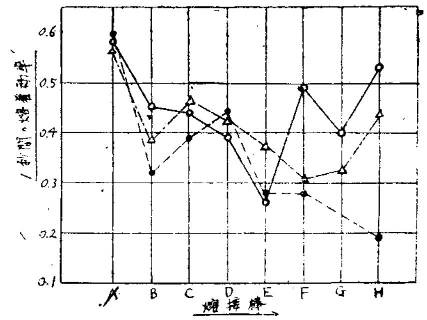
得る事に成功した。破断面，最大荷重時の撓ミ等に於て

図—9 熔着効率＝1秒間の熔着量／1秒間の熔融量



国鉄の規格に合格する値が得られた。

IV. 結　び

図—8 に見られる様に1，2の例外はあるにしても国産棒は交流が良い結果を示している。これは我が国の歴史的事実を示すものとして面白い事実である。特に，日本に於ける優秀製品と称せられる神戸製鋼 B—17—B—が，交流に於てアメリカ製品に比較的匹敵している事は，その延性と合せて考える時，注目に値する。

直流熔接が交流熔接に比較して，熔接作業の点で有利である事，アメリカ製の棒で直流の亀裂感度の値が僅かにすぐれている事，又此はガス被覆棒で可能となる事とを考え合せる時，我が国に於ても，かゝる棒の製作が盛んになる事が望まれる訳であり，現場よりの要求が，此の氣運を高めるに役立つものである事を強調したい。

尚この研究は文部省科学研究費に依る研究の一部であり，東大第一工学部仲教授の御教示に依るものである事を記し感謝したい。

参 考 文 献

1) 昭和 24 年土木学会年次大会・奥村敏恵「熔接直後の収縮応力に及ぼす表面輻射及冷却速度の影響」尚その基礎式は熔接学会誌第 17 巻第 3 号「薄鋼板の熔接に依る熱応力」
2) 仲威雄「熔接の収縮と亀裂」（小峰工業出版所）
3) R.D. Stout, S.S. Tör, L.T.McGeady & G.E. Doan : Quantitative Measurement of the Cracking Tendency in Welds—Welding Journal Sept. 1945. 尚，此は筆者がサイエンスダイジェスト，土木建築 C.A.Vol. Ⅱ. No.2. に紹介した。
4) American welding Society: Standard Specification for welded Highway and Railway Bridges 1948.
5) Otto Graf: Eigung der Stähle für geschweiszte Tragwerke V. D. I März 1050 (Bd 92. Nr.8)
6) M. Farman: New Factors to be considered in the Design and Welding of Ships. Welding Journal Sept. 1948.
7) Harry. W. Pierce, Vice President of American Welding Society の熔接学会での座談会と講演会—1947 年秋
8) A. W. S & A.S.T.M: Tentative Specifications for mild steel arc-welding electrods. 1948. 東大仲教授が水道協会雑誌，184 号（昭. 25—2）にその解説を行つている。

レールのねじれの理論について

正員　八 十 島 義 之 助*

ON THE THEORY OF RAIL TWISTS

(JSCE Nov. 1950)

Yoshinosuke Yasoshima, C.E. Member

Synopsis: The author computed balance equations of rail twists, considering shearing effects in rail heads and bases. And he showed a numerical example. In order to compare the torque resistance, he proposed "Twist Indexes of Rails." At the last paragraph, he mentioned the mechanism of the twist propagation in rail joints.

要旨　敷設レールのねじれの式を剪断効果を考慮に入れた上で誘導し，それにもとずいて数値計算例を示した。次に，ねじれの大小を種々のレール断面ごとに比較する為にねじれ指数なるものを提案した。これはこがえりなどに対する抵抗性を示すものと考えられる。最後に，レール継目部に於けるねじれ伝達の機構に言及した。

前　　言

レールのねじれに関し外国に於ては S. Timoshenko[1]

* 東京大学第一工学部　助教授

が 1920 年頃 Westinghouse E.&M. Co. にて縦枕木理論に基き，又 E.Czitary が Wien にて横枕木理論に基いてそれぞれ理論的研究を行つている。前者は横枕木の為の修正を施さず，後者は剪断効果を殆ど無視している。それでは剪断効果を考慮し，しかも横枕木理論に基く理論式は如何なることになるか。[2]

一方，千秋氏，神谷氏並に S. Timoshenko に依り優れた実証的研究の成果が発表せられている。それらは室内かさもなければ特に設けられた試験車輛又は軌道での結果である。[3] いつぽう営業線路の敷設レールではどうか。以下述べるところは之等の疑問を解決せんとして行つた作業の報告である。

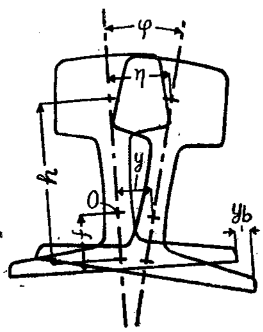
I　理論式誘導

1 レールに於けるねじれの基本式　レールの任意断面ではねじりモーメント M_T に関し次の平衡式が成立つ。

$$M-Qh=M_T \quad \cdots\cdots(1)$$

M: ねじり応力の合成モーメント，Q: 頭部及び底部の水平方向の剪断力，h: 頭部，底部の重心距離(図—1)

図—1 Fig.1



（1）式の左辺をねじり角 φ で書き直せば

$$C\frac{d\varphi}{dx}-\frac{C}{\alpha^2}\frac{d^3\varphi}{dx^3}=M_T \quad \cdots\cdots(2)$$

但し

$$\alpha=\sqrt{\frac{C(I_1+I_2)}{Eh^2I_1I_2}}$$

C: レールのねじり剛性，x: レール軸方向座標，I_1, I_2: レール頭部，底部の鉛直軸に関する断面2次モーメント，E: レール鋼の弾性係数。

（2）式の一般解は，

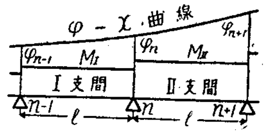
$$\varphi=\frac{C_1}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{C_2}{\alpha}e^{-\alpha x}+\frac{M_T}{C}x+C_3 \quad \cdots\cdots(3)$$

C_1, C_2, C_3: 積分常数

（3）式がレールに於けるねじれの基本式である。

2 横枕木上のレールの単純ねじれ基本式　等間隔 l の可動支承上にレールが連続梁として載る場合を考える（図—2)。隣接する2支間，I 及び II 支間に於ては各々（3）式が成立ち，しかも支点 n にて，φ, $d\varphi/dx$, $d^2\varphi/dx^2$ が等しい。一方レール頭部は腹部を媒体として弾性的，連続的に支承されていると考えられるから I 及び II 支間を通じてクラペイロンの三力モーメントの定理も成立つ。之等の関係に基いて（3）式を整理すると，

図—2 Fig.2



$$\varphi_{n-1}-2\varphi_n+\varphi_{n+1}=(M_{\mathrm{I}}-M_{\mathrm{II}})F \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

但し

$$F=-\frac{l}{C}+\frac{1}{\alpha}\left[\frac{(15\alpha^2l^2-180)\sinh\alpha l}{(\alpha^2l^2-60)\cosh\alpha l+8\alpha^2l^2-120}\right]$$

符号は図—2 参照

（4）式が横枕木上のレールの単純ねじれの基本式である。

3 横枕木上のレールの横移動基本式[4]　等間隔 l の可動支承にレールが連続梁として支持される場合は次の両式が成立つ。

$$Mb_{n-1}+4Mb_n+Mb_{n+1}=-\frac{6EI}{l^2}(y_{n-1}-2y_n+y_{n+1}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$lp_n=Mb_{n-1}-2Mb_n+Mb_{n+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

但し Mb_{n-1}, Mb_n, Mb_{n+1}: 支点 ($n-1$, n, $n+1$) に於ける水平面内のレール曲ゲモーメント，y_{n-1}, y_n, y_{n+1}: 支点（同上）に於けるレールのねじり中心 O (図—1)の横移動，p_n: 支点 n の水平横反力，I: レール断面の，対象軸に関する断面2次モーメント。

4 横枕木上のレールのねじれ及び横移動の合成変移の基本式　レールには各種の変移が同時に生じるが横移動とねじれは次式の関係により束縛される（図—1)。

$$y_{bn}=y_n-f\varphi_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

但し y_{bn}: 支点 n に於けるレール底面の横移動量，f: ねじり中心とレール底面の距離。

レール支承体はレールの横移動，ねじれに対しそれぞれ変移に比例する横反力並に反偶力を生じるものと考え，その比例常数を K'，K とすると次式が成立つ。

1) この場合「ねじれ」とは，レール軸の直交平面内でのそれの回轉を謂う。

2) S. Timoshenko: Method of Analysis of Statical and Dynamical Stress in Rails: Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics, Sept. 1926.
E. Czitary: Beitrag zur Berechnung des Quellschwellenoberbaues; Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Nov, & Dec. 1938
尚我國に於ても既に下記のものにレールのねじれ理論は取上げられている。
土木工學ポケツトブツク編纂會編：土木工學ポケツトブツク 昭，11.9，第 27 編　鐵道保線．第4章　軌道負擔力と車輛の安定（堀越博士執筆擔當)

3) 千秋邦夫：軌條に作用する横壓力　土木學會誌，昭，16，8
神谷修作：車輪に依り軌條に與えられる側壓力の一試驗：土木學會誌論文集，昭 22.6. S. Timoshenko：前揭論文。

4) 此の場合「横移動」とは水平面内に於けるレールに直角な方向の移動を謂う。

$p_n=K'y_{bn}$ ……………(8)

$m_n=K\varphi_b$ ……………(9)

但し　m_n：支点 n に於ける反偶力

（4）～（9）式より φ に関する式を求めると，

$$\chi_1\varphi_{n-3}+\chi_2\varphi_{n-2}+\chi_3\varphi_{n-1}+\chi_4\varphi_n+\chi_3\varphi_{n+1}+\chi_2\varphi_{n+2}+\chi_1\varphi_{n+3}=0 \quad \cdots\cdots(10)$$

$\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\ \chi_4=f(K',\ K,\ F,\ f,\ l,\ EI)$

之が横枕木上のレールの横移動をも考慮したねじれの基本式である。

5 基本式の一般解　基本式（10）式は6階の階差方程式でしかも同次対称形をなし厳密解を求めることが出来る。[6] 更に簡略化する為に $K'=\infty$ と考える。即ちレール底面は枕木上で横移動をせぬ事を意味し，厳密には事実に一致しないが従来若干の文献にては此の考えに基いて議論が進められていた。扨て（10）式にて $K'=\infty$ とすると，

$$\varphi_{n-2}+\psi_1\varphi_{n-1}+\psi_2\varphi_n+\psi_1\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2}=0 \quad \cdots\cdots(11)$$

但し　$\psi_1,\ \psi_2,=f(K,\ F,\ f,l,\ EI)$

（11）式の一般解の型は軌道状態を現わす変数 $K,\ F,\ f,\ l,\ EI$ の如何に依り変化するが，いずれにせよ実数形に直すと次の2種類となる。

$$\varphi_n=\rho_1{}^n(C_1\cos n\zeta+C_2\sin n\zeta)+\rho_2{}^n(C_3\cos n\zeta+C_4\sin n\zeta) \quad \cdots\cdots(12)$$

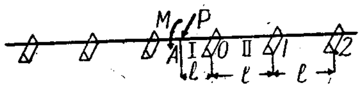
$$\varphi_n=C_5\beta_1{}^n+C_6\beta_2{}^n+C_7\beta_3{}^n+C_8\beta_4{}^n \quad (\beta:\text{実数}) \quad \cdots\cdots(13)$$

但し　$\rho_{1,\ 2},\ \zeta,\ \beta_1\sim\beta_4=f(K,F,f,l,EI)$

$C_1\sim C_8$：階差常数

6 枕木間隔中央 A に横荷重 P と偶力 M を受ける場合　実際の敷設レールに車輛荷重が加わるとレール断面のねじり中心 O に対し横荷重 P が加わると同時に偶力 M も作用する事になる。そこでレールの枕木間隔中央 A に之等の外力が作力する場合の境界条件

図—3 Fig. 3



を求める。図—3 の如く荷重点 A より最初の支承点迄の $l/2$ の距離を I 区間，次の支承点迄を II 区間としてその各々に（3）式を導入し，前2～4項に於けると同様の處理を施すと次の3式が成立つ。

$p_0=\tau_1\varphi_0-\tau_2\varphi_1-(\tau_3M/2C)$ ………(14)

$5Mb_0+Mb_1=[6EI(y_0-y_1)/l^2]-(3lP/8)$ ………(15)

$\tau_4\varphi_0+\tau_5\varphi_1+\tau_6\varphi_2+\tau_7\varphi_3=(-P/8)-(\tau_8M/2C)$ ………(16)

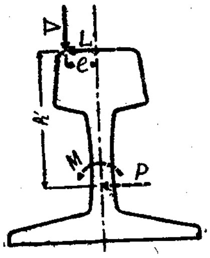
但し　$\tau_1\sim\tau_8$：$f(K,\ f,\ l,\ C,\ a)$

尚荷重点 A に於けるねじれ Φ とねじり中心 O の横移動 Y も以上の結果より計算出来る。

II 数値計算例

レールは 50 瓩3種，$l=65$cm，枕木材の圧縮弾性係数に基く概算に依り $K=10^6$kg.cm とする。レール断面に就ては図解に依り $I_1=89\text{cm}^4$，$I_2=285\text{cm}^4$，$h=11.25$cm とする。レール鋼の性質としては $E=2.1\times10^6\text{kg/cm}^2$ とする。尚ねじり剛性Cはねじり係数 Ip とレール鋼の剪断弾性係数 G の積とし，前者は Griffith & Tailor の図解法[5]に依り 212cm^4，後者は $8.1\times10^5\text{kg/cm}^2$ とする。之等の値を上述の諸式に代入し基本式（1）式の一般解を求めると（13）式の形をとり次のようになる。

図—4 Fig. 4



$$\varphi_n=C_2\times0.544^n+C_3\times(-0.212)^n \quad \cdots\cdots(17)$$

此の式の C_2，C_3 は荷重により定まる。そこで図—4 の如く鉛直荷重 V と横荷重 L がレール頭部の1点（対称軸より e の距離の点）に作用するとする。之に依りねじり中心 O に働く外力は，

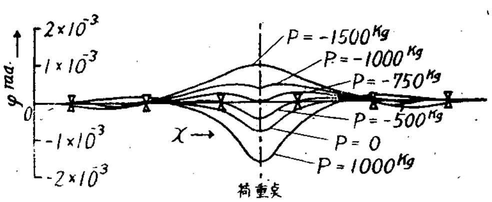
$P=L$ ……………(18)

$M=Lh'+Ve$ ……………(19)

但し　h'：ねじり中心と荷重点間の鉛直距離。

茲で鉛直荷重 V は一定の 6 000kg とし，横荷重 L は −1 500kg より +1 000 kg の間を変動するものとして計算する。それより定まる C_2，C_3 を用いて φ を求め，その結果を図示したものが図—5 のねじり曲線図である。此の結果は，特定の軌道構造と，限られ

図—5 Fig 5



た荷重条件の下に得られたのだから，ねじれの全貌を直ちに窺う訳には行かぬが，其の特徴を述べると，

i)　ねじれはこの場合沈下などに較べると非常に局所的である。（$K'=\infty$ なる仮定に依るのと考えら

5) A.A. Griffith & G.I. Tailor: The use of soap film in solving torsion problems: Engineering, Dec. 1917

れる）

ii）荷重点に於てねじれは連続的である。（物理的条件として始めに考慮した）

iii）ねじり曲線には変曲点が有り，しかも正負両方向にまたがることがある。

iv）$d\varphi/dx$ の最大値は荷重点より若干離隔した位置に生じる。

v）ねじれ量の絶対値の最大値は必ずしも荷重点に生じない。

vi）荷重点に於けるねじれの方向はねじりモーメント，横荷重の方向とは必ずしも一致しない。

以上の内（ii）～（v）は剪断効果を考慮に入れた為の結果である。

III レールのねじれ指数

側圧のために軌間がひらいて車輛がおちこみ脱線をしたり，大きな側圧の反復のためにレールにこがえりが生じたりするのは，前述の K, K' に代表される枕木道床などの性状にもよるが，レールそのものによるところも小さくない筈である。そして，つまるところ，ねじれやすいかどうかを単純な尺度で示すことが出来たならば，そのレールのねじれ特性，ひいては脱線やこがえりに対する抵抗性が判定し得る訳である。

材質上の点は今は無視することにするが，それにしても一義的にこの特性をいいあらわすのが困難であるのは，今までに述べて来た考え方からも容易に想像がつくが，著者はあえてそれを超越して，ここにねじれ指数として次のものを考えて見たい。

レールの剪断効果を無視すれば，そのねじり剛性を以て一つの指数とすることが出来るが，それはさけて前述した考え方から進みたい。そこで，両端固定のレールの中央の頭部に横荷重 L が加わり，それによりその点が φ_0 だけねじれたとする。その φ_0 と L の関係を（3）式から求める。それには一般解たる（3）式に次の境界条件を入れれば良いことになる。

$x=0: d\varphi/dx=0$

$x=l: \varphi=0,\ d\varphi/dx=0$

かくして，単位の φ_0 を生じるにはいかほどの L を加えたら良いかを算出し，それを以てそのレールのねじれ指数とする訳である。つまり，ねじれ指数は大きい程ねじれにくいことになる。

この考え方で現存のレールのねじれ指数を求めたものが表-1である。同時にこの計算に用いたねじれ係数も附記する。

表—1 Table 1

レール種別	ねじれ係数 cm^4	ねじれ指数
50 瓩 3 種（P. S 型）	212	5.43
50 瓩 2 種（R. E型）	208	5.46
37 瓩	102	3.40
30 瓩	66	2.38

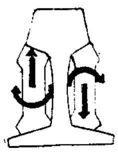
上表に於て，ねじれ係数に於て 50 瓩 R・E 型にまさつている P・S 型がねじれ指数に於て劣つているのは，レールの鉛直軸に関する断面2次モーメントが小さい為である。

IV レール継目に於けるねじれの伝達

継目部に於ても，ねじれは連続的に伝達されなければいけない。そこで，継目鈑のねじれの機構はどうだろうか。

継目鈑自体は，短册型のように単純な断面形状をしているものもあり，又 Continuous 型のように複雑なものまで有るから，おのおのに適した考え方をしなくてはならないが，それはそれとして根本に於ては，図—6 のように，継目鈑自体のねじれのみならず，2枚の継目鈑の位置にもとずき，鈑内に作用する剪断効果をも合せ考えなくてはいけないことは，（1）式にあらわされたレール自体の場合と同じであると考えられるのである。

図—6 Fig.6



V 結　　語

鉄道軌道と云う複雑な構造物を取扱うのに，可成り簡略化した単純な条件のもとで式を誘導した。しかし，軌道構造に於けるこうした見方も決して無意義なものではないだろうし，又現在未だに解決のつかない軌道構造の問題の或る物もこのような点から把握し得るのではないかと考える。なおねじれに関する実測結果も得られているが，それは時をあらためて報告する。

おわりに，本研究に於て終始御指導を仰いだ沼田教授に深甚の謝意を表する次第である。

6）階差方程式の参考書，並びに軌道理論への応用としては次の文献を参照した。
　藤田武雄：差分法，河出書房。
　小野一良：軌道應力計算法の一考察，業務研究資料 24—15，昭11—6。
　若林 正：軌道應力計算法，施設局保線課，昭19—4。