報　文

"土の塑性理論" に対する COENEN 博士の討議に答う (要旨)

正員 工学博士　星　埜　和*

DR. COENEN'S DISCUSSION ON "A FUNDAMENTAL THEORY OF PLASTIC DEFORMATION AND BREAKAGE OF SOIL" AND AUTHOR'S DISCUSSION. (ABSTRACT)

(JSCE Nov. 1950)

Kanoo Hoshino, Dr. Eng. C.E. Member

Synopsis Author's energy theory of plastic deformation and breakage of soil (1) was discussed in detail by Dr. P. A. Coenen (2), being concluded that theory must be abandoned on the ground of its contradictory characters. This article explains briefly Dr. Coenen's viewpoints and author's discussion.

要旨　著者の塑性理論 (1) に対しオランダの P. A. Coenen 博士が詳細な討議 (2) を寄せられた。本文は博士の見解とそれに対する著者の討議の要旨である。

I. Coenen 博士の討議要旨の紹介

II. 著者の討議

(1) Kanoo Hoshino: "A Fundamental Theory of Plastic Deformation and Breakage of Soil." Proceedings of the Second International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Ie 10, Vol. I, P.P. 93～100. (1948)

星埜和：土のような塑性材料の変形と破壊についての基礎理論，土木学会論文集第4号，頁 89～100，昭和24年7月

(2) P. A. Coenen: "Discussion on Paper Ie10." Ivid., Ie24. Vol. VI, P.P. 62～67.

I. Coenen 博士の討議要旨の紹介

1. 応力と歪の関係式の積分可能性について

塑性材料の微少変形に対し，弾性理論の基本式が適用できるとすると，応力と歪の関係式は次の通り。

$$
\begin{aligned}
d\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\{d\sigma_1-\nu(d\sigma_2+d\sigma_3)\} \\
d\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\{d\sigma_2-\nu(d\sigma_3+d\sigma_1)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)^{1)} \\
d\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\{d\sigma_3-\nu(d\sigma_1+d\sigma_2)\}
\end{aligned}
$$

こゝに E：弾性係数，ν：ポアソン比

塑性変形に於て E, ν がともに常数でなく，応力の函数であると考えると，全微分の形と比較して得られる次式

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\sigma_1}=\frac{1}{E},\quad \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\sigma_2}=-\frac{\nu}{E},\quad \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\sigma_3}=-\frac{\nu}{E}\\
&\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\sigma_1}=-\frac{\nu}{E},\quad \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\sigma_2}=\frac{1}{E},\quad \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\sigma_3}=-\frac{\nu}{E}\\
&\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\sigma_1}=-\frac{\nu}{E},\quad \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\sigma_2}=-\frac{\nu}{E},\quad \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\sigma_3}=\frac{1}{E}
\end{aligned}
\right\} (2)
$$

に於て次の積分可能の条件(Condition of Integrability):

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\sigma_1}\right)&=\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\sigma_2}\right)\\
\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\sigma_1}\right)&=\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\sigma_2}\right)\\
\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\left(\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\sigma_1}\right)&=\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\sigma_2}\right)
\end{aligned}
\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)
$$

が満たされなければならないことから

$$\nu\frac{\partial E}{\partial\sigma_1}+\frac{\partial E}{\partial\sigma_2}=E\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial\sigma_1}+\nu\frac{\partial E}{\partial\sigma_2}=E\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_2}$$

$$\nu\left[\frac{\partial E}{\partial\sigma_1}-\frac{\partial E}{\partial\sigma_2}\right]=E\left[\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_1}-\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_2}\right]$$

を得る。始めの2式を差引き，第3式と比較すると

$$\frac{\partial E}{\partial\sigma_1}=\frac{\partial E}{\partial\sigma_2}\quad 及び\quad \frac{\partial\nu}{\partial\sigma_1}=\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_2}$$

でなければならない。上の第1式に入れると

$$(\nu+1)\frac{\partial E}{\partial\sigma_1}=E\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_1}\ 又は\ \frac{\partial\log E}{\partial\sigma_1}=\frac{\partial\log(1+\nu)}{\partial\sigma_1}$$

となる。これらの関係は他の応力の組についても成立つわけであるから，結局

* 東京大学教授，生産技術研究所兼第二工学部勤務

1) 原論文の式 (1)，Coenen 討議文の式 (2)

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial E}{\partial\sigma_1}=\frac{\partial E}{\partial\sigma_2}=\frac{\partial E}{\partial\sigma_3}\\
&\frac{\partial\log E}{\partial\sigma_1}=\frac{\partial\log(1+\nu)}{\partial\sigma_1}\\
&\frac{\partial\log E}{\partial\sigma_2}=\frac{\partial\log(1+\nu)}{\partial\sigma_2}\\
&\frac{\partial\log E}{\partial\sigma_3}=\frac{\partial\log(1+\nu)}{\partial\sigma_3}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)
$$

でなければならない。これから結論として

E は $\sigma_m=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$ の函数でなければならない。又 ν と E との間に，α を常数として

$\nu=\alpha E-1$

の関係が成立たなければならない。

従つてこれらを式（1）に入れると

$$d\varepsilon_1=\frac{3d\sigma_m}{E(\sigma_m)}-\alpha(d\sigma_2+d\sigma_3)$$

$$\therefore\ \varepsilon_1=3\int\frac{d\sigma_m}{E(\sigma_m)}-\alpha(\sigma_2+\sigma_3)\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

ε_2, ε_3 についても同様な式を得る。積分可能の場合はこれ以外にないことになる。

著者星埜の理論に於ては，E が σ_m だけでなく τ_m[2] をも含む形

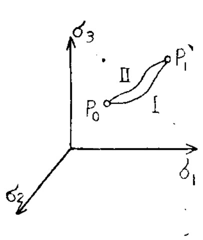
$$E=\frac{\sigma\mu^2}{3+2\mu^2}\,\frac{\nu_0}{\sigma_0}\sqrt{\sigma_m{}^2-\left(\frac{\tau_m}{\mu}\right)^2}\ \cdots\cdots\cdots(6)^{2)}$$

で表わされており，かつ ν は E に無関係に一定な常数としているから，この理論が積分可能の条件を満していないことは明かである。

著者は応力を一つの変数として式を解いているが，もし二つ又は三つの別々な変数として解を求めようとすると解が得られないことに氣が付いたことゝ思う。

積分可能の条件は次のような物理的意味を持つている。σ_1, σ_2, σ_3 を座標軸とする σ— 空間（図—1）に於て，A_1, A_2, A_3 がそれぞれ σ_1, σ_2, σ_3 の函数であるとし

図—1



$$A_1d\sigma_1+A_2d\sigma_2+A_3d\sigma_3\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

で表わされる量を，空間の一点 P_0 から P_1 まで積分すると，積分の経路に関係なく一定した解を得る条件として，次の諸式が得られることが証明できる（証明略）。

$$\frac{\partial A_3}{\partial\sigma_2}=\frac{\partial A_2}{\partial\sigma_3},\quad\frac{\partial A_1}{\partial\sigma_3}=\frac{\partial A_3}{\partial\sigma_1}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial\sigma_1}=\frac{\partial A_1}{\partial\sigma_2}\qquad(8)$$

式（7）の条件が満たされゝば，式（6）の量は σ_1, σ_2, σ_3 の値の各組に対して唯一つずつきまり，積分の経路のいかんによらない。物理的な云い方をすると，状態を表わす函数が経過の歴史に無関係であるためには，積分可能の条件を満たさなければならないことになる。

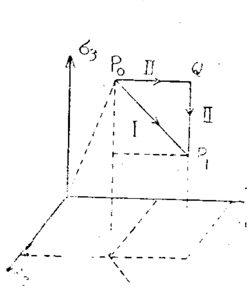
前述の歪を求める式はちようど式（7）の形であり式（3）は式（8）の条件の一つに当る。

又歪をうけている物体の単位容積内に於ける歪エネルギーは

$$dA=\sigma_1d\varepsilon_1+\sigma_2d\varepsilon_2+\sigma_3d\varepsilon_3\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)^{4)}$$

で与えられるから，$d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ が積分可能でない限り歪エネルギーも又積分可能でない。即ち応力の函数としての歪エネルギーを仮定することはできない。この点に於ても星埜の理論は誤つている。

図—2



歪み量計算の一例をあげると，二次元純粋剪断の場合（図—2, I）に破壊時の歪み量は，$\frac{1}{\mu^2}=2$, $\left(\nu=\frac{1}{8}\right)$ と仮定すると，$2.35\frac{\sigma_0}{\nu_0}$ であるが，まず圧縮応力を加え，次に之に直角に引張応力を加えて同じ応力状態とした時（図—2, II）歪み量は $1.20\times\frac{\sigma_0}{\nu_0}$ となつて，結果が一致しない。

2. 歪エネルギーと破壊の條件について

著者の理論によると，歪エネルギーは始めの状態 $P_0(\sigma_0,\sigma_0,\sigma_0)$ 及び終りの状態 $P_1(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ に於てそれぞれ，

$$A_0=\frac{3\sigma_0{}^2}{\nu_0}$$

$$A_1=\frac{3\sigma_0}{\nu_0}\sqrt{\sigma_m{}^2-\frac{1}{\mu^2}\tau_m{}^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)^{5)}$$

と仮定している。この式から

---

2) τ_m は平均剪応力で，

$$\tau_m=\sqrt{\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2\right.}$$

原論文式（5）参照

3) 原論文式（15）の E に式（13）の ν を入れたもの

4) 原論文式（4）の原形，Coenen 討議文の式（19）

訂正：原論文式（4）中

$dX_g=\frac{3d\tau_m{}^2}{2G}$, $\quad dX\nu=\frac{3d\sigma_m{}^2}{2\nu}$ とする。式（6）も，式（9）も同様。

5) 原論文式の（11）

6) 原論文式の（15）

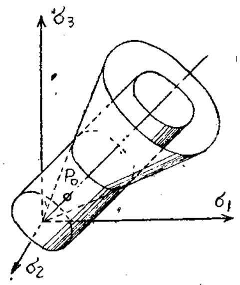
$$dA=\frac{3\sigma_0}{2\nu_0}\frac{d\left(\sigma_m{}^2-\frac{1}{\mu^2}\tau_m{}^2\right)}{\sqrt{\sigma_m{}^2-\frac{1}{\mu^2}\tau_m{}^2}}$$

を得る。これを式（6）と $\frac{1}{\mu^2}=\frac{4(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$ [6] によつて書き改め，式（9）に式（1）を代入したものと比較すると，計算の結果，

$$d\tau_m{}^2=0 \;\therefore (\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=C^2$$

なる条件式を得る。これは $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ を軸とする。円壔面を表わす（図―3）。一般に P_0 と P_1 が何れもこの円壔面上にあることはできない。

図―3



更に著者は破壊の条件として

$$A=0$$

$$\therefore\; \tau_m{}^2=\mu^2\sigma_m{}^2 \quad\cdots\cdots\cdots(11)^{7)}$$

とおいており，破壊点は

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=\frac{4}{3}\mu^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

で表わされる円錐面上にあることになるが，（図―3）前述の通り A の値は経路によつて変り，0 になり得ない。こゝに理論の矛盾が明かに指摘され，その不成立を証明することができる。

計算例で示すと，二次元純粋剪断の場合に $\sigma_m=\sigma_0$ であるから

$$dA=\frac{3\sigma_0}{2\nu_0}\frac{\frac{1}{\mu^2}d\tau_m{}^2}{\sqrt{\sigma_0{}^2-\frac{1}{\mu^2}\tau_m{}^2}}$$

を積分して，初期条件を入れると

$$At=\frac{3\sigma_0}{\nu_0}\left[\sigma_0-\sqrt{\sigma_0{}^2-\frac{1}{\mu^2}\tau_m{}^2}\right]+\frac{3\sigma_0{}^2}{\nu_0} \quad(12)$$

となる。破壊点では根号内が 0 となり，歪エネルギーは，

$$A=\frac{6\sigma_0{}^2}{\nu_0}=2A_0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

となつて，0 とはならず，仮定と矛盾する。

終りに，積分可能の条件を満足する場合に式（5）を式（9）に代入して得られる歪エネルギーの式は，

$$A=\int\left(\frac{9}{2E(\sigma_m)}-3\alpha\right)d\sigma_m{}^2+2\alpha\tau_m{}^2 \quad\cdots\cdots\cdots(14)$$

二乗の形だけをとると，$E(\sigma_m)$ は常数でなければならない。$\alpha=\frac{1+\nu}{E}$ を用いると，上式は結局

$$A=\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_m{}^2+\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_m{}^2$$

$$0\leqq\nu\leqq\frac{1}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)^{8)}$$

となつて，弾性の場合によく知られている形にもどる。

これから見てもわかる通り，歪エネルギーが消滅して破壊を起すなどとは考えられず，著者が目的とするような土の塑性変形と破壊について新らしい理論を立てる余地は全く残されていないものと見なければならない。

II. 著者の討議

1. 応力と歪の関係式が積分可能でない点について

Coenen博士 は塑性体の応力と歪の基本式が積分可能の条件を満たすべきであると云う前提に立つて推論し著者の理論が成立しないことを断定しているが，この点はまず塑性歪が応力の経路又は歴史に無関係であるとの証明がなければならない。今日その当否を立証するだけの実験的事実はまだ不十分であると思われる。

Coenen 博士の討議によつて，著者の基本式は積分可能の条件を満たさないことが明かになつたのであるが，これは積分可能でない歪が認められゝば，著者の塑性理論が完全に成立つことを示したに他ならない。従つてその場合に歪は応力状態の経路によつて値を異にし，応力を 2 又は 3 の別々な変数と考えて解を求めることはできない。

著者はむしろ歪の積分可能な条件が弾性の場合には常に成立つが塑性の場合にはめつたに成立するものではないと考えている。著者の理論から求めた諸結果は原論文にも明かなように実験的事実とよく符合しておりこの見解を支持しているように思える。

Coenen 博士が求めている 2 条件，即ち E が σ_m の函数であることゝ ν は E と比例関係にあることから，不合理な結果が出てくる。E は応力―歪曲線の接線係数であるが，塑性論特に土質力学で欠くことの出來ない剪断応力に無関係であることは第一に肯けない点であつて，そのため，一定量の静水圧を加えた時と，その 3 倍量の単純圧縮応力を加えた時で E の値は等しくなることや純粋剪断の際に E は常数となることなどもとうてい起りそうもないことのように思われる。ν と E が直線比例するという条件も，E は極めて広い範囲に変り得る値を持ち，破壊の時は 0 になるが，ν はあまり変らない性質を示すことから，その妥当さが疑問視される。

著者の理論で計算した歪が積分の経過によつて変る

7) 原論文式 (16)

8) 原論文式 (6)

ことは明かであるが，例えばCoenen博士が指摘したように二次元純粋剪断の時と同じ大きさの圧縮応力と引張応力を前後して別々に加えた時では，後者の場合に前者では起らなかつた直応力が起つており，応力状態の経過が全く異なるのであるから，歪量も異つてくるのがむしろ当然であると云えよう。又別の場合には剪断応力が起つたかどうかによつて歪量が大きく影響されることもあり得るわけである。

著者の理論には歪が積分可能の条件を満たさないと云う制限が加わつたけれども，この制限は塑性体には殆んど適用されないから，理論の応用範囲を何ら狭めることにはならないと考えられる。

2. 歪エネルギーの積分可能性について

著者の理論は塑性変形と破壊を支配する主要因子として歪エネルギーを用いているので，それが積分可能性を持たなければ，理論として成立しないことになる。

Coenen 博士は歪 $d\varepsilon$ の積分可能性がないのだからそれを含む歪エネルギーも又積分可能でないと結論しているが，事実上歪エネルギーを応力の函数として求めることができるのであるから，この結論は誤つている。

念のため解析的に考察すると次の如くなる。

式（9）に（1）式を入れ，求まる式を

$$dA=\frac{\partial A}{\partial\sigma_1}d\sigma_1+\frac{\partial A}{\partial\sigma_2}d\sigma_2+\frac{\partial A}{\partial\sigma_3}d\sigma_3$$

とくらべて，次の諸式を得る。

$$\frac{\partial A}{\partial\sigma_1}=\frac{1}{E}\{\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)\}$$

$$\frac{\partial A}{\partial\sigma_2}=\frac{1}{E}\{\sigma_2-\nu(\sigma_3+\sigma_1)\}$$

$$\frac{\partial A}{\partial\sigma_3}=\frac{1}{E}\{\sigma_3-\nu(\sigma_1+\sigma_2)\}$$

第1式を σ_2 で，第2式を σ_1 で偏微分して，等しいとおくと，積分可能性の条件の一つとして次式を得る。

$$\frac{\partial E}{\partial\sigma_2}\frac{\partial A}{\partial\sigma_1}+\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_2}\frac{1}{\nu}\left(\sigma_1-E\frac{\partial A}{\partial\sigma_1}\right)=\frac{\partial E}{\partial\sigma_1}\frac{\partial A}{\partial\sigma_2}+\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_1}\frac{1}{\nu}\left(\sigma_2-E\frac{\partial A}{\partial\sigma_2}\right)\quad(16)$$

E を歪エネルギー A に比例するものとし，ν を常数とすると

$$\frac{\partial E}{\partial\sigma_2}\frac{\partial A}{\partial\sigma_1}=\frac{\partial E}{\partial\sigma_1}\frac{\partial A}{\partial\sigma_2}$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_2}=0,\ \frac{\partial\nu}{\partial\sigma_1}=0$$

となり，式（16）を満足することがわかる。他の応力の組についても同様になる。

つまり歪が積分可能でない場合でも，歪エネルギーは積分可能の条件を満すかぎり，応力の函数として求めることができることが証明される。

3. 歪エネルギーの物理的な意味とその新しい公式

弾性体の場合に歪エネルギーは式（15）で与えられる。即ち

$$A=\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_m^2+\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_m^2$$

本式によると歪エネルギーは性質を異にする二つの部分，即ち直応力のみに関係する項と剪応力のみに関係する項から成つていることが明かである。

弾性理論では普通，始めの状態で歪エネルギーは 0 であり，圧縮応力又は引張応力更に剪応力の何れが加わつても歪エネルギーは常に増すものと考えている。これは歪エネルギーが始めの状態から相対的に変化するが荷重をとつた時弾性変形を回復する反撥力として問題になるからである。

土質力学及び塑性理論では事情が全く異なる。塑性体は完全な弾性反撥力を示さないで，応力による歪エネルギーの一部は物体中に蓄えられて，見かけ上粘着力の増加になつて現われるように思われる。

粘土が形を保ち剪断に抵抗するのは粘着力 C があるためで，土質力学ではこれを内部圧応力 p_c でおきかえて

$$p_c=C\cot\phi\qquad\text{こゝに }\phi\text{ は内部摩擦角}$$

の形にすることが多い。又土を圧密したり締め固めたりすると密度を増し，粘着力が大きくなるが，これは弾性体では考えられないことである。

砂質土は乾いている時始め外力に対し何らの抵抗を示さないが，剪断箱に入れて圧縮すると相当大きな剪断抵抗を示す。外力を去ると元の状態に戻る。

これらの現象は土の中に蓄えられる歪エネルギーがその形を保ち，変形と破壊に抵抗する力を主として供給しているものと考えるとうまく説明できる。

一般に塑性体内のエネルギーは，例えばコンクリート中の結合力がセメントの化学的作用によるように色々な給源を持つと思われるが，土質力学に於ては，内部エネルギーは主に加わる応力の歪エネルギーであつて，残りの化学的その他不明の給源からくるエネルギーも換算圧応力又は内部圧力でおきかえて考えてよいものと思う。

従つて始め外力のない状態で形を保つている土はある量の歪エネルギーを蓄えており，その量は圧縮応力によつて増し，引張応力及び剪断応力によつて減るものとしEは変形の度合を支配する係数であるから歪エ

ネルギーの函数と考えることができる。

そこで土体中の歪エネルギーの少変化は，弾性理論のような和の形の代りに

$$dA=\frac{3(1-2\nu)}{2E}d\sigma_m^2-\frac{2(1+\nu)}{E}d\tau_m^2 \quad (17)^{9)}$$

で表わされなければならない。

$$E=\frac{E_0}{X_0}X,\ \nu:\ 一定$$

とし，初期条件として

$$X=X_0,\ \sigma_m=\sigma_0,\ \tau_m=0$$

とすると，積分によつて

$$A=\frac{3(1-2\nu)}{E_0}\sigma_0\sqrt{\sigma_m^2-\frac{4(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\tau_m^2}$$

となる。然るに常数の間に

$$\nu_0=\frac{E}{1-2\nu},\ \mu=\sqrt{\frac{3(1-2\nu)}{4(1+\nu)}}^{10)}$$

の関係があるから，代入すると，塑性体の歪エネルギー式として

$$A=\frac{3\sigma_0}{\nu_0}\sqrt{\sigma_m^2-\frac{\tau_m^2}{\mu^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(18)^{11)}$$

Coenen 博士は討議文の第6節に於て，著者の新しい式 (17) と従来の和の形の式を混合したため，必然的に

$$d\tau_m^2=0 \quad \therefore \tau_m^2=C^{12)}$$

と云う誤つた結論に達して，著者の理論が矛盾を含むかの如く誤解している。又同様に二次元純粋剪断の歪エネルギーを

$$dA=\frac{4(1+\nu)}{2E}d\tau_m^2$$

としたため，式 (12) の形になつて，破壊の際に歪エネルギーが0にならない結果を得た。

正しくは

$$dA=-\frac{4(1+\nu)}{2E}d\tau_m^2$$

とおいて，

$$A=\frac{3\sigma_0^2}{V_0}\sqrt{1-\frac{k^2}{2\mu^2}\ t^2}$$

破壊の際は $\tau_m=\mu\sigma_m$ なる条件から括弧内が正しく 0 になる。

4. 歪エネルギーの一般公式

第2節に於て式 (1) 即ち

$$dA=\frac{3(1-2\nu)}{2E}d\sigma_m^2+\frac{2(1+\nu)}{E}d\tau_m^2$$

に対応する式から出発して，歪エネルギーの積分可能性を示す条件式 (16) を得た。

然るに著者の塑性理論に於ては式 (17) から出発して，積分可能性の条件は

$$3\frac{\partial\nu}{\partial\tau_m^2}+\frac{\partial A}{\partial\sigma_m^2}\frac{\partial E}{\partial\tau_m^2}=2\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_m^2}+\frac{\partial A}{\partial\tau_m^2}\frac{\partial E}{\partial\sigma_m^2} \quad (19)$$

E を歪エネルギーの函数とおいて

$$E=f_E(A) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

とすると

$$\frac{\partial A}{\partial\sigma_m^2}\frac{\partial E}{\partial\tau_m^2}=\frac{\partial A}{\partial\tau_m^2}\frac{\partial E}{\partial\sigma_m^2}$$

であるから，式 (19) から

$$3\frac{\partial\nu}{\partial\tau_m^2}=2\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_m^2}$$

$$\therefore \nu=f_\nu(3\sigma_m^2+2\tau_m^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

従つて式 (17) から，歪エネルギーの一般公式として

$$2\int f_E(A)dA=3\sigma_m^2-4\tau_m^2-2\int f_\nu(3\sigma_m^2+2\tau_m^2)d(3\sigma_m^2+2\tau_m^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

を得，積分可能な形に導かれる。著者の理論では，

$$E=E(A)=\frac{E_0}{X_0}X$$

$$\nu=f_\nu(3\sigma_m^2+2\tau_m^2)=一定$$

としたが，前述の特別な場合に当つており，歪エネルギーは式 (22) から求められるものと等しい。

5. 要　約

(1) Coenen 博士の討議によつて明かにされたように，歪の積分不能性即ち歪が応力の歴史により異なる値を持つ性質は，著者の理論が誤つていることを立証するものではなく，それに適用の限度があることを示したものであるが，その限界は理論の適用範囲に実際上殆んど影響を与えないものと考えられる。著者は積分可能な歪は大体弾性理論にのみ当はまる条件だと思う。

従つて E を歪エネルギーに比例するものとし，ν を一定とする仮定には何等理論的な矛盾はない。著者の理論で求まる歪み量は応力の歴史で異なり，応力を2以上の別な変数と考えて解を求めることは不可能であり，又その必要を認めない。

(2) 歪エネルギーも又積分可能の限界を持つが，著者の理論はこの限界に適合している。歪が積分不能の形でも歪エネルギーは積分不能とは限らない。

(3) 塑性体が形を保つ力を持つのは歪エネルギーのためで，初期に物体内にある量の歪エネルギーがありこれが加わつた応力によつて増減するものと考えて，Eが歪エネルギーに比例し，ν が一定な場合の合理的な新しい歪エネルギー式を導いた。従来弾性理論で認められていた式と全く異なつた物理的意味を持つものでこれを導いたことによつて始めて，土のような塑性

9) 原論文式 (9) の變形
10) 原論文式 (2)，式 (15)
11) 原論文式 (11)
12) Coenen 討議式 (26)

体の変形や破壊の新理論を展開することができたのである。

(4) 塑性理論での歪エネルギーの一般解があることを本文中に式の形で示した。

河川の洪水調節計算法とその応用について

正員 金丸正春*

ON THE CALCURATING METHOD OF FLOOD REGULATION AND ITS APPLICATIONS

(JSCE Nov. 1950)

Masaharu Kanamaru, C.E. Member

Synopsis Self-regulative action of flood water between two positions of a river, can be calculated by using water gage records and observed values of discharge. But it is almost impossible, in general, to measure discharge of a river, when there is neither bridge, cables or other special equipments.

The auther proposed "The method of equivalent discharge triangles" to solve this problem in such cases.

In this paper he explains (1) this method, (2) application to the regulative action of dam and (3) regulation in a river course.

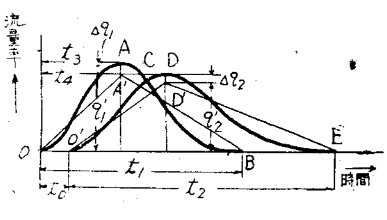
第1章 等量三角法

(1) 流出量 河川の1地点に於ける洪水流出量は複雑なる諸原因によつて河毎に，又一つの河でも地点毎に変化するものであつて，従つて或る地点に於ける流出量と時間との関係を表わす流出量曲線は，到底理論的に簡単な数式を以て表示することは出来ない。しかしながら，河川の量水記録と，精確なる流量観測から作製した流出量曲線は，以上の諸原因を綜合した結果を率直且つ厳格而も完全に表示するものであつて，貴重な実験値である。

(2) 河川の自己調節作用 河川上下流の2地点に於て洪水最大流量率が逓減する場合，この2地点に自己調節作用があると云い，増減のない場合は調節作用がないと云い，逆に逓増する場合は逆調節があると云う。2地点間の自己調節作用は2地点の流出量曲線を図—1の如く作製することによつて明らかにされる。

即ち OAB は上流地点，O′DE は下流地点の流出量曲線で何れも洪水期間中の水位記録や精確な流量測量の結果から作製したものとする。

図—1



曲線 OAB, O′DE の囲む面積は，夫々上下流地点の流出総量である。又C点は流量率の等しい点であり，2地点間に洪水の増減換言すれば滲透，蒸発，分流，合流，溢水（本堤よりの）貯水（洪水流下後河道内に残る静水）涌水，降雨，等が無い場合は2つの流出総量は相等しくなければならぬ。

従つて面積 OACO′＝同 BCDE である。

而してこの面積に等しい流出量の一部を Q とし，総流出量を $Q_1=Q_2$ とすれば Q は2地点間に於て貯流 (Retard) せられたもので $\lambda=\frac{Q}{Q_1}$ 又は $\frac{Q}{Q_2}$ を貯流比 (Retardation Ratio) と称することに定める。2地点間に調節作用がある場合には，下流の流出総時間 t_2 は上流の流出総時間 t_1 より大で，従つて最大流量率が逓減するのである。今上下流地点の流量率を q_1, q_2 とすれば

自己調節ある場合 $t_2>t_1$ 従つて $q_1>q_2$

〃 ない 〃 $t_2=t_1$ 〃 $q_1=q_2$

逆調節ある場合 $t_2<t_1$ 〃 $q_1<q_2$

の三つの場合が考えられるのである。

(3) 等量三角法 (Equivalent discharge triangular method) 河川の2地点に於て図—1の様に，流出量曲線を作ることは大河川では困難である。1地点で流量観測が出来るが他の地点では橋梁もケーブルもその他流量観測設備が地形上出来ない場合が普通である。この場合に2地点の調節作用を確定する手段として等量三角法を案出したのである。即ち等量三角とは「洪

* 元内務技師