

プレストレストコンクリートとクリープ

正員 久保 慶三郎*

CREEP IN PRE-STRESSED CONCRETE

(JSCE Dec. 1950)

Keizaburo Kubo, C.E. Member.

Synopsis Recently, prestressed concrete has been studied to a great extent and used at various places. But the decrease of initial given stress due to creep of concrete still remains uncertain, so the writer investigated, theoretically, the residual stress in prestressed concrete, using the creep formula of Mr. Lorman and modifying the theory of bond stress of BUILDING RESEARCH BOARD.

要旨 最近プレストレストコンクリートの研究が盛んになり、これの実用化が活潑であるが、コンクリートのクリープによる初応力の減少が当然問題になつてくる。著者は Lorman のクリープの一般式を利用し、Building Research Board のコンクリートと鉄筋との附着力に対する考え方を拡張して、プレストレストコンクリートのクリープの問題を理論的に求め、その性質を明かにした。

1. まえがき

鋼筋コンクリートは初応力を入れることによつて破壊荷重が増大する事を利用したものであるが、コンクリートは一定応力の下においてはひずみが増大する性質即ちクリープがある。それで初めの圧縮力 σ もこのクリープによつて減少しはしないかというおそれが生れて来る。仁杉巖氏の論文には、クリープ乾燥収縮によるピアノ線の応力低下はピアノ線に加えた初応力の 10~20% 程度であることが記されてある。然しこの問題は鉄筋とコンクリートとの附着の問題と、コンクリートのクリープ（乾燥収縮についてはこゝではふれないことにする）についての問題の結合されたものでありしかもこの問題は2つとも相当明かになつていない問題であるので、著者はそれ等の研究結果を利用して、プレストレストコンクリートのクリープの問題を解いてみたのでこゝに発表する機会を得、諸先輩の御批判を仰ぐ次第である。

勿論曲げをうけるプレストレストコンクリート梁の問題としてクリープを論ずればよいのであるが、これは少し面倒でもあるので鋼筋は断面の中央に入っている場合即ち曲げを受けずに、圧縮力のみコンクリートに作用する場合に問題を限定した。尚鋼筋が断面の下側にある場合即ちコンクリートに曲げ応力をも生ずる場合のクリープについては次の機会に述べたいと思つている。

2. 附着の考え方

鉄筋とコンクリートの附着に対する考え方は色々あるが、何れも実験的或は理論的に不完全なるをまぬがれない。之に反し1930年の Building Research Board の出した "Bond Resistance" に出て来る理論式は勿論完全ではないが、色々の現象を可成りよく説明しうるのである。例えていえば埋込長と附着強度との関係を押込試験押抜試験について一義的に説明出来、亦この理論から得られた附着応力の分布も実験的に説明されている。(後述参照) この考え方は最大の附着強度 f_a は2つの部分から成り立つと仮定している。即ち鉄筋の応力 P_a に比例する項(摩擦力)と、無関係の項(凝集力) f とである。鉄筋が圧縮力を受けているとすると、断面が膨脹するので、鉄筋とコンクリートの面の間には圧力が作用する。この圧力によつて摩擦力が生ずる。今鉄筋とコンクリートとの弾性的性質による常数を k とすると鉄筋が引張力をうけているとすると、摩擦力は負になるから

$$f_a = f - kP_a \dots ①$$

となる。所が f_a と P_a の間には図-1の如き関係があるから、鉄筋方向の釣合を考えると

$$dP_a = -f_a U dx \dots ②$$

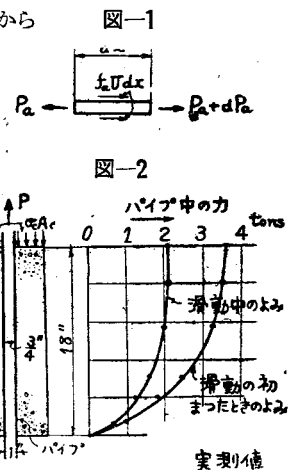
但し U は鉄筋の周長

$$① \text{と} ② \text{より } P_a$$

を消去して解くと

$$f_a = f_0 U k(x-l) \dots ③$$

がえられる。③と②から P_a の分布を求めることが出来る。押抜試験に於ける P_a の分布については、最近英国で金属線の応力による抵抗の変化と利用した歪計



* 東京大学助教授，第二工学部土木教室

1) 土木技術 第5巻7號 "プレストレストコンクリートについて"

2) 福田武雄著 "鋼筋コンクリート理論" 山海堂出版

で測定した例がある。(図-2 参照) 鉄筋とコンクリートとの間に相対変位の起らない時の P_a の分布は理論式に符合している。著者はこの考え方を f_a が最大附着強度でない場合に拡張した。即ち附着は凝集力による項と(この値は Building Research Board の場合には最大摩擦力であるから一定と考えられるが、著者の場合には P の函数になる)と摩擦力による項との和から成ると考えた。尙この k の値はコンクリートの断面積その他で変る値であるが、一例をのべると 15cm 直径の円筒供試体(重量配合比 1:2:4 使用セメント, ボルトランドセメント)の中央に直径 1.25 cm の鉄筋を入れた場合で 0.846×10^{-3} となる。

3. 初応力について

あらかじめ引張られた鋼弦がゆるめられた直後の応力状態を求めよう。こゝでは鋼弦とコンクリートとの間には全然相対変位がない場合を取扱う。附着強度は両者の相対変位が出てもどんどん高くなり、遂に破壊強度に到るのであるが、附着強度の破壊近くの応力を用いないとすれば相対変位なしという仮定を設けても妥当性のある仮定と考えて差支えなからう。尙相対変位がある場合はその大きさと力との関係をあらかじめ知つてお

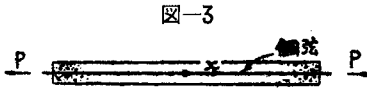


図-3

さえすれば相対変位を 0 とするかはりにその既知の値を使用すればよいことになるので、こゝ

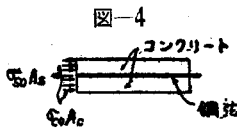


図-4

では一応相対変位のない場合を考えることにする。先づ以下の式申に出て来る符号の説明から始める。

- τ_{ao} : x 点に於ける鋼弦とコンクリートとの附着応力
- f : x には無関係の常数
- k : x, P に無関係で鋼弦とコンクリートとの物理的性質に係る常数
- P : あらかじめ鋼弦に加えられた引張力
- σ_{so} : x 点の鋼弦内の応力
- A_s : 鋼弦の断面積
- U : 鋼弦の周長

鋼弦に加わつた力はこの力 P から残留力 $\sigma_{so} A_s$ を差引いた $(P - \sigma_{so} A_s)$ が圧縮力と同様の作用をコンクリートに及ぼすわけであるので2.に述べたことから次

式をうる。

$$\tau_{ao} = f + k(P - \sigma_{so} A_s) \dots\dots\dots ④$$

前述の②と同様に

$$\tau_{ao} = -\frac{A_s}{U} \frac{d\sigma_{so}}{dx} \dots\dots\dots ⑤$$

をうるから④⑤より

$$\frac{d\sigma_{so}}{dx} - kU\sigma_{so} = -\frac{U}{A_s}(f + kP) \dots\dots\dots ⑥$$

なる σ_{so} を決定する方程式がえられる。この一般解は A を積分常数とすると

$$\sigma_{so} = AekUx + \frac{1}{kA_s}(f + kP) \dots\dots\dots ⑦$$

となる。境界条件として、 $x=l$ で $\sigma_{so}=0$ を用いると A は決定され、

σ_{so} は

$$\sigma_{so} = -\frac{f + kP}{kA_s} e^{Uk(x-l)} + \frac{f + kP}{kA_s} \dots\dots\dots ⑧$$

⑥と⑧より

$$\tau_{ao} = (f + kP)e^{Uk(x-l)} \dots\dots\dots ⑨$$

所で⑧⑨式中の f は x の函数ではないが、 P の函数であるから、これを決定しなければならない。 f を決定する条件として、 $x=l$ で鋼弦とコンクリートの間には相対変位が全然ないとする。 E_c, E_s を夫々コンクリート、鋼弦のヤング率とすると、前述の仮定より

$$\int_0^l \frac{\sigma_{co}}{E_c} dx = \frac{Pl}{E_s A_s} - \int_0^l \frac{\sigma_{so}}{E_s} dx \dots\dots\dots ⑩$$

この式に σ_{co} (σ_{co} は図-4 で x 方向の釣合を考えると、 $\sigma_{co} A_c = \sigma_{so} A_s$ となりこれに σ_{so} を代入すればよい) を入れると f は

$$f = \frac{Pl}{E_s A_s \left(\frac{k}{A_s E_s} + \frac{k}{A_c E_c} \right) \left\{ l + \frac{1}{Uk} (e^{-Ukl} - 1) \right\} - kP} \dots\dots\dots ⑪$$

で与えられる、この式からみると、 τ_{ao} は P に比例していること、 $A_c E_c$ が $A_s E_s$ に比して小さい場合には、 τ_{ao} は 0 に限りなく近くなる。言いかえれば、コンクリートの断面が非常に小さいと、残留する附着応力、或は鋼弦の応力は 0 に近くなることが判る。

4. クリープの定義

コンクリートが持続荷重をうけているときにひずみが次第に増大してゆく現象即ちクリープは今世紀の初頭から研究されて来た。1920 年から 1940 年にかけての 20 年間にクリープが英米独仏で盛んに研究されて、その性質も次第に明白になつて来た。クリープを支配する要素として、コンクリート中の水分(自由水、結合水)とセメントゲルがその主要なものと考えられているが、定量的には、一定荷重 σ をうけるコンクリートのクリープ量 ϵ は σ に比例する。即ち $f(t)$ を時間

3) "Experimental method for research in reinforced concrete" By. R.J. Wilkins, Engineering June, 17, 1949 p553-555

の函数とするとεは

$$\epsilon = f(t)\sigma \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる事が実験的にやゝ明かになつて来ている。このf(t)の形を如何に定義するかが問題であるわけだが、f(t)の性質としてはtが無限大になつたときに或る一定値に近づくこと、f(t)はtの小さい間は急に大きくなる必要がある。これ等の性質を持つてゐる函数として双曲線函数、及び指数函数があるが、こゝではどちらを用いても同じことになるので、Lorman にしたがつて双曲線函数を用いることにする。先づf(t)

$$f(t) = \frac{bt}{a+t} \dots\dots\dots (13)$$

であると定義する、ここにa, bは常数であるがbは $\rightarrow \infty$ のときのf(t)の値即ち単位の応力の下に於ける終局のクリープ量をしめし、aはf(t)が丁度 $\frac{b}{2}$ になるときのtの値を示す。即ち次元的には時間の次元を持つてゐる。今t=τでΔσだけ荷重が増加したとすると、実験的研究からt=tに於けるクリープ量εは

$$\epsilon = \frac{bt}{a+t}\sigma + \frac{b(t-\tau)}{a+t-\tau}\Delta\sigma \dots\dots\dots (14)$$

で与えられることがわかつてゐる。さて、常数a, bの性質を明かにしよう。

セメントの種類、骨材の種類はaには殆んど影響しないが、養生方法によつてaは変動し、水中養生の方が空中養生より大きいaを与える。亦供試体の寸法が小さくなればaは大きくなる。材令が大きいとbは小さいが配合が悪くなるとbが大きくなる。Thomasの実験ではbは(w/c)²に比例している。載荷時の温度が高いとbは大きくなる。これは水分の粘性が減じ流出しやすくなるためと考えられる。

以上でクリープに及ぼす重要な因子についての考察とクリープと応力、時間との関係式を求めたわけである。尚その他の因子については脚註⑤の文献を参照される様に希望する。

5. クリープの解析

以上プレストレストドングリートのクリープを解析する準備として色々の事を述べて来たが、これからそれ等の考え方を用ひてクリープを解いてみよう。

先づ鋼弦とコンクリートの間には相対変位がないも

のと仮定する。従つてコンクリートのクリープによつてコンクリートが変形するが、その変形にE_sをかけただけ鋼弦の応力も減少することになる。t=0でσ_{c0}なる圧縮力をうけたコンクリートが、t=τでΔσ_cなる荷重の増加を受けたとすると、t=tに於けるクリープの歪みεは⑭より

$$\epsilon = \sigma_{c0} \frac{bt}{a+t} + \Delta\sigma_c \frac{b(t-\tau)}{a+t-\tau} \dots\dots\dots (15)$$

こゝでt=0からtまでσ_cの値はたえず変化するものとすればt=τでのσ_cの増分は $\frac{d\sigma_c}{dt} dt$ であるから

$$\epsilon = \sigma_{c0} \frac{bt}{a+t} + \int_0^t \frac{d\sigma_c}{dt} \frac{b(t-\tau)}{a+t-\tau} d\tau \dots\dots (16)$$

⑭の右辺の積分に部分積分をほどこすとσ_cはt=0でσ_{c0}であるから⑭は簡単化されて

$$\epsilon = \int_0^t \sigma_c \frac{ab}{(a+t-\tau)^2} d\tau \dots\dots\dots (17)$$

所でこれはクリープによるx点の歪であるが、クリープによつて、コンクリートのσ_{c0}も小さくなるので、その減少に対する弾性変形も鋼弦の応力減少にはあわせて考えなければならぬ。今σ'_sを鋼弦の応力減少分とすると

$$\sigma'_s = E_s \epsilon' = E_s \int_0^t \sigma_c \frac{ab}{(a+t-\tau)^2} d\tau - \frac{E_s}{E_c} (\sigma_{c0} - \sigma_c) \dots\dots\dots (18)$$

Aσ'_s = A_cσ'_s であるから

$$\sigma'_s = \frac{E_s A_s}{A_c} \int_0^t \sigma_c \frac{ab}{(a+t-\tau)^2} d\tau - \frac{A_s E_s}{A_c E_c} (\sigma_{s0} - \sigma_s) \dots\dots\dots (19)$$

σ_{s0}を鋼弦に働く初応力とすると、残有応力σ_sは

$$\sigma_s = \sigma_{s0} - \frac{E_s A_s}{A_c} \int_0^t \sigma_s \frac{ab}{(a+t-\tau)^2} d\tau + \frac{E_s A_s}{E_c A_c} (\sigma_{s0} - \sigma_s) \dots\dots\dots (20)$$

これをxで微分して整理すると⑥式より

$$\tau_a = \tau_{a0} - \frac{E_c E_s A_s}{E_c A_c + E_s A_s} \int_0^t \tau_a \frac{ab}{(a+t-\tau)^2} d\tau \dots\dots\dots (21)$$

ここにτ_{a0}は⑨式で表わされるものでτ_aはx点に於けるt=tのときの附着応力を表わしている。

今τ_aがxだけの函数X(x)とtだけの函数T(t)の積で表わされるとすると⑳は

$$X(x)T(t) = \frac{Pl_0 U k(x-1)}{k \left(1 + \frac{A_s E_s}{A_c E_c} \right) \left\{ l + \frac{1}{Uk} (e^{-Ukl} - 1) \right\}} - \frac{E_c A_s}{E_c A_c + E_s A_s} \int_0^t X(x)T(t) \frac{ab}{(a+t-\tau)^2} d\tau \dots\dots\dots (22)$$

④ "The Theory of Concrete Creep" by William R. Lorman ASTM. 1940
 ⑤ "Vom Kriechen oder Fliesen des erhaerteten Beton und seiner praktischen Bedeutung" by A. Hummel Zement 1935
 ⑥ "The Theory of Concrete Creep" Loc. cit, "Plastic Flow of Concrete under Sustained Load" R.E. Davis, H.E. Davis and J.S. Hamilton ASTM. 1934

そこで $X(x) = \frac{Pl_0 U k(x-1)}{k \left(1 + \frac{A_s E_s}{A_c E_c}\right) \left\{e + \frac{1}{Uk} (e^{-Ukl} - 1)\right\}}$

とおくと、②式は簡単になつて

$$T(t) = 1 - \frac{E_c E_s A_s ab}{E_s A_s + E_c A_c} \int_0^t \frac{T(\tau)}{(a+t-\tau)^2} d\tau \dots \textcircled{2}$$

となり、これは第二種ボルテラの積分方程式である。

以上の結果からみると、 τ_a の値は x のみに関係する項と t のみに関係する項との積で表わされる結果、 τ_a の分布形は x 方向には τ_{a0} と相似形をなして t と共に減少してゆくことがわかる。

②の解析的なうまい解がみつからないので数値積分によつてとくことにした。

数値計算例

④例の多数値として

$$b = \frac{0.00036}{42} = 0.00008571$$

$$a = 40 \text{ 日}$$

$$A_s = 0.212 \text{ cm}^2 \text{ (3mm の鋼弦 3本)}$$

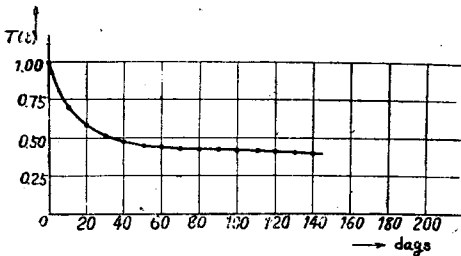
$$A_c = 2 \times 10 = 20 \text{ cm}^2$$

$$E_s = 210000 \text{ kg/cm}^2 \quad E_c = 300000 \text{ kg/cm}^2$$

とすると $\frac{abE_s A_s E_c}{E_c A_c + E_s A_s} = 7.100$

となる。これに対する値は 図-5 である。 $t=80$ 日で大体一定値に近づいていることがわかる。

図-5

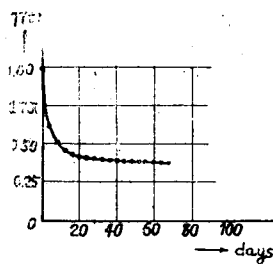


$a=10$ として、他の

値は前と同様にして求めたのが 図-6 で、前と比較して終局の値は殆んど変化していないで、ただ一定値に近づき方が $a=40$ とし求めたより急で $t=20$ 日で大体一定値になつてしまふことがわかる。これによると、終局の値は a には無関係で他の b, E_s, \dots 等に左右される事が結論される。

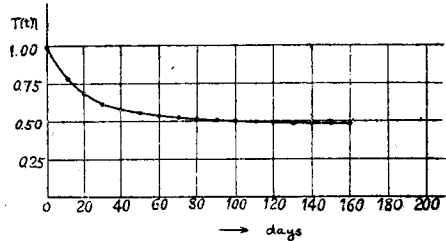
次に $abE_s A_s E_c / A_s E_s + A_c E_c = 50$, $a=40$ 日とした

図-6



場合の計算結果は 図-7 である。この図でも $t=80$ 日で大体一定値になつて来ており、唯、この終局の値は前の $a=40$ 日 $abE_s A_s E_c / A_s E_s + A_c E_c = 71$ に比して大きくなつている。即ちクリープによる影響が小さい事がわかる。

図-7



我々が最もほしいものは終局値であるが、この値は厳密ではないが次の様にして求めることが出来る。今 $T(t)$ を t に関係して減少する項 ($t=t_0$ までの区間) と t に無関係に一定値になる項 (t の大きい間、而してこの一定値が求めたい値であるか) とに分けて考えると、前者の積分は $t \rightarrow \infty$ まで観測すると 0 になつて来るに反して後者の積分は

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_s A_s E_c ab}{E_c A_c + E_s A_s} \int_{t_0}^t \frac{T}{(a+t-\tau)^2} d\tau \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_c A_s E_s b T_0}{A_c E_c + E_s A_s} \int_{t_0}^t \frac{1}{(a+t-\tau)^2} d\tau \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_c A_s E_s ab T_0}{A_c E_c + A_s E_s} \frac{t-t_0}{a(a+t-t_0)} = \frac{E_s A_s E_c T_0 b}{E_s A_s + A_c E_c} \end{aligned}$$

ここに T_0 は $t \rightarrow \infty$ に於ける $T(t)$ の値である。

依つて②式は $T_0 = 1 - \frac{E_s A_s E_c b T_0}{E_s A_s + E_c A_c}$

$$T_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{E_c} + \frac{A_c}{E_s A_s}} b} \dots \textcircled{24}$$

②からみると T_0 の値は b と逆数関係になつている。即ち b が大きいと、云いかえれば、クリープ量が大い場合には残留する附着応力も小さくなる事を示している。特に $b=0$ のときには $T_0=1$ となり、クリープによる影響が全くなくなる。それ故に残留応力を大きくするためには、 b の小さいもの或は②式中の b の係数の分母が大きくて、分子の小くなる様に、例えば A_c を大きくして A_s を小さくするか、 E_c のなるべく小さいコンクリートを使えばよいことになる。但し E_c が小さいと、 $X(x)$ が小さくなるから全体としてはそれほどの利益はないことになる。

6. 結言

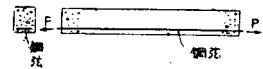
以上はプレストレスドコンクリートの中心に鋼弦を入れプレストレスを与えた場合について Lorman の

クリープ式及び Building Research Board の附着に対する考え方を拡張して得たクリープについての一般解析であつた。この結果からすると、コンクリートの断面積が大きい方が有利になつてゐるし、或る数値を与えてやつた計算の結果ではクリープによる残留応力が 40~50% になつてゐる。これは与えられた σ の値が R.E. Davis が配合は 1:5 (重量配合比) で 28 日間湿砂中で養生したものについて行つた実験から得た値であるので、鋼弦コンクリートに使用する。コンクリートに比較して配合がわるく、そのためにクリープが大きくなる結果を得たものと考えられる。配合さえよければ残留する応力も更に大きくなるものと思われるが、これに関する Data が不足しているので、こ

ゝで数値的に説明することは出来ない。

これ等の結果によると、クリープ量の小さいコンクリートを使用しさえすれば(勿論これを小さくすることは材料としてのコンクリートの研究で或程度わかつてゐる)プレストレストコンクリートのクリープは大して心配がない事が判つた。尚残留応力が一定値に到達する時間は大体 α の 2~3 倍位である。尚下側に鋼弦を入れた場合(図-8 参照)のプレストレストコンクリートのクリープについては別の機会に発表するつもりである。

図-8



本研究は文部省科学研究費の補助による研究であることを記すと同時に、たえず御指導をいただいた本学福田教授、岡本教授に深謝する次第である。

7) Flow of Concrete under Sustained Compressive Stress' by R. E. Daviz and H. E. Dasis ASTM 1930

宇野—高松間客貨航送設備工事について

正員 石 田 一 郎*
村 田 良 平**
正員 富 田 善 明***

CONSTRUCTION OF THE UNO-TAKAMATSU FERRY FACILITY.

(JSCE Dec. 1950)

Ichiro Ishida C.E.Member, Ryohei Murata, Yoshiaki Tomita C.E.Member.

Synopsis Authors report the construction work to improve the facility of ferry transportation of passengers and freights, which made at Uno in 1948.

第1章 前おき

宇野高松の貨車航送設備は一部施工中に終戦となつたが戦後再着工に決定した。大型船3隻は逸早く就航したが之が着船並びに脊面設備は漸く 23 年6月着手許可となり、以後昼夜兼行僅々7ヶ月余にしてベース1基及び之に附随する脊面設備を完成し、翌 24 年3月1日より使用を開始した。之の完成により1日最大輸送能力は、旅客に於て13500人(1.9倍)、貨車航送に於て250車(1.4倍)に増加、格段に経済的で且つ快適安全なものとなつた。

今次の工費は竣功当時に換算し、大型船3隻建造費4.38億円、土木其他で2.9億円、(宇野側1.5億円、高松側1.4億円)である。又主要資材は宇野高松を合して、鋼材1700t、セメント3000t、木材12000石

労務者34万人を要した。

引続き第2ベース及び宇野側に於ける岡山縣當岸壁継承使用のための代替施設を施行中で、前者は昭和29年度、後者は昭和30年度に竣功の予定である。

表-1 昭和23年度施行工事工程表

工事名	金額	工 程												備考		
		5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4			
岸壁基礎	13,326,172.85															基礎
岸壁上部構造	13,742,482.85															構造物
陸上設備	6,784,432.69															
浮橋架設	4,163,078.78															
浮橋基礎	9,554,027.19															
浮橋橋脚	4,357,647.34															
陸上設備	1,428,162.87															
陸上設備	1,182,853.97															
浮橋架設	1,883,453.20															
官舎其他	2,086,721.23															
浮橋架設	486,428.39															
第一ベース護岸	1,613,381.27															
代償施設	1,021,204.43															
附帯電気	5,268,313.98															
第二ベース圍堰	5,451,231.13															
工事附帯費	17,284,887.19															
合 計	138,721,355.20															

* 国鉄広鉄岡山工事事務次長

** " " "

*** " " "