

# 報 文

## 開水路不等流の系統的な計算法

正員 工学博士 本 間 仁\*

### ON A SYSTEMATIC CALCULATION OF THE GRADUALLY VARYING FLOW IN OPEN CHANNEL

(JSCE, Dec. 1950)

Dr. Eng., Masashi Homma, C.E. Member

**Synopsis** The surface profile of flow in any open channel can be calculated by the numerical integration of the fundamental equation of motion. These calculations must be performed toward upstream for the subcritical flow and toward downstream for the supercritical flow. Therefore when the stream changes from subcritical to supercritical on the way of flowing, its calculation must be started from the unknown values of the section of transition. In this paper the author treated the flow with varying bed slope, breadth or discharge and made clear under what conditions such case takes place and also showed the method of calculation for this case.

変化が急激でない開水路の定流の方程式は次の形で表わされる。

$$-i + \frac{dh}{dx} + \frac{v^2}{C^2R} + \alpha \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2g} \right) = 0 \dots (1)$$

但し  $i$  は底勾配,  $h$  は水深,  $v$  は断面の平均流速,  $R$  は平均水深,  $C$  は Chezy の係数,  $\alpha$  は平均流速を用いるための補正係数で, 約 1.1 の値を持つ。流量  $Q$  が不変の場合には断面積を  $A$  とすると

$$v = Q/A \dots (2)$$

幅  $b$  の矩形断面水路ならば  $A = bh$  と書くことにより (1) は次のようになる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - Q^2 / (C^2 b^2 h^2 R)}{1 - \alpha Q^2 / (g b^2 h^3)} = \frac{F_1(h, x)}{F_2(h, x)} \dots (3)$$

$F_2(h, x) = 0$  は  $h = h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g b^2}}$  を与える。即ち  $F_2 = 0$  の線の上では水深は常流 (Sub-critical flow) と射流 (Super-critical flow) との限界水深に等しい。  $i = \text{const.}$  ならば (1) は適当な仮定の下に積分が出来る。  $C = \text{const.}$ ,  $R \propto h$  (幅の広い矩形の仮定) によつて積分したものが Bresse の公式である。矩形以外の断面形の場合には  $A = ah^2$ ,  $R = ch^m$  とおくことによつて (3) に相当する式を導くことが出来る。その時に  $F_2 = 0$  はやはり限界水深を与えるのであつて, その値は

$$E = h + \frac{\alpha}{2g} \left( \frac{Q}{A} \right)^2, \quad \frac{\partial E}{\partial h} = 0$$

\* 東京大学教授, 第一工学部土木教室

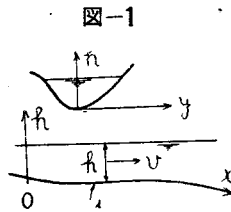


図-1

を満足する  $h$  の値である。即ち

$$h_c = \left( \frac{\alpha Q^2}{g a^2} \right)^{\frac{1}{2s+1}} \dots (4)$$

(3) の境界条件は常流ならば下流端, 射流ならば上流端で与えられる。即ち数値計算の場合は常流ならば上に向つて, 射流ならば下に向つて進められねばならない。そこで先づ限界勾配 (Critical slope)  $i_c$  を定義して, この勾配の水路では等流の水深が丁度限界水深になっているものとする。即ち幅の広い矩形ならば

$$\frac{Q^2}{C^2 b^2 i_c} = h_c^3 \dots \therefore i_c = \frac{g}{\alpha C^2} \dots (5)$$

勾配の変る水路の例として図-2 のように限界勾配以下の部分 I から限界勾配以上の部分 II に移り, その間の II では

$$i = i_1 + ax \dots (6)$$

の形で変化する場合を考える。II の部分の水路底は拋物線形である。

先づ流線の曲りによる遠心力の影響を考えないことにすると (1) はそのまま使われる。又幅の広い矩形断面の仮定を使うと, (3) の中で  $R = h$  とすればよい。II の部分では  $F_1 = 0$  の与える  $h$  は一定値を持たないで次の  $h_0$  に等しい。

$$h = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \{ C^2 b^2 (i_1 + ax) \}}} = h_0 \dots (7)$$

2つの曲線  $F_1 = 0$  及び  $F_2 = 0$  は図-2 のようにな

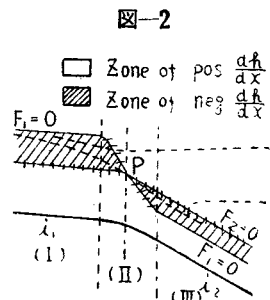


図-2

り、この交点Pは Control section の位置を示す。流れはこゝで常流から射流に変るから、数値計算はこゝから上下流に向つて進められねばならない。Control section の位置は  $h_0 = h_c$ ,  $i = i_c$  の条件から求められる。これを  $x_c$  とすると

$$i_1 + ax = \frac{g}{\alpha C^2} \therefore x = x_c = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{g}{\alpha C^2} - i_1 \right) \dots (8)$$

Pに於ける  $\frac{dh}{dx}$  の値は次の関係式から求められる。

$$\left( \frac{dh}{dx} \right)_{x=x_c} = \left( \frac{dh}{dx} \right)_c = \lim_{\substack{x \rightarrow x_c \\ h \rightarrow h_c}} i \frac{3h^2 \frac{dh}{dx} - 3h_0^2 \frac{dh_0}{di} \frac{di}{dx}}{3h^2 \frac{dh}{dx}}$$

$$= i_c \frac{\left( \frac{dh}{dx} \right)_c + \frac{\alpha}{3i_c} \sqrt{\frac{Q^2}{C^2 b^2 i_c}}}{\left( \frac{dh}{dx} \right)_c}$$

$$\therefore \left( \frac{dh}{dx} \right)_c^2 - i_c \left( \frac{dh}{dx} \right)_c - \frac{\alpha}{3} h_c = 0 \dots (9)$$

$\left( \frac{dh}{dx} \right)_c$  は必ず負でなければならないから、(9)の解は

$$\left( \frac{dh}{dx} \right)_c = \frac{i_c}{2} - \sqrt{\frac{i_c^2}{4} + \frac{\alpha}{3} h_c} \dots (10)$$

これ等の値を境界条件として数値計算が進められる。遠心力の影響を考えると水圧分布が図-3のように静水圧分布と違うことを考えに入れることになる。その結果は(1)

の中の  $\frac{dh}{dx}$  の値が

Control section より上流では小さくなり、下流では大きくなることになる。故に  $\frac{dh}{dx}$  の代りに  $K \frac{dh}{dx}$  ( $K < 0$ ) と書くと、 $K$  は  $x < x_c$  では1より大きく、 $x > x_c$  では1より小さい。 $x = x_c$  の位置では

$$\left( \frac{dh}{dx} \right)_c = \lim_{h \rightarrow h_c} i \frac{h^3 - h_0^3}{K h^3 - h_c^3} > i \left( \frac{h^3 - h_0^3}{h^3 - h_c^3} \right)_{x_c} \dots (11)$$

従つてPに於ける  $\frac{dh}{dx}$  の値は(10)から求められるものよりも幾分大きい(絶対値は小さい)。

第2の例として幅の変化する水路を扱つて見る。幅の広い矩形と仮定し、 $i = \text{const.}$  とすると、(1)の最後の項は

$$\frac{\alpha v}{g} \frac{dv}{dx} = \frac{\alpha v Q}{g} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{bh} \right) = - \frac{\alpha Q^2}{g b^2 h^2} \left( \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \right)$$

これを(1)に代入すると(3)の代りに次の式が得られる。

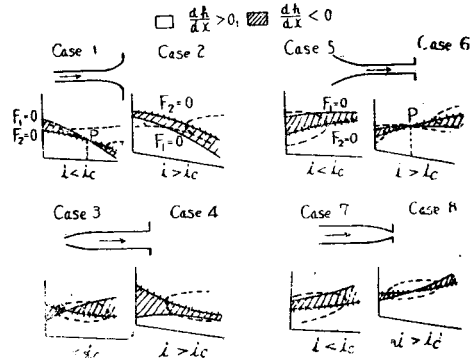
$$\frac{dh}{dx} = \frac{i h^3 - \frac{Q^2}{C^2 b^2} + h_c^3 \frac{h}{b} \frac{db}{dx}}{h^3 - h_c^3} = \frac{F_1(h, x)}{F_2(h, x)} \dots (12)$$

幅は上流又は下流に向つて一樣な値に近づくものとして次のように分類する。

幅の増す場合	$\frac{db}{dx} > 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2b}{dx^2} > 0 \\ " < 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} i < i_c \\ i > i_c \end{array} \right.$ — Case 1
			$\left\{ \begin{array}{l} i < i_c \\ i > i_c \end{array} \right.$ — " 2
			$\left\{ \begin{array}{l} i < i_c \\ i > i_c \end{array} \right.$ — " 3
			$\left\{ \begin{array}{l} i < i_c \\ i > i_c \end{array} \right.$ — " 4
幅の減る場合	$\frac{db}{dx} < 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2b}{dx^2} > 0 \\ " < 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} i < i_c \\ i > i_c \end{array} \right.$ — " 5
			$\left\{ \begin{array}{l} i < i_c \\ i > i_c \end{array} \right.$ — " 6
			$\left\{ \begin{array}{l} i < i_c \\ i > i_c \end{array} \right.$ — " 7
			$\left\{ \begin{array}{l} i < i_c \\ i > i_c \end{array} \right.$ — " 8

\* この8つの場合に対して一般に見られる  $F_1=0$  及び  $F_2=0$  の曲線を図-4に示す。両曲線の交点Pは水路が充分長くなければ現われない。尙夫々の場合の代表的な水面形も点線で示した。

図-4



この図から次のような結論が得られる。(1) Case 1, 4, 6, 7 の場合には水面形は  $F_1=0$  を漸近線とする曲線である。これ等は水路幅が  $i < i_c$  ならば上流で、 $i > i_c$  ならば下流で一樣幅に近づく場合である。(2) 他の場合には  $F_1=0$  は水面形の漸近線とならない。このような形は局部的にしか現われないもので、多くの場合跳水を伴う。(3) Control section が出来るのは Case 1 及び 6 である。流れは此処で常流から射流に変る。Case 3 及び 8 にも  $F_1=0$  と  $F_2=0$  の曲線は交わるけれども交点に於て  $\frac{dh}{dx}$  の実数値がないから Control section ではない。勿論射流の部分では Mach 波が出来るが、 $h$  は断面の平均水深と考える。

Control section のない場合の水面の計算は境界条件の与えられた位置から数値積分を進めればよい。Control section がある場合には先づその位置  $x_c$  及びそこでの水面勾配  $\left( \frac{dh}{dx} \right)_c$  をきめねばならない。 $x_c$  は図上で  $F_1=0$  及び  $F_2=0$  の両曲線の交点の位置を求めればよい。 $\left( \frac{dh}{dx} \right)_c$  は次の関係から得られる。

$$\lim_{\substack{h \rightarrow h_c \\ x \rightarrow x_c}} \frac{dh}{dx} = \lim_{\substack{h \rightarrow h_c \\ x \rightarrow x_c}} \frac{3ih^2 \frac{dh}{dx} + \frac{2Q^2}{C^2 b^3} \frac{db}{dx} + \frac{dQ^2}{gb^3} \left[ \frac{db}{dx} \frac{dh}{dx} - \frac{3h}{b} \left( \frac{db}{dx} \right)^2 + h \frac{d^2 b}{dx^2} \right]}{3h^2 \frac{dh}{dx} + 2 \frac{\alpha Q^2}{gb^3} \frac{db}{dx}}$$

$$\therefore 3 \left( \frac{dh}{dx} \right)_c^2 - \left( 3i - \frac{h_c}{b} \frac{db}{dx} \right) \left( \frac{dh}{dx} \right)_c - \frac{2Q^2}{C^2 b^3 h_c^2} \frac{db}{dx} + \frac{3h_c^2}{b^2} \left( \frac{db}{dx} \right)^2 - \frac{h_c^2}{b} \frac{d^2 b}{dx^2} = 0 \dots (13)$$

この中の負の根は Case 1, 正の根は Case 4 に相当する。これを用いて交点 P を通る水面形を求めることが出来る。これ等の場合でも水面を高くせき上げて射流部の現われない時は Control section の計算は必要がない。

同じ方法で扱える第 3 の問題は水路の横から流入又は流出のある流れである。この場合には水路側壁の単位長さ当りの流入量を +q (流出ならば -q) とすると

$$\frac{dQ}{dx} = \pm q \dots (14)$$

永路幅は一樣とすると (1) の最後の項のようになる。

$$\frac{\alpha v}{g} \frac{d}{dx} \left( \frac{Q}{bh} \right) = \frac{\alpha Q}{gb^2 h^2} \left( \frac{dQ}{dx} - \frac{Q}{h} \frac{db}{dx} \right)$$

これを (1) に代入すると

$$-i + \frac{Q^2}{C^2 b^2 h^2 R} \pm \frac{\alpha Q q}{gb^2 h^2} + \frac{dh}{dx} \left( 1 - \frac{\alpha Q^2}{gb^2 h^3} \right) = 0 \dots (15)$$

先づ  $q = \text{const.}$  の流入がある場合を考えると,  $q$  は側壁を越えて流れ込むものと考えられる。従つて落下する水のエネルギーの一部は攪乱のために失われる。このエネルギー損失を  $Q$  の水が長さ  $l$  の間で

$$m \cdot \frac{\alpha v^2}{2g} \cdot q \text{ 又は } \frac{m}{2} \cdot \frac{\alpha Q^2 q}{gb^2 h^2} \quad (0 \leq m \leq 1)$$

とすれば (15) にこの項を加えればよい。従つて

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= \frac{i - \frac{Q^2}{C^2 b^2 h^2 R} - \left( 1 + \frac{m}{2} \right) \frac{\alpha Q q}{gb^2 h^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{gb^2 h^3}} \\ &= \frac{ih^3 - \frac{Q^2 h}{C^2 b^2 R} - \left( 1 + \frac{m}{2} \right) \frac{hh_c^3 q}{Q}}{h^3 - h_c^3} \\ &= \frac{F_1(h, x)}{F_2(h, x)} \dots (16) \end{aligned}$$

この時の水面形の特徴は幅が減る水路の場合に似ている。 $F_1=0, F_2=0$  及び代表的な水面の形は図-6 に示した。

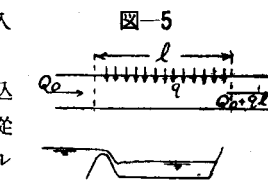


図-5

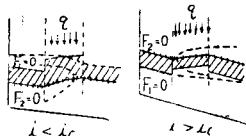


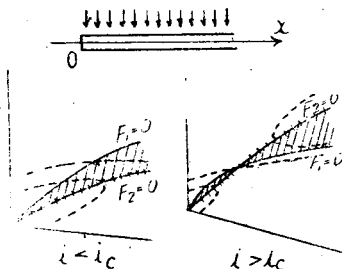
図-6

図-7 は水路の全長に亘つて流入のある場合であ

る。道路の舗装面の上の雨の流れもこの場合にあたる。この場合は図に示したように勾配が限界勾配以上になると Control section が

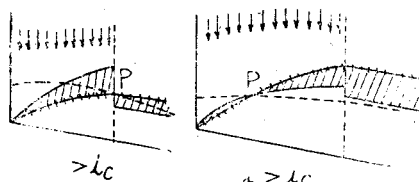
現われる。

図-7



発電所の余水吐水路のように流入のある部分がある長さで終つて, 後は普通の急勾配水路になる場合は図-8 のようになる。特に図の (a) は流入のある部分が短くて, Control section がその終端の位置に来た場合である。この点では曲線  $F_1=0$  が不連続であるから,  $\left( \frac{dh}{dx} \right)_c$  の値を解析的に求めることは出来ない。従つて充分多くの isoclinic lines を画いておいて, 図上で水面の形をきめなければならない。

図-8



水路の側壁を越えて水が流出する場合には  $q$  は一般に  $x$  の函数になる。然し計算法としては前の場合と違わない。基本式は

$$\frac{dh}{dx} = \frac{ih^3 - \frac{Q^2 h}{C^2 b^2 R} + \frac{hh_c q(x)}{Q}}{h^3 - h_c^3} = \frac{F_1(h, x)}{F_2(h, x)} \dots (17)$$

$$F_1=0, F_2=0$$

図-9

及び代表的な水面の形は図-9 に示した。数値計算は  $q(x)$  の函数形が決まれば遂行出来る。

これまでの総ての計算に於て常に次の仮定が行われている。(1)  $Q$  の値は等流の時の値が使用出来る。(2) 速度分布は常に標準状態に近く,  $\alpha$  の値は const と仮定出来る。(3) 幅の増す水路では側壁に沿う流線は壁面から離れない。

1) この場合については J.Hinds の方法があるが (Trans. A.S.C.E. 1926), この方法は Control section のきめ方が合理的でない。