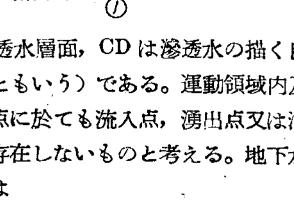
資料

土堰提の滲透に関するホドグラフ法紹介

緒言 流体力学の問題を函数論を応用して解く場合にホドグラフ法がよく用いられている。土堰堤を通つて流れる滲透水の運動を論ずる場合にもこの方法を用いると極めて精密に問題を解くことができる。滲透水の運動を論ずる式はよく知られている通り Navier-Stokes の方程式に Darcy の法則をあてはめて導く。この方程式に境界条件を満足せしめ，この関係を速度面に写像すると所謂ホドグラフを得る。次にこのホドグラフに母数変換を行つて原式を楕円積分の形に導いて具体的に数値計算を行うことができる。その方法を論じたものに Hamel 及び Davison の論文等がある。玆に Davison の論文を簡単に紹介しよう。尙後の楕円積分を求める迄及び具体的計算方法については特別の方法を用いているわけでないので説明を省略するから Hamel 及び Davison の論文を直接読んで頂き度い。

1. 運動方程式と境界条件 簡単の為めに図—1 に示すように矩形断面を持つ土堰堤を考える。図に於て

図—1



EA は不透水層面，CD は滲透水の描く自由流線（或は滲潤線ともいう）である。運動領域内及び境界上の如何なる点に於ても流入点，湧出点又は渦動点の如き特異点は存在しないものと考える。地下水流の運動を論ずる式は

$$\phi=-k\left(\frac{p}{\rho g}+y\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但し，ϕ：速度ポテンシャル，k：有効滲透係数，ρ：流体の密度．である。

境界面①は明らかに $\psi=\text{const.}$ なる流線と一致している。水域面⑤，②は x 軸から水域面上の任意の点の高サを y とし，自由水面の高サを h とすれば，一般にその点に於ける圧力 p は $p=p_0+\rho g(h-y)$ である。之を（1）式に代入すると

$$\phi=-k\left(\frac{p_0}{\rho g}+h\right)=\text{const.}$$

となる。但し p_0 は大気の圧力である。即ち水域面に於ては $\phi=\text{const.}$ が成立する。

滲透面③に於ては $p=p_0$ であるから（1）式の関係は $\phi+ky=-k\dfrac{p_0}{\rho g}=\text{const.}$ となる。滲透面④に於てはやはり $p=p_0$ であるから全く同様にして $\phi+ky=-k\dfrac{p_0}{\rho g}=\text{const.}$ が成立する。又自由流線CDを除いてはすべて境界面は直線であるからその直線を $ax+by=c$ なる形で表わす。又自由滲透水面は自由流線であるから ψ を流レ函数とすれば当然 $\psi=\text{const.}$ が成立する今この面からの流体の増減，即ち雨水の浸入又は蒸発を考慮して

$$\psi-\varepsilon\cdot x=\text{const.}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

とおいて見る。ここに ε は滲透水の浸入又は蒸発を考えた場合の係数であつて，浸入が蒸発より大きい時は正，之と反対の場合には負とする。x は流線の x 軸への射影長である。從つて自由流線上に於ては $\phi+ky=\text{const.}$ なる境界条件の外に尙（2）式で表わされる条件を満足しなければならない。このようにして運動領域の何れの各境界に於ても夫々２つ宛の条件式が成立ち，この条件式を一般に次の形で表わすことができる。

$$\left.\begin{array}{l}a_jx+b_jy+c_j\phi+d_j\psi=k_j\\ a_j'x+b_j'y+c_j'\phi+d_j'\psi=k_j'\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但し j は 1,2,…,5 の何れかの境界面の番号を表わす。（3）式は又次の如く書き直すことができる。

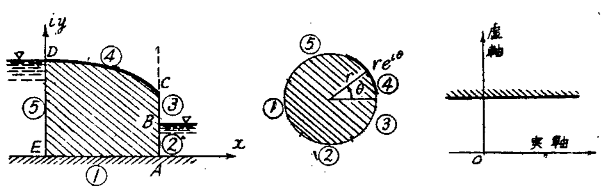
$$\left.\begin{array}{l}I(m_jz+n_jf)=k_j\\ I(m_j'Z+n_j'f)=k_j'\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

但し $f=\phi+i\psi$，$z=x+iy$ であり，I は虚部を表わ

し，m_1, n_1, m_1', n_1' は夫々複素数の定数例えば $m_1=b_1+ia_1$，$n_1=d_1+ic_1$ を表わす。又（4）式に於て$m_1n_1'-m_1'n_1\neq 0$ であることが必要である。なぜならば若し 0 に等しければ（4）式の２つの式は全く比例することになるからである。

2. 等角写像の問題 任意の複素函数 $\zeta=re^{i\theta}$ を考える。但し $\zeta(z)$ は z- 面の運動領域を $|\zeta|=r\leqq 1$ なる単位円に写像する函数とする。即ち境界上の総べての点は ζ- 面の単位円周上の総べての点に対応するものと考える。このように考えると，(m_1z+n_1f) 及び $(m_1'z+n_1'f)$ なる２つの函数は ζ の正則函数であり

図—2



例へば図—2 に於て境界④は $|\zeta|=1$ の単位円の太線④に対応する。又 (m_1z+n_1f) 又は $(m_1'z+n_1'f)$ の虚部が一定であるから円弧を越えて外方へ解析接続可能となる。従つて各境界の端点は別としてこの円弧上に於ては到る処正則である。よつて $(mz+nf)$ 面へ写像した境界線は実軸に平行な直線として表わされる。z，f は共に $\zeta=re^{i\theta}$ の解析函数であるから（4）式の両辺を θ で微分すると，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial I(m_1z+n_1f)}{\partial\theta}=0\\&\frac{\partial I(m_1'z+n_1'f)}{\partial\theta}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (5)$$

（5）式の第２式は又次のようにも書ける。

$$\frac{\partial I(m_1'z+n_1'f)}{\partial R(m_1z+n_1f)}\cdot\frac{\partial R(m_1z+n_1f)}{\partial\theta}+\frac{\partial I(m_1'z+n_1'f)}{\partial I(m_1z+n_1f)}\cdot\frac{\partial I(m_1z+n_1f)}{\partial\theta}=0$$

（５）式の第１式の関係から上の式の第２項は０となる。所が第２項の前部は

$$\frac{\partial I(m_1'z+n_1'f)}{\partial R(m_1z+n_1f)}=I\left(\frac{d(m_1'z+n_1'f)}{d(m_1z+n_1f)}\right)$$

$$=I\left(\frac{m_1'+n_1'\dfrac{df}{dz}}{m_1+n_1\dfrac{df}{dz}}\right)=I\left(\frac{m_1'+n_1'w}{m_1+n_1w}\right)=0\cdots\cdots\cdots(6)$$

となる。（(6)式の関係は容易に誘導できる。）

次に $I(m_1z+n_1f)=\text{const.}$ なる境界線上に於ける微係数 $\dfrac{d(m_1'z+n_1'f)}{d(m_1z+n_1f)}$ を考える。この時微係数は極限の方向に無関係であるから $I(m_1z+n_1f)=\text{const.}$ なる直線に沿つて極限を考えると，

$$\frac{d(m_1'z+n_1'f)}{d(m_1z+n_1f)}=\frac{d(m_1'z+n_1f)}{dR(m_1z+n_1f)+diI(m_1z+n_1f)}$$

$$=\frac{d(m_1'z+n_1f)}{dR(m_1z+n_1f)}$$

故に $\dfrac{\partial I(m_1'z+n_1'f)}{\partial R(m_1z+n_1f)}=I\left\{\dfrac{d(m_1z+n_1'f)}{d(m_1'z+n_1f)}\right\}$ となる。

（6）式の意味は結局 $m_1'z+n_1'f=g_1$，$m_1z+n_1f=g_2$ とおけば g_1, g_2 は共に z の正則函数であるから z を媒介として g_1 が g_2 の函数（一般に正則函数となることが知られている）となり，その導函数 $\dfrac{dg_1}{dg_2}$ の虚部を計算することに帰する。このようにして導かれた（６）式は之が∞となる点を除いては連續な ζ の正則函数であるから之を w 面に写像したものはすべて直線を以て表わされることを示している。

次に（４）式の第１式は次のように書ける。

$$\frac{\partial I(m_1z+n_1f)}{\partial R\left(\dfrac{m_1'+n_1'w}{m_1+n_1w}\right)}\cdot\frac{\partial R\left(\dfrac{m_1'+n_1'w}{m_1+n_1w}\right)}{\partial\theta}+\frac{\partial I(m_1z+n_1f)}{\partial I\left(\dfrac{m_1'+n_1w}{m_1+n_1w}\right)}\cdot\frac{\partial I\left(\dfrac{m_1'+n_1'w}{m_1+n_1w}\right)}{d\theta}=0$$

茲に於て（４）式の第２式の関係から上式の第２項は０であるから

$$\frac{\partial I(m_1z+n_1f)}{\partial R\left(\dfrac{m_1'+n_1w}{m_1+n_1w}\right)}=I\left\{\frac{d(m_1z+n_1f)}{d\left(\dfrac{m_1'+n_1w}{m_1+n_1w}\right)}\right\}=0$$

でなければならない。然るに上式を計算すると，

$$d\left(\frac{m_1'+n_1'w}{m_1+n_1w}\right)=\frac{n_1'(m_1+n_1w)-m_1(m_1'+n_1'w)}{(m_1+n_1w)^2}dw$$

$$=\frac{m_1n_1'-m_1'n_1}{(m_1+n_1w)^2}dw,$$

$$d(m_1z+n_1f)=\left(m_1+n_1\frac{df}{dz}\right)dz=(m_1+n_1w)dz$$

$$\therefore\quad\frac{\partial I(m_1z+n_1f)}{\partial R\left(\dfrac{m_1'+n_1'w}{m_1+n_1w}\right)}=I\left\{\frac{(m_1+n_1w)^3}{m_1n_1'-m_1'n_1}\frac{dz}{dw}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

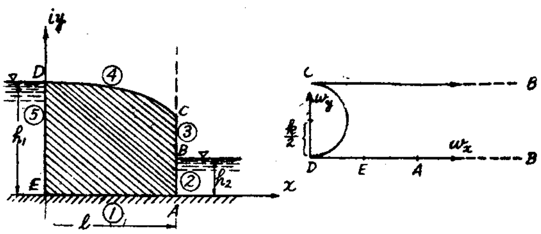
従つて次の（８）式を得る。

$$\arg\frac{dz}{dw}+3\arg(m_1+n_1w)-\arg(m_1n_1'-m_1'n_1)=n\pi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

（６）式によつて $\zeta=re^{i\theta}$ 面と w 面との写像関係を知ることができた。従つて w 面の値 $\arg\dfrac{dz}{dw}$ を知つて ζ 面の $\arg\dfrac{dz}{dw}$ を知ることができる。又$\arg\dfrac{dz}{d\zeta}=\arg\dfrac{dz}{dw}+\arg\dfrac{dw}{d\zeta}$ であるから $\arg\dfrac{dz}{d\zeta}$ を求めることができる。然るに $z(\zeta)$ は正則函数であるからその逆

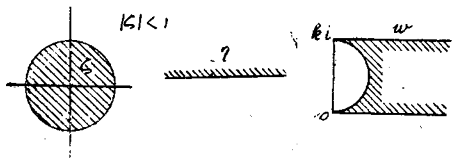
図—3



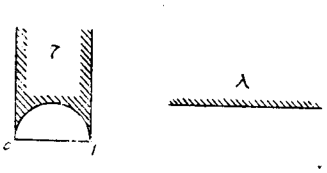
函数 $\zeta(z)$ も亦一般に正則である。従つて又 $\frac{dz}{d\zeta}$ も正則，$\log\frac{dz}{d\zeta}$ もその虚部 $I\left(\log\frac{dz}{d\zeta}\right)=\arg\frac{dz}{d\zeta}$ も正則である。

3. 結語　以上の関係を鉛直壁を有する土堰堤に応用して，運動領域の各境界の写像を行えば特別の場合として図—3に示すホドグラフを得る。之に母数変換を行えば求める写像函数（調和函数）を得る。即ち，$|\zeta|<1$ なる単位円周及び内部を半平面 η 面に写像する函数は $\eta=i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ である。又snu の週期は $2F(\lambda)$，$iF(1-\lambda)$ であり，$\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{iF(1-\lambda)}{2F(\lambda)}$ であるから η 面を τ 面に写像する函数は $\tau(\eta)=\frac{iF(1-\lambda)}{2F(\lambda)}$ である。（竹内端三著，楕円函数論，岩波，P151，P68参照）所が吾々のホドグラフに之を応用するには次の変換を行わねばならない（図—6 参照）。

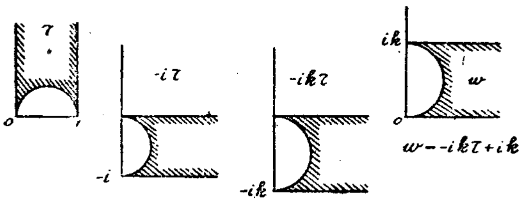
図—4



図—5



図—6



$$w=-ik\tau+ik$$

$$\therefore\quad w=-ik\frac{iF(1-\eta)}{2F(\eta)}+ik=\frac{kF(1-\eta)}{2F(\eta)}+ik$$

$$=k\left\{\frac{F\left(1-i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)}{2F\left(i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)}+i\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

或は又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda\sin^2\theta}}=F_0^{\frac{\pi}{2}}(\lambda)$ と書けば

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(i)} & F_0^{\frac{\pi}{2}}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}F_0^{\sin^{-1}\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\
& F_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\sqrt{\lambda}F_0^{\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}(\lambda)\\
\text{(ii)} & F_0^{\frac{\pi}{2}}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}F_{\frac{\pi}{2}}^{\cos^{-1}\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)\\
& F_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)=\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}F_{\frac{\pi}{2}}^{\cos^{-1}\sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}}(\lambda)\\
\text{(iii)} & F_0^{\frac{\pi}{2}}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}F_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)\\
& F_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)=\sqrt{1-\lambda}F_0^{\frac{\pi}{2}}(\lambda)\\
\text{(iv)} & F_0^{\frac{\pi}{2}}(\lambda)=\frac{1}{i}F_{\frac{\pi}{2}}^{\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}}(1-\lambda)\\
& F_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\lambda)=\frac{1}{i}F_{\frac{\pi}{2}}^{\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}(\lambda)
\end{array}\right\}$$

なる関係があるからこれを利用して，

$$w=kF\left(\frac{1-\zeta}{(1-i)-(1+i)\zeta}\right)\Big/F\left(\frac{-i(1+\zeta)}{(1-i)-(1+i)\zeta}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

又は

$$w=kF\left(\frac{1-\zeta}{i(1+\zeta)}\right)\Big/\left\{F\left(\frac{(i-1)+(1+i)\zeta}{i(1+\zeta)}\right)\right.$$
$$\left.-iF\left(\frac{1-\zeta}{i(1+\zeta)}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

の如く書き表わすことができる。かくして次に Poisson integral の関係を利用して $\frac{dz}{dw}$ を求めることができる。

以上は Davison の理論であるが数学的に美しい方法であると考えたので著者の考察も入れて簡単に説明した次第である。

Davion; On the steady motion of ground water through a wide Prismatic dam.
Phil. Mag. and Journal Science.1936.5.

（正員　徳島大学教授　久保田敬一）