

れ表-3 の様になる。

表-3

| 部材 | Rλ | -Rλ/E | Rλ | λ/E | δ _{iv} ^{cm} | δ _{iv} ^{cm} | 格点 |
|----|---------|---------|---------|--------|-------------------------------|-------------------------------|----|
| 2 | 1.5294 | 0 | 0 | 0.2656 | 1.5294 | 0.2656 | b |
| 4 | 0.8558 | 0 | 0 | 0.2656 | 2.3852 | 0.5312 | C |
| 8 | 0.4518 | 0 | 0 | 0.2354 | 2.8370 | 0.7666 | d |
| 14 | -0.4518 | 0 | 0 | 0.2354 | 2.3852 | 1.0020 | e |
| 18 | -0.8558 | 0 | 0 | 0.2656 | 1.5294 | 1.2676 | f |
| 20 | -1.5294 | 0 | 0 | 0.2656 | 0 | 1.5332 | B |
| 3 | 0 | -0.1737 | 0.9948 | 0 | 1.3557 | 1.2604 | b' |
| 7 | 0 | 0.1071 | 0.4804 | 0 | 2.4923 | 1.0116 | C' |
| 11 | 0 | 0.0171 | 0 | 0 | 2.8541 | 0.7666 | d' |
| 15 | 0 | 0.1071 | -0.4804 | 0 | 2.4923 | 0.5216 | e' |
| 19 | 0 | -0.1737 | -0.9948 | 0 | 1.3557 | 0.2728 | f' |

之等の値を仮想働の原理, 弾性荷重, Williot Mohr の図解法に依て求めた結果と比較すると表-4 の様になる。(数字は小池啓吉著橋梁工学第三巻 20, 38, 47 頁による)

表-4 単位 cm

| 格点 | 仮想働 | 弾性荷重 | 図解法 | 本方法 |
|----|-------|-------|------|-------|
| b | | 1.529 | 1.56 | 1.529 |
| c | | 2.384 | 2.40 | 2.385 |
| d | 2.838 | 2.837 | 2.84 | 2.837 |
| b' | | 1.356 | 1.40 | 1.356 |
| c' | | 2.492 | 2.51 | 2.492 |
| d' | | 2.854 | 2.87 | 2.854 |

結言 これ迄トラスの変位を求むる主な方法としては

(1) 仮想働の原理に依る方法

(2) 弾性荷重に依る方法

(3) Williot-Mohr の図解法

以上3通りの方法があつた。

(1) は唯一つの格点の1方向の変位を求めるのには便利であるが n 個の格点の水平及び鉛直方向の変位を求めるのには同じ様な計算を 2n 回繰返さなければならぬ。

(2) は上弦格点と下弦格点の鉛直変位を求める為の弾性荷重が違うので全格点の変位を求める為には, 2 回繰返さなければならぬのみならず水平方向の変位を求める事が出来ない。尚又弾性荷重を求める為の計算が非常に厄介である。

(3) は全格点の相対的変位が唯一回の操作だけで求まるので便利ではあるが丁寧な製図を必要とし, 而かも精度が落ちる。

これに対し上述の方法は次の様な長所を持つて居る。

(1) 比較的簡単な唯一回の計算だけで全格点の水平及び鉛直変位を同時に求める事が出来る。

(2) 製図を必要としない。

(3) 希望に応じた精度の答が得られる。概算値を得度い時は腹材の影響を無視する事として腹材の σ=0 とおけば計算が非常に簡単になる。

(4) 不静定構の不静定反力影響線を求めるのに応用する事が出来る。(弾性荷重に依るよりも簡単である)

(5) 不静定構も部材応力が求まれば直ちに格点変位を求める事が出来る。

開水路における乱流の縦平均流速分布について

正員 久 寶 保*

ON THE DISTRIBUTION OF VERTICAL MEAN-VELOCITY OF TURBULENT FLOW IN AN OPEN WATER-CHANNEL

(JSCE July 1950)

Tamotsu Kuboo, C.E. Member

Synopsis In this paper the author show the distribution of vertical mean-velocity of turbulent (uniform) flow in an open channel by using both theoretical and actual results as follows :-

$$u = \frac{1}{n} \left\{ \sinh^{-1} \left(10 \frac{y}{H_0} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{y}{H_0} \right)^4 \right\} \sqrt{g J H_0}$$

where u=mean velocity, n=coeff. of roughness, y=height from the bed, H₀=height of the position of max. velocity, g=gravity acceleration and J=gradient of flow. If this formula is substantiated, from its result the boundary laminar-flow, the scale of turbidity, the viscosity coefficient and the coeff. of diffusivity can be required. The author accepted idea that its consequence of those formulas had been suited for many results of actual observations without much discrepancies.

要旨 本論文において著者は開水路の乱流の縦平均

(等速) 流速分布を理論及び実測結果を用いて次の式で示した。即ち

* 徳島大学徳島工業専門学校教授

$$u = \frac{1}{n} \left\{ \sinh^{-1} \left(10 \frac{y}{H_0} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{y}{H_0} \right)^4 \right\} \sqrt{gJH_0}$$

ここに u : 平均流速, n : 粗度係数, y : 底よりの高さ H_0 : 最大流速の位置の高さ, g : 重力加速度, J : 流れの勾配を示すものとする。若しこの式が成立するならば, それより境界層流速, 乱れの尺度, 渦動粘性係数及び拡散係数が求められる。その結果は大した矛盾なく多くの実測結果に適合せしめられると思われた。

1. 開水路乱流の定流に関する運動方程式について

O. Reynolds¹⁾による直交座標に関する非圧縮粘性流体の運動方程式は, 二次元的等速定流では,

$$-\rho gJ = \mu d^2u/dy^2 + \rho \overline{u'v'}/dy \quad \dots\dots(1)$$

として示され, ここに ρ : 水の密度, g : 重力加速度, J : 底勾配, μ : 水の分子粘性係数, y : 流れに直角上向きの座標, u' 及び v' は夫々 x 及び y 軸の方向の乱れの速度成分, 一は時間的平均を示す。流れの中のある点の流速を x 方向に U とすると, u は x 方向の時間的平均流速であつて,

$$U = u + u', \quad \overline{U} = u$$

である。ここに

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu du/dy \\ \tau_{xy}' &= \rho u'v' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(2)$$

とすると, τ_{xy} 及び τ_{xy}' は夫々分子内部摩擦力及び乱れによる内部摩擦力を示すものといえる。 τ_{xy}' については,

$$\tau_{xy}' = \mu_{xz1}' \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = \mu_{xz1}' \frac{\partial u'}{\partial y}, \quad \mu_{xz1}' = 0 \quad \dots\dots(3)$$

とし, 乱れのみによる摩擦係数 μ_{xz1}' を考えた方が合理的と思われる。故に, (2), (3) の関係から,

$$\tau_{xy}' = \rho \overline{u'v'} = \mu_{xz1}' \frac{\partial u'}{\partial y} \quad \dots\dots(4)$$

となり,

$$\mu_{xz1}' \frac{\partial u'}{\partial y} = l_1 \mu_{xz1}' \frac{du}{dy}$$

なる μ_{xz1}' を用いると一般によく知られているように

$$-\rho gJ = \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} + l_1 \mu_{xz1}' \frac{du}{dy} \right)$$

となり, 積分すると,

$$-\rho gJy' = (\mu + l_1 \mu_{xz1}') \frac{du}{dy} \quad \dots\dots(5)$$

となる。ここに $du/dy = 0$ で $y' = 0$, 即ち最大流速の位置を y 軸の原点にとつたものである。(5)式において水の分子粘性係数は $l_1 \mu_{xz1}'$ に比して極めて小さいので, それを無視すると,

$$-\rho gJy' = l_1 \mu_{xz1}' \frac{du}{dy} = \rho \overline{u'v'} \quad \dots\dots(6)$$

とおける。今, Prandtl³⁾による乱れの混合距離 l の長さの考えを用いると,

$$\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy'} \right| \left| \frac{du}{dy} \right|$$

となり, (符号は後に吟味するとして) $y' = 0$ で l を一定とすると, (6)式より,

$$l \frac{du}{dy'} = \sqrt{-gJy'}$$

となり, $y' = 0$ 附近では,

$$u = \frac{\sqrt{gJ}}{l} \left\{ \frac{2}{3} + \log(-y') \right\} + c$$

次に

$$y' > 0: du/dy' < 0 \quad \therefore u = c - \frac{\sqrt{gJ}}{l'} \left\{ \frac{2}{3} + \log y' \right\}$$

$$y' < 0: du/dy' > 0 \quad \therefore u = c + \frac{\sqrt{gJ}}{l''} \times \left\{ \frac{2}{3} + \log(-y') \right\}$$

と考えられる。故に,

$$\left. \begin{aligned} y' &= e^{-\frac{2}{3} \frac{\sqrt{gJ}}{l'} + c} e^{-u} & y' > 0 \\ -y' &= e^{-\frac{2}{3} \frac{\sqrt{gJ}}{l''} + c'} e^{-u} & y' < 0 \end{aligned} \right\}$$

となり, $y' \geq 0$ において流速分布を対称と仮定すると,

$$|y'| = k \sinh u$$

とおける。最大流速の高さを H_0 とし,

$$H_0 + y' = y$$

として, 以上の関係が $y' = 0$ 以外にも用いられるものと考え, 実際の流れでは,

$$\frac{u}{u^*} = a_2 \sinh^{-1}(k'y) + b_2 \quad \dots\dots(7)$$

として, y を流れの底よりの高さとし, u^*, a_2, b_2 , 及び k' なる係数を用いて示すことにする。ここに (7)式をもつて流速分布を示す基本の式とする。

(7)式において, $2.5 \sinh^{-1}y - 1.7$ を計算すると, Prandtl⁴⁾の式の $5.75 \log_{10}y$ と大体一致する。(7)式は又, 正規分布誤差曲線の一部曲線と一致する。著者は(7)式に関して2~3の吟味をし, 円管又は二平行平板間⁵⁾の流れの場合と理論的によく一致することを確かめた。

II 縦流速分布について

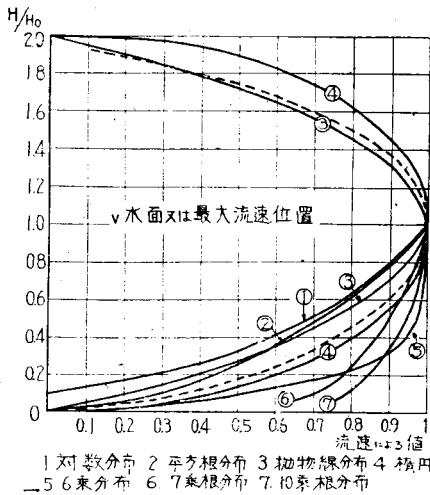
縦流速分布に関する実験公式は極めて多く⁶⁾, Bazin(1865)は最大流速の位置が水面以下に生ずることを認め, Grashof(1875), Lavale(1883), Hessle(1891), Rapp(1927)等の式が示されて来た。Gerstner(1819)は流速分布を楕円分布とし, Lipke(1912)は最大流速より上は楕円, 下は抛物線をなし, Kózény(1934)

は楕円分布を主張している。

理論的流速分布も多くの人々が提唱している。Humphrey (1861)は運動方程式(5)の $(\mu+l_1\mu_{xz}') = \text{const.}$ として積分し、Krey (1927)は $(\mu+l_1\mu_{xz}') = ky(H-y)$ として求め、Jasmund (1893)がそれを実測より立証し、速水頌一郎(1939)はGebelein (1935)の2平行板内の乱れの下半分を開水路に用いた理論式を示し、安芸敏一(1941)はKözényの結果より、 $(\mu+l_1\mu_{xz}') = k-k'u$ とし、Varoni (1941)はKármánの理論を実測に適合せしめた式を示した。

それらの結果を、 $H=1$ で一致するように著者が示すと図-1のような流速曲線を得た。ただし、この中には円管の流速分布として示されたものも含めておいた。

図-1 種々の縦流速分布曲線
Fig.1 Curves of miscellaneous vertical velocity-distribution



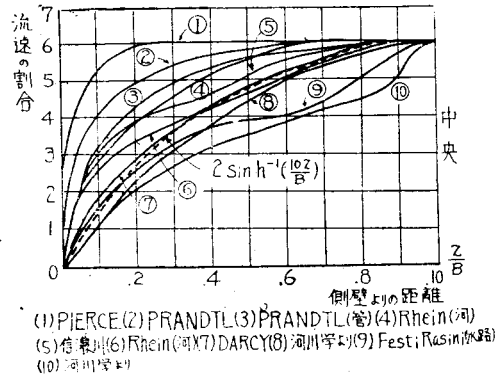
然しながら理論的流速分布と実測の結果とはは相当な距りがあり、理論的流速分布として示されたものにも種々なものがある。ここに著者は理論と実際の結果との距りを狭めるように努力したつもりである。今、著者が提唱する(7)式を図-1の破線で示せば、楕円分布に近い結果を示すことになった。

■ 横流速分布を考へに入れること

横流速分布をz軸で示すと、その時間的平均値は図-2のように極めて不規則である。図-2は開水路の表面流速分布を最大部で6として示したものである。同曲線群の内4~10は河川流に関するものであつて点線は $\sinh^{-1}(10z/B)$ を示したもので、大体その中位を通つている。故に横流速分布も縦流速分布と同じ函数形が用いられるものと仮定する。

図-2 種々の水面横流速分布曲線

Fig.2 Curves of miscellaneous horizontal velocity-distribution of Surface-water



時間的平均の実測流速をuとし、 u_1 及び u_2 を夫々理論的縦及び横流速とする。

$$\left. \begin{aligned} u_1 - u &= u_{01} \\ u_2 - u &= u_{02} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

とし、 u_{01} 及び u_{02} を実際と理論値との差異とする。 u_{01} 及び u_{02} が w に比して小さければ、

$$u \approx \sqrt{u_1 u_2} \dots\dots(9)$$

となり、中心に関して対称な円管のような流れでは、 u_1 及び u_2 を同じ函数形で示して成立する。然し一般に、

$$\left. \begin{aligned} u_{01} &= \lambda_1 f(y, z) \\ u_{02} &= \lambda_2 f(y, z) \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

として、同じ函数項 $f(y, z)$ を有するものとすれば、(8)式より、

$$u = u_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (u_2 - u_1)$$

となり、 $\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1)$ は dimensionless な値であるので、

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = - \left(\frac{y}{H} \right)^\alpha \left(\frac{z}{B} \right)^\beta$$

とし、 H は水深、 B は水路半幅、 Z は岸よりの水平距離とする。故に、

$$u = u_1 - (u_1 - u_2) \left(\frac{y}{H} \right)^\alpha \left(\frac{z}{B} \right)^\beta \dots\dots(11)$$

となり、 α 及び β を適当に定めると実際の開水路の等速流分布に近づけることができる。著者は $\alpha=2, \beta=0$ として u_1 及び u_2 を \sinh^{-1} の分布式で示して吟味した結果は梯形及び矩形水路の等速流分布曲線と比較的よく相似した結果を得た。ここに $\beta=0$ とすると、

$$u = u_1 - (u_1 - u_2) \left(\frac{y}{H} \right)^\alpha \dots\dots(12)$$

となり、横流速を考へ入れた縦流速分布式が得られよう。

IV 著者の提案する縦流速分布公式

(12) 式で $y=H$ とすると $u=u_2$ となり, その u_2 は表面流速を示すことになる。(12) 式を簡略化して,

$$u = u_1 * a_1 \left\{ u_1'' - \frac{1}{K} \left(\frac{y}{H} \right)^\alpha \right\}$$

とし, u_1'' に $\sinh^{-1} (10y/H_0)$ を用い, $y=H_0$ で $du/dy=0$ とすると,

$$u = u_1 * a_1 \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{10y}{H_0} \right) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{y}{H} \right)^\alpha \right\}$$

となり,

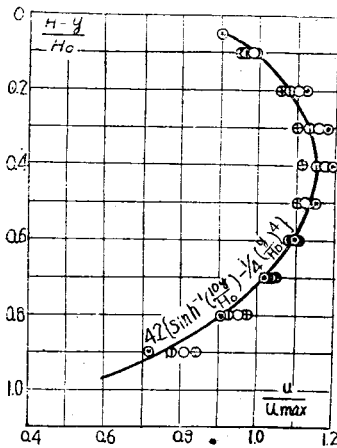
$$n = \frac{1}{a_1}$$

として n を粗度係数とし, $u_1 = \sqrt{gJH_0}$ とすると,

$$u = \frac{1}{n} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{10y}{H_0} \right) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{y}{H_0} \right)^\alpha \right\} \sqrt{gJH_0}$$

となる。但し, $10y/H_0$ は理論的な多くの式と一致するような値として選んだものである。実測結果として, 物部博士水理学を用いて, $\alpha=4$ とすると, 図-3 の

図-3 著者の縦流速分布曲線
Fig. 3 Vertical velocity-distribution by the author



ようになり, その結果はよく一致する。故に,

$$u = \frac{1}{n} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{10y}{H_0} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{y}{H_0} \right)^4 \right\} \sqrt{gJH_0} \quad (13)$$

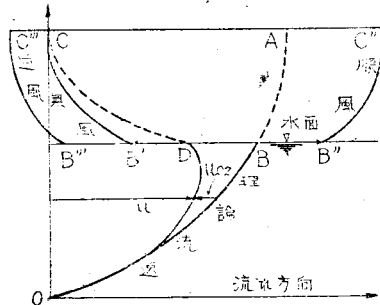
をもつて, 実際河川のような開水路の縦流速分布として提唱し度い。なお細井正延 (1948) の結果を用いて示すと測定値は全部 (13) 式の曲線上にあつた。(13) 式は底の境界層部及びいわゆる対数分布部, 更に最大流速より上部の流速が全部同一曲線で示されることになる。

V 最大流速及び縦平均流速の位置について

最大流速の位置が開水路では水面以下に生ずる場合があり, その理由として, (1) 空気のため, (2) 螺旋流又は副流のため, (3) 水面の岸のため, によるもの

が考えられる。図-4 によつて, 空気のない場合の理論的流速分布を ABO とする。無風時には水と空気との摩擦力によつて DO のような曲線となるとする。

図-4 縦流速分布に関する説明図
Fig.4 Sketch of vertical velocity-distribution for the explanation



従つて空気の水面上での流速と水の水面上での流速とに差を生じ B'B によつて BD を生ずる。故に B'B は水の水面上流速によると考えられる。逆風時には D が更に B' の方より, 順風時には B が B' にかたよる。表面の水の捲込みによつて最大流速の位置が下る理由は Gibson (1903) が説明している。著者は更に水面の岸では水に対する附着力と空気に対する附着力の差に表面張力が関連して, 水面の岸では水中の岸より大なる吸着力が作用し, 表面流速が特に岸では 0 になり易いものと考えている。それら 3 の原因が何れも一体となつて作用し, 最大流速の位置を水面以下に生ぜしめるものと考えられる。

さて (13) 式において,

$$y = H_0: u = u_{max}$$

とすると, 最大流速は,

$$u_{max} = \frac{2.75}{n} \sqrt{gJH_0}$$

となり, その位置は,

$$H_0 = \frac{1}{gJ} \left(\frac{n u_{max}}{2.75} \right)^2 \quad \dots\dots(14)$$

となり, 最大流速の位置の高さ H_0 は gJ に逆比例し粗度係数及び最大流速の自乗に比例する。全水深 H に比して $H_0 > H$ ならば水面の流速が最大で, $H_0 < H$ ならば最大流速が水面以下に生ずる。故に, (13) 式は最大流速の位置が水面以下でも, 又水面以上にあると考えられる場合でも用いることができる。

水渠全体の平均流速 u_{mean} を求めると, (13) 式を積分し H で除すと,

$$u_{mean} = \frac{\sqrt{gJH_0}}{n} \left\{ \frac{1}{10} \frac{H_0}{H} + \sinh^{-1} \left(\frac{10H}{H_0} \right) - \frac{H_0}{10H} \sqrt{1 + \left(\frac{10H}{H_0} \right)^2} - \frac{H^4}{160H_0^4} \right\} \dots (15)$$

となり、平均流速の高サは全水深 H と最大流速の高サ H_0 によつて求められることになり、これを全水深の割合 Y/H で示すと、 $Y/H > 0.38$ ならば水面の流速が最大となり、 < 0.38 ならば最大流速は水面以下に生ずる。故に (14) 式と比較して考えれば粗な浅い水路程最大流速の位置が高くなり水面以上にあると思われる場合を生ずる。これは河川の流速を実測した人々の経験によつてよく知られているところである。

Ⅶ 乱れの強サ等について

(13) 式を展開すると、

$$u = \frac{1}{n} \left\{ \frac{10}{H_0} y - \frac{1}{6} \left(\frac{10}{H_0} y \right)^3 + \dots \dots - \frac{1}{4} \left(\frac{y}{H_0} \right)^4 \right\} \sqrt{g J H_0}$$

となり、 y の充分小さいところでは、

$$u = (10 \sqrt{g J} / n \sqrt{H_0}) y$$

となり、底の境界層附近の流速分布を示しているものといえる。

次に乱れによる粘性係数 $(\mu + l_1 \mu_{xx'})$ は、 du/dy を (13) 式より求めて (5) 式を $y' = (H_0 - y)$ に改めて代入すると、

$$\mu + l_1 \mu_{xx'} = \left\{ n \rho (1 - y/H_0) \sqrt{g J H_0 / 10} \right\} / \left\{ 1 / \sqrt{1 + (10y/H_0)^2} - y^3 / 10 H_0^3 \right\} \dots \dots (16)$$

となり、 $\mu = 0$ として $l_1 \mu_{xx'}$ を図示して野満博士¹¹⁾の粘性係数分布図と比較すると本質的に相違がない。故に渦動粘性係数が直線分布をなすという説も、Krey (1927) の 2 次曲線で示す説も、Kószény の流速分布に比例させたものも、何れも H/H_0 の附近でよく合つた傾向を有している。

なお (5) 式より、

$$\rho g J (H_0 - y) = \tau_{xy} + \tau_{xz'}$$

となるから、 $y = 0$ で $\tau_{xz} + \tau_{xz'} = \tau_0$ とおくと、

$$\tau_0 = \rho g J H_0$$

となり、 H_0 には (14) 式のように粗度係数 n を含んでいるから、 τ_0 の値は粗度及び最大流速によるといえる。

Taylor の運動量輸送理論による乱れの長サ l を導入して (16) 式より $\mu = 0$ として、

$$l = \left\{ H_0 n \sqrt{l_1 / 10} \right\} \left\{ \sqrt{1 - y/H_0} \right\} / \left\{ 1 / \sqrt{1 + (10y/H_0)^2} - y^3 / 10 H_0^3 \right\} \dots \dots (17)$$

を得、これより $y = H_0$ 即ち最大流速に近い程大き

くなり、一般的概念とよく合うと思われる。¹²⁾

拡散係数 D を、

$$D = l \sqrt{u'v'}$$

とし、 $\tau_{xz} = 0$ とすると、(6) 式より、

$$\tau_{xz'} = \rho u'v' = \rho g J (H_0 - y)$$

となり、

$$D = \sqrt{g J H_0^3} \cdot n (1 - y/H_0) / 10 \left\{ \sqrt{1 + (10y/H_0)^2} - y^3 / 10 H_0^3 \right\}$$

となり、最大流速高の 6 割の高サにおいて最大拡散係数を有する。¹³⁾ (著者は昭和 18 年頃文部省科学研究費により食塩水を用いて拡散係数を測定し、それと大体一致した結果を得た。)

参考文献 (主なるもの)

- 1) O. Reynolds, "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion," Scientific Papers. Vol.2. (粘性流体 I)
- 2) 例えば野満隆治, 「河川学」80 頁
- 3) 谷一郎「応用流体力学」100 頁
- 4) 同上 40 頁
- 5) 久宝保「乱流の流速分布に関する提案(其の一)」徳島工業専門学校研究報告第 1 巻第 1 号 11~16 頁
- 6) 物部長穂「水理学」; Forchheimer, 「Hydraulik」; H. Rouse「Fluid mechanics for hydraulic engineering 1938」; S.G. Goldstein, 「Modern development in fluid dynamics」Vol. II, 1928; W.F. Durand, 「Aerodynamic theory,」Vol III, 1924; その他, 安藝俊一「河相論」土木学会誌 1941, 915~926 頁等
- 7) 物部長穂「水理学」106 頁
- 8) 細井正延「開水路乱流の流速分布及摩擦抵抗に就て」土木研究第一輯 98 頁
- 9) A.H. Gibson, 「On the depression of filament of max. velocity in a stream flowing through an open channel」Pro. Roy. Soc. London, A. 82, 1909, p 149 (野満隆治「河川学」85 頁)
- 10) Th.v. Kármán, 「Turbulence」, Jour. Roy. Aero. Soc. Vol. 41, 1937. (粘性流体 I); 濱良助, 「平板に沿う乱流境界層」東大理工学研究所報告 1~2 巻 1947.
- 11) 野満隆治「河川学」82 頁
- 12) 藤本武助「応用流体力学」403~413 頁
- 13) G.I. Taylor, 「Statistical theory of turbulence」Part I, Pro. Roy. Soc. A, 151, 1935, (粘性流体 I)