

は地質改良のセメント注入では特に困難なことがわかる。結局これは地質改良のセメント注入は大雑づばな

注入になつてしまふと思われ止水効果を期待するとなると更に大きな努力と時間を要すると思われる。

弾性基礎にある梁の撓み振動に関する 基礎的研究¹⁾

准 員 後 藤 尚 男*

FUNDAMENTAL STUDIES ON THE FLEXURAL VIBRATION OF BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION.

(JSCE APR-1950)

Hisao Goto, C.E. Assoc. Member.

緒 言 本研究は弾性基礎にある均一な断面を有する直線梁が、各種の撓乱力を受ける場合の撓み振動を特に基礎の特質を考慮して取扱い、軌條及び枕木への適用を試みたものである。こゝに基礎の特質とは、基礎反力は梁の浮上り時には作用せず、且つ基礎の減衰抵抗は基礎反力の作用中、梁のふれ下るときのみ作用することをいう。この第1報ではこうした基礎の特質を考慮した研究の基礎解として、極く一般的取扱いを行つた。

1. 基礎方程式 一般に圖-1の如き梁の撓み振動曲線は正規函数を $u_r(x)$ とし、時間函数を一般座標 g_{rt} にとつて次の如く展開出来る。

$$y_{xt} = \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) g_{rt} \quad \dots\dots\dots (1)$$

位置のエネルギー V 、運動のエネルギー T ⁽¹⁾ 及び散逸函数 F ⁽²⁾ は、

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{bK}{2} \int_0^l y^2 dx \\ T &= \frac{\rho a}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \\ F &= \frac{\rho a k}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{bR}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

こゝに、 EI : 梁の曲げ剛性、 b : 梁巾、 l : 梁の材長、 a : 梁断面積、 ρ : 梁密度、 K : 基礎反力係数、 k : 梁材料の内部摩擦係数、 R : 基礎抵抗係数、

(2)式に(1)式を代入し、正規函数の直交性を考慮して演算を施し、その結果を Lagrange の運動方程式に代入すると、次の基礎方程式を得る。

$$\ddot{g}_{rt} + 2\varepsilon \dot{g}_{rt} + n_r^2 g_{rt} = \frac{1}{\rho a \alpha_r^2} Q_{rt} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{こゝに、} \varepsilon = \frac{1}{2\rho a} \{ \rho a k + bR \},$$

$$n_r^2 = \frac{1}{\rho a} \{ EI \frac{m_r^4}{l^4} + bK \}$$

Q_{rt} は撓乱力による一般力、 n_r は減衰のない場合の自由振動の円振動数であり、 α_r 、 m_r は梁の材端条件により決定される値である。

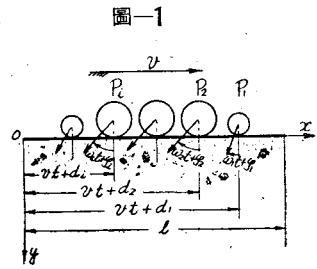
2. 各種のかく

乱力の作用する場合 圖-1の如き集中撓乱力が $P_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$ なる週期力で、梁上を速度をもつて移動するときの一般力⁽⁴⁾ は

$$Q_{rt} = \sum_i P_i \cos(\omega_i t + \phi_i) u_r(vt + d_i), \text{ 但し } 0 \leq vt + d_i \leq l$$

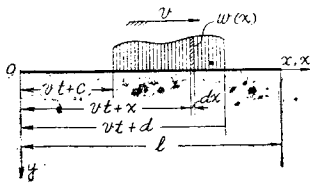
これを(3)式に代入し、⁽⁵⁾ 常数変化の法によつて、 g_{rt} を求め、更に(1)式に代入すると、撓み y_{xt} が次の如く計算される。通常の形状、材質の梁で、普通の基礎の場合には $n_1 > \varepsilon^{**}$ で減衰振動をするときであるから、 $\sqrt{n_r^2 - \varepsilon^2} = \sigma_r^{**}$ とおいて、

$$\begin{aligned} y_{xt} &= e^{-\varepsilon t} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) \{ c_r \cos \sigma_r t + c_r' \sin \sigma_r t \} \\ &+ \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_i \frac{P_i u_r(x)}{\sigma_r \alpha_r^2} \int_0^t \cos(\omega_i \tau + \phi_i) u_r \\ &\quad (v\tau + d_i) e^{\varepsilon \tau} \sin \sigma_r (t - \tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$



* 京都大学、文部教官、工学部土木工学教室
1) 日本応用力学会、応用物理学会、音響学会連合講演会(昭24.12.3)において「弾性基礎にある梁の撓み振動の1解法」として講演

圖-2



次に圖-2 の如き分布擾乱力が不変力として、梁上を速度 v で移動するときの一般力は

$$Q_{vt} = \int_c^d w(x) u_r(vt+x) dx, \quad \text{但し } 0 \leq vt+x \leq l$$

且つ $0 \leq x \leq d \leq l$

これより集中擾乱力のときと全く同様にして、

$$y_{xt} = e^{-\varepsilon t} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) \{c_r \cos \sigma_r t + c'_r \sin \sigma_r t\} + \frac{e^{-\varepsilon t}}{\rho a} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u_r(x)}{\sigma_r \alpha_r^2} \int_0^t \int_c^d w(x) u_r(v\tau+x) e^{\varepsilon \tau} \sin \sigma_r (t-\tau) d\tau dx \dots (5)$$

(4) 及び (5) 式の第 1 項は初期条件による自由振動、第 2 項は擾乱力による振動を表わしている。第 2 項の定積分は $u_r(v\tau+d_i)$, $u_r(v\tau+x)$ が正規函数を表わすから、積分内は三角函数と指数函数となつて積分が可能である。

この外に移動集中不変力、固定集中及び分布週期力のときも全く同様に取り扱うことが出来、又各種の集中力、分布力が組合さつているときは個々の解を重疊すればよい。更に任意の形状 $w(x)$, 任意の時間的変動 $\phi(t)$ をなす場合も結局 $\int \int w(x) \phi(\tau) u_r(x) d\tau dx$ の積分が可能となつて取扱いうることになる。

3. 軌條の撓み振動 軌條の振動は現象が複雑であるから、ここでは軌條を一樣な弾性基礎にあつて両端鉸結の自由支持梁と考える。そして蒸氣機関車の走行による上下の撓み振動のみを対象とする。然らば軸重 W_i を移動不変力、鈍撃 $P_i \cos(\omega_i t + \phi_i)^*$ を移動週期力として 2. の結果を應用すればよく、計算を進めて次の撓み振動の式を得る。

$$y_{xt} = e^{-\varepsilon t} \sum_{r=1}^{\infty} \sin \frac{r\pi x}{l} \left\{ c_r \cos \sigma_r t + c'_r \sin \sigma_r t \right\} + \frac{1}{2\rho a l} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_i \frac{\sin \frac{r\pi x}{l}}{\sigma_r} \left\{ 2\beta_{ri} W_i \cos \left(\frac{r\pi v}{l} t + \phi_{ri} \right) + \gamma_{ri} P_i \cos \left\{ \left(\omega + \frac{r\pi v}{l} \right) t + \psi_{ri} \right\} + \gamma'_{ri} P_i \cos \left\{ \left(\omega - \frac{r\pi v}{l} \right) t + \psi'_{ri} \right\} \right\} - \frac{e^{-\varepsilon t}}{2\rho a l} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_i \frac{\sin \frac{r\pi x}{l}}{\sigma_r} \left\{ (2\lambda_{ri} W_i \right.$$

前頁の ** n_1, n_r は夫々第 1 次及び第 2 次の円振動数で両者の関係は、 $n_1 < n_2 < \dots < n_{r-1} < n_r < n_{r+1} \dots$ である。

$$+ \mu_{ri} P_i \cos \sigma_r t + (2\lambda'_{ri} W_i + \mu_{ri} P_i) \sin \sigma_r t \dots (6)^*$$

ここに、 $\beta_{ri}, \gamma_{ri}, \gamma'_{ri}, \phi_{ri}, \psi_{ri}, \psi'_{ri}, \lambda_{ri}, \lambda'_{ri}, \mu_{ri}, \mu'_{ri}$ は夫々、 $\sigma_r, \varepsilon, l, v, d_i, \omega, \rho, r$ 等によつて表わされる値である。(6) 式の第 1 項は初期条件による自由振動第 2, 第 3 項は夫々走行蒸氣機関車による強制振動及び自由振動を表わしている。

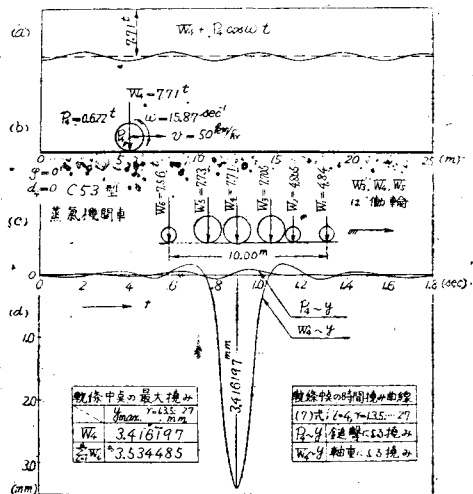
次に軌條原点より $x=c$ の距離にある枕木は $F_{ct} = -\rho a (\ddot{y}_{xt})_{x=c}$ なる擾乱力を受ける。ここに ρa は軌條単位長当りの質量であり、 y_{xt} は (6) 式で計算される軌條の撓み振動曲線である。枕木の撓み振動は上記の擾乱力 F_{ct} より一般力を求めて、軌條と同様の計算を進めて行けばよいが、ここにはその詳細を省略しておく。

4. 數値計算例 (6) 式において、單一輻輪による軌條中点の撓みを $t=0$ において $d_i=0, \phi=0$ として強制振動のみを書くと、

$$y_j \frac{1}{2} = \frac{1}{2\rho a l} \sum_{r=1.3.5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{\sigma_r} \left[2W_i \beta_r \cos \left(\frac{r\pi v}{l} t + \phi_r \right) + P_i \gamma_r \cos \left\{ \left(\omega + \frac{r\pi v}{l} \right) t + \psi_r \right\} + P_i \gamma'_r \cos \left\{ \left(\omega - \frac{r\pi v}{l} \right) t + \psi'_r \right\} \right] \dots (7)$$

數値計算は C53 型蒸氣機関車につき、(7) 式を用いて主として中央の輻輪 $i=4$ (圖-3(c)) について行つた。計算に用いた値は圖-3(b) に示す値で、この

圖-3



** 鈍撃は各輻輪共、 P_i, ω_i, ϕ_i が等しいと見なし得るが、便宜上 P のみに添字を附しておく。

場合 $P_1=622\text{kg}$ となり、⁽⁶⁾ 軌條は 37kg 軌條、材長 $l=25\text{m}$ 、道床係数 $K=10\text{kg/cm}^3$ 、減衰係数 $\varepsilon=30\text{sec}^{-1}$ ⁽⁷⁾ である。計算結果は圖-3 の通りで、(a)、(b) 図は働輪による撓乱荷重の状態、(d) 図は (7) 式による計算値で、機関車の全軸重 $\sum_{i=1}^6 W_i$ による最大撓みは (c) 図の荷重状態のときに生ずる。(d) 図より明かな如く単一働輪では中点直上に來たときの撓みが決定的に大きいので、これにつき詳細な計算を行つて次の結果を得た。

1. 軌條の最大撓みは働輪が直上に來たときに起り W に基くものが決定的で、 v の変化よりも K の大きさに支配され、且つ $\varepsilon=30\text{sec}^{-1}$ 程度では ε の影響を無視してよい。

2. 衝撃作用をも考慮すると、衝撃係数は大体速度の自乗に比例して増大し、速度上昇による衝撃増加の割合は K に殆ど関係しない。

3. (7) 式の級数の収斂は甚だよくないが、それは v の増加に伴う n^2 の増加が極めて緩慢であることが決定的原因で、 K が小さい程収斂は良好である。

4. 機関車の全体としては $W_i \sim y$ 曲線 (圖-3(d)) を影響線と考へて加算してゆけばよいが、速度上昇によりこの $W_i \sim y$ 曲線の peak の形が変化するため速度上昇により最大撓み、衝撃が若干増加するものと思ふが、更に計算を進めて確かめたい。

5. 曲げモーメントに関しては、 $M=-EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ より計算され、(7) 式に相当する式が得られるが、その \sum の中に n^2 が入るため、一層収斂が悪くなるので更に計算を進めなければならない。しかしその結果は大体において最大撓みと同様の結論が得られるものと思ふ。

5. 結 言 本文では弾性基礎にある梁の問題に関連して、軌條及び枕木の振動を理論的に取扱つて、撓みから衝撃を撓み及び曲げモーメントから破損

を極く一般的に説明する 1 資料を得ようとしたわけである。基礎の特質をとり入れた場合の解法は近く発表出来る見込である。今後撓乱荷重自身の慣性力は実験的に考究し、梁の回転慣性、剪断力、軸力の影響をもとり入れて行きたいと思う。更に基礎反力係数には土性論的、土質論的な検討を加へ、機関車の左右動、前後動、軌條の不整及び継目などについても考究を進めてゆく予定である。

ここに述べたものは極く基礎的のもので、理論的には上述の様な考究を進めると共に、軌條及び枕木について詳細な実測を行い、これらの動力学的諸性質を解明する予定である。終りに臨み終始御懇篤な御指導を賜つた京大教授石原、村山両博士に対し深謝の意を表したい。

参考文献その他 (1) S.Timoshenko; "Vibration Problems in Engineering", p.368.

(3) 小西一郎、後藤尙男; "橋梁橋脚の震害に関する動力学的考察、第 2 報" 関西工学連合講演会 (昭.4.10.15) にて講演、近く土木学会論文集に登載の予定

(3) Lord Rayleigh; "Theory of Sound", Vol.1, p.262~286

(4) 一般力の求め方は上掲文献 (1) p.348~370 参照

(5) 詳しくは上掲文献 (3) 参照。

(6) Inglis が 0~8~0 型機関車について実験より求めた値を C53 型に適用して $v=50\text{km/hr}$ に対して計算した値である、Inglis; "A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges". Cambridge (1934). 参照。

(7) 東福電鉄、東古市駅及び本丸岡駅構外で実測した枕木の振動試験 (昭.23.9) の記録より推定した値である。

フィーレンデール型二鉸拱橋の解法

准 員 内 田 一 郎*

THE SOLUTION OF TWO HINGED ARCH BRIDGE OF VIERENDEEL TYPE

Ichiro Uchida, C.E.Assoc. Member

従来充腹拱橋を解くには拱肋のみを考へて、支柱、床版等の影響を無視して居た。支柱床版等の影響を考

* 九州大学助教授

えた圖-1 の如き所謂フィーレンデール型の拱橋に関しては若干の研究はあるけれども、實際の設計に用いられるまでには至つていない。