

一般剛節構造物の解法及びその極限状態附近における性状について¹⁾ (要旨)

正員 工学博士 小西 一郎*

ON THE SOLUTION OF RIGID FRAMED STRUCTURES AND THEIR ELASTIC BEHAVIOR IN THE NEIGHBORHOOD OF THE CRITICAL STATE. (Abstract)

(JSCE Nov. 1950)

Dr. Eng., Ichiro Konishi C.E. Member

Synopsis In this paper, the universal fundamental equations necessary to calculate the deformations and member stresses of any plane rigid framed structure composed of straight members with constant cross sections, which are applicable to the neighborhood of the critical state, are derived, and the methods of solution of these fundamental equations are explained. At the same time, a consideration is made on the buckling and elastic failure of the rigid framed structures.

The procedures and the elastic behaviors are explained by examples of the calculations for specific trusses and vierendeel trusses.

1. 基礎方程式及びその解法

剛節構造物の実用解法については、既に多くの研究結果が発表されているがこれ等はいずれも、構造物が過荷重を受けて極限状態に近接した場合については、何等言及されていない。しかしながら構造物の極限状態附近における変形、応力について明確な認識を持つことは、構造物の本質を把握し、設計を合理化し又終極強度を確認する上に是非共必要である。このような極限状態附近にある構造物の解法は、場合により有限変位理論、塑性理論等によるべきものもあるが、我々の取扱う構造物については、要求せられる剛性、材料の強度等より考えると、変位の有限値を用いなくても極限状態附近迄の性状を解明することの出来る場合が相当に多いように考えられる。

本文は断面一定の直線部材よりなる一般平面構造物について、極限状態附近を包含した範囲において、変形、部材力の算定、部材の端部固定度及び挫屈の諸問題を取扱つたものである。

任意の圧縮材 AB の圧力を S, 端モーメントを M_{ab} , M_{ba} とすれば、撓曲線は、

$$y = -\frac{M_{ab}}{S} \left[\frac{\sin k(l-x)}{\sin kl} - \frac{l-x}{l} \right] - \frac{M_{ba}}{S} \left[\frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l} \right] \dots\dots\dots(1)$$

但し $k = \sqrt{S/EI}$, I = 圧縮材 AB の断面 2 次モーメント。

従つて A 及び B 端の撓角は式 (1) より、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ab} &= \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ab} - \varphi M_{ba}), \\ \tau_{ba} &= \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ba} - \varphi M_{ab}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ここに $K = I/l =$ 剛度,

$$\varphi = \frac{6}{kl} \left(\frac{1}{\sin kl} - \frac{1}{kl} \right)$$

$$\psi = \frac{3}{kl} \left(\frac{1}{kl} - \frac{1}{\tan kl} \right)$$

同様に任意の引張材 AB については、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ab} &= \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ab} - \Phi M_{ba}) \\ \tau_{ba} &= \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ba} - \Phi M_{ab}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

ここに $\Phi = \frac{6}{kl} \left(\frac{1}{kl} - \frac{1}{\sinh kl} \right)$

$$\psi = \frac{3}{kl} \left(\frac{1}{\tanh kl} - \frac{1}{kl} \right)$$

圧縮材 AB についてその両端の節点回転角は夫と

$$\theta_{ab} = \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ab} - \varphi M_{ba} + 6EKR),$$

$$\theta_{ba} = \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ba} - \varphi M_{ab} + 6EKR) \dots(4)$$

同様に引張材については、

$$\theta_{ab} = \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ab} - \Phi M_{ba} + 6EKR),$$

$$\theta_{ba} = \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ba} - \Phi M_{ab} + 6EKR) \dots\dots(5)$$

式 (4), (5) より圧縮材, 引張材について夫と次の式 (6), (7) が得られる。

$$M_{ab} = 2EK(2a\theta_{ab} + b\theta_{ba} - 3cR),$$

$$M_{ba} = 2EK(2a\theta_{ba} + b\theta_{ab} - 3cR) \dots\dots\dots(6)$$

* 京都大学教授 工学部土木工学教室
 1) 昭和 23 年 6 月 26 日, 日本応用力学会第 3 回講演会において発表, 講演題目: 剛節構造の解法について
 昭和 23 年 12 月 14 日, 土木学会第 7 回月例研究発表会において発表, 講演題目: 剛節構造物解法について

$$M_{ab} = 2EK(2A\theta_{ab} + B\theta_{ba} - 3CR),$$

$$M_{ba} = 2EK(2A\theta_{ba} + B\theta_{ab} - 3CR) \dots\dots(7)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{3\psi}{4\psi^2 - \phi^2}, \quad b = \frac{3\phi}{4\psi^2 - \phi^2}, \quad c = \frac{1}{2\psi - \phi} \\ A &= \frac{3\psi}{4\psi^2 - \phi^2}, \quad B = \frac{3\phi}{4\psi^2 - \phi^2}, \quad C = \frac{1}{2\psi - \phi} \end{aligned} \right\} (8)$$

次に剪断力 Q は式 (6) 或は (7) を用いて、

$$Q_a = (M_{ab} + M_{ba})/l, \quad Q_b = -Q_a \dots\dots(9)$$

構造物の平面上に任意の直角座標系 oxy をとり、節点の x 及び y 軸方向の変位を夫々 u, v とし節点名を添字して表わすことにすれば、 x 軸と α の角をなす部材 AB について長さの歪 g は高次の微小量を無視すれば

$$\varepsilon = (u_b - u_a) \frac{\cos\alpha}{l} + (v_b - v_a) \frac{\sin\alpha}{l} \dots\dots(10)$$

曲げモーメントによつて生ずる部材長の変化は2次の微小量であるから、これを無視すれば、部材力 S 及び部材回転角 R は夫々

$$S = \frac{EF}{l} \{ (u_b - u_a) \cdot \cos\alpha + (v_b - v_a) \cdot \sin\alpha \} \dots\dots(11)$$

$$R = (v_b - v_a) \frac{\cos\alpha}{l} - (u_b - u_a) \cdot \frac{\sin\alpha}{l} \dots\dots(12)$$

節点 i の釣合方程式 (6), (7), (9), (11) 及び (12) を用い、なお節点の剛結条件を考慮して次の如く表わすことが出来る。

$$\begin{aligned} & Eu_i \sum_{k=1}^n [H_{ik} + T_{ik}(\dot{C})] - \sum_{k=1}^n [H_{ik} + T_{ik}(\dot{C})] \\ & \times Eu_k + Ev_i \sum_{k=1}^n [G_{ik} - U_{ik}(\dot{C})] - \sum_{k=1}^n [G_{ik} - U_{ik} \\ & \times (\dot{C})] Ev_k - E\theta_i \sum_{k=1}^n [2L_{ik} \left(\frac{2a+b}{2A+B} \right)] - \sum_{k=1}^n [2L_{ik} \\ & \times \left(\frac{2a+b}{2A+B} \right)] E\theta_k - \sum_i P_{xi} = 0 \dots\dots(13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Eu_i \sum_{k=1}^n [G_{ik} - U_{ik}(\dot{C})] - \sum_{k=1}^n [G_{ik} - U_{ik}(\dot{C})] \\ & \times Eu_k + Ev_i \sum_{k=1}^n [D_{ik} + V_{ik}(\dot{C})] - \sum_{k=1}^n [D_{ik} + V_{ik} \\ & \times (\dot{C})] Ev_k + E\theta_i \sum_{k=1}^n [2N_{ik} \left(\frac{2a+b}{2A+B} \right)] + \sum_{k=1}^n \\ & [2N_{ik} \left(\frac{2a+b}{2A+B} \right)] E\theta_k - \sum_i P_{yi} = 0 \dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Eu_i \sum_{k=1}^n [3L_{ik}(\dot{C})] - \sum_{k=1}^n [3L_{ik}(\dot{C})] Eu_k - Ev_i \\ & \times \sum_{k=1}^n [3N_{ik}(\dot{C})] + \sum_{k=1}^n [3N_{ik}(\dot{C})] Ev_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - E\theta_i \sum_{k=1}^n [2K_{ik} \left(\frac{a}{A} \right)] - \sum_{k=1}^n [K_{ik} \left(\frac{b}{B} \right)] \\ & \times E\theta_k + \frac{1}{2} \sum_i M_i = 0 \dots\dots(15) \end{aligned}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} D &= F \cdot \frac{\sin^2\alpha}{l}, \quad G = F \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{l}, \\ H &= F \cdot \frac{\cos^2\alpha}{l}, \quad T = \frac{12K}{l} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{l}, \\ U &= \frac{12K}{l} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{l}, \quad V = \frac{12K}{l} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{l} \\ L &= K \cdot \frac{\sin\alpha}{l}, \quad N = K \cdot \frac{\cos\alpha}{l} \end{aligned} \right\} (16)$$

式 (13), (14), (15) 中圧縮材については () 中の上段、引張材については下段を用いるものとする。

式 (13), (14), (15) は一般剛節構造物解法の一般基礎方程式である。本式を各節点について書きおろしこれを u, v, θ を未知量として連立方程式を解けば、これによつて総べての節点の u, v, θ を求めることが出来る。 D, G, \dots, N は何れも構造物の形状及び各部材の寸法が与えられた場合には式 (16) によつて容易に計算することが出来るが、 a, b, c, A, B, C は何れも夫々の部材の軸力 S の函数であるから、従つて又式 (11) より明かな如く u, v によつて決まるものである。従つて式 (13), (14), (15) は u, v, θ 未知量として簡単に解くことは出来ない。構造物の性質から判断して繰返漸近法によつて解くことが考えられる。

剛節橋トラスにおいては端モーメント M の作用は軸力 S の作用に比し小である。よつて第1次近似値として釣合条件式中の Q による項を無視したもの、解を採用することが出来る。この場合モーメントの釣合条件式 (15) には変化がないから基礎方程式 (13'), (14'), (15') と表わすことが出来る。式 (13'), (14') 中には θ を含まないからこの両式より u, v を決定することが出来、この結果を式 (15) に用いて θ を求めることが出来る。この第1次近似値の部材軸力 S は滑節トラスの軸力 S_0 を用いたことに相当し、適当剛節トラスの2次応力計算法として採用せられている計算法がこれに当る。

フィレン・ディール・トラスにおいては、軸力は小、従つて k が小である。故に式 (2), (3), (8) より明かな如く第1次近似値として $a = b = c = A = B = C = 1$ と考えて差支えない。この場合の基礎方程式は式 (13''), (14''), (15'') と表わすことが出来る。これを u, v, θ について解きこれを第1次近似値とする。今求めた u, v を用い式 (11) より S を求め、これから式 (2), (3), (8) により a, b, c, A, B, C が

求められる。この値を式 (13), (14), (15) に代入して得た連立 1 次方程式を解いて得られた u, v, θ を第 2 次近似値とする。この操作を反復することによって基礎方程式の解に逐次接近した値を得ることが出来る。変形 u, v, θ が求められたならば、これを式 (11) (12), (6), (7), (9) に用いて軸力, 端モーメント, 剪断力を総べて計算することが出来る。

2. 挫屈, 弾性破損に関する一考察

滑節橋トラスの圧縮部材は両端鉸の圧縮部材であるから, その挫屈荷重は単一柱の場合と同様に求めることが出来る。各圧縮材の挫屈荷重の内, 最小のものが橋トラスの挫屈荷重となる。剛節橋トラスでは部材固定の度合は完全固定ではなく, 所謂弾性固定と言言葉で表わされている。圧縮部材の設計にはこの弾性固定度を量的に知っておく必要があるが, この点については今迄理論的に明確にされていないので, 挫屈又は弾性破損に関して一考察を試みた。

剛節橋トラスの上弦材 ig, ik については, 剛結条件より, $\theta_{ig} = \theta_{ik} = \theta_i$ である。この関係に式 (4) を用いて整理すると

$$K_{ig} \cdot \varphi_{gi} \cdot M_{gi} - 2K_{ik} \cdot \psi_{gi} \cdot M_{ig} + 2K_{gi} \cdot \psi_{ik} \cdot M_{ik} - K_{gi} \cdot \varphi_{ik} \cdot M_{ki} = 6EK_{gi} \cdot K_{ik} \cdot (R_{gi} - R_{ik}) \dots \dots \dots (17)$$

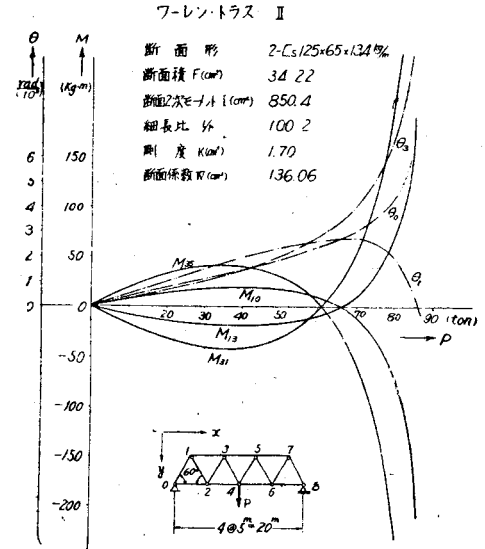
同様にして他の部材についても, その応力の性質に応じて, 式 (4) 又は (5) を用いて剛結条件を書くと, 未知端モーメントの数と同数の式が得られる。挫屈を生じた場合には各部材の端モーメントは ∞ になる筈である。即ち挫屈の条件式は式 (17) と同形の剛結条件式の端モーメントの係数で作った行列式が 0 に等しい式である。下弦節点が総べて滑節である剛滑節橋

トラス又は上弦材のみ剛結した剛滑節橋トラスにおいては, 滑節点における端モーメントが 0 である条件を導入して挫屈条件式を簡単にすることが出来る。

3. 数値計算例

図-1 に示す如き上弦材のみ剛結した, 全部材断面一定のワーレン橋トラスに荷重 P が中央節点 4 に作用する場合について, 部材断面を 3 種に変化せしめて計算を行った。その結果の一例を図-1 に示す。荷重

図-1



P の増大と共に θ 及び M の変化する状況及び挫屈現象に移る過程が明らかである。又弾性固定度を求めた結果, 最大圧縮力を受ける部材 35 に対して 1.53 を得た。又平行弦を有するワーレン・ディール・トラスについても変形, 部材力を算定した。

○第二京浜国道と国鉄南部線立体交叉工事

東京, 横浜を結ぶ幹線道路第二京浜国道は, 近来ともに交通量が増加して来たが, 国鉄南部線との立体交叉工事は戦争の為中止のままで, 現在平面交叉しているので, 同路線の隘路となっているが, 近く総工費 45 000 000 円で建設省, 国鉄が費用分担し, 国鉄の手で着工, 年度中には完成を見る見込である。

○新鶴見操車場にカー・リターダー設備さる

新鶴見操車場は当初よりリターダー・ヤードとして設計された坂原ヤードであつて, 開設当時(昭和 12 年)試験的に 2 台のカー・リターダーが設備された。これら設備は機構及び能力の点で不完全であつて, この中一方を改良したものを設備してリターダー・ヤードと

して完成させる予定であつたが, 戦争によつて中途において挫折した。戦後早くより再計画が進められてきたが, 漸く昨 24 年度その計画の一部として 4 台のリターダーが工費 22 113 000 円をもつて設備された。米国の Union Signal & Switch Co. の Model 31 と同一型式のもので動力には圧縮空気を制御は電気的に行われる。製作は株式会社東三製作所によるもので試験成績は良好であつた。今年更に 12 台が工費 68 000 000 円をもつて増備される計画で, 現在工事が施行されつゝあり, 本年度末には計 16 台が完全な姿として国鉄に初登場するわけで, 経営合理化の一助としその能力を発揮する日も間近い。