were made to obtain much needful informations on the specific resistance of concrete and on the influence that electrical heating may have on the compressive strength, elasticity and bond strength.

**要 旨** 本報告はコンクリートの電気養生施工方法の基礎資料を求めめるための研究の一部で、主として、コンクリートの比抵抗に関する研究、電気養生をしたコンクリートの圧縮強さ、弾性、および附着強度に就き研究した結果について述べたものである。

I. 比抵抗に関する試験

(1) 目的 電力消費量、最大電力、等の見積りをする場合、使用コンクリートの比抵抗を知つて置く必

要がある。本実験においては、コンクリートの組成と比抵抗との関係、電極の大きさを見掛けの比抵抗との関係、鉄筋量および鉄筋の位置と見掛けの比抵抗との関係などにつき実験し、電気容量決定の資料をうる目的のもとに行つたものである。

(2) セメントペーストおよびモルタルの配合と比抵抗との関係に関する試験

セメントは普通ポルトランドセメント、砂は荒川産のものをを用い、セメントペーストおよびセメント砂重量比 1:1, 1:2, 1:3 のモルタルにつき、水セメント重量比 20% より 100%

\* 建設省土木研究所技官

\*\* //