説中盡し得ない点が多々あることゝ思ふ。御判読御叱正を乞う。さて吾々エンジニヤは一土木に限らず一諸外國に比し，科学研究に於ける基礎研究を最近余りにも蔑にする嫌がある。本論の如き極めて基礎的研究の方面には殆ど顧みる者がない。強ち應用研究乃至は生産研究のみが日本工学者の使命ではあるまいと思ふ。敢て後輩者，新進諸君に訴える次第である。

地震動を受ける桁の強制振動並に其の震度への直交函数系の應用

准員 安 部 清 孝*

FORCED VIBRATION OF A BEAM AFFECTED BY SEISMIC MOVEMENT AND APPLICATION OF THE ORTHOGONAL FUNCTION GROUP TO SOLVING ITS SEISMIC COEFFICIENT

(JSCE Feb. 1950)

Kiyotaka Abe., C.E.Assoc Member

Synopsis The author has tried to apply various orthogonal function groups which satisfy every boundary condition of a beam to the problem of determining the forced vibration and seismic coefficient of the beam forced by sinusoidal vibration. This article is aimed to show that those vibration or coefficient are not determined by a single element but by various factors suchas dimension of the structure, quality of the material, time duration of the seismici force, etc.

要　旨

桁の各種の境界條件を満足する各種の直交函数系を正弦的地震動を受ける桁の強制振動並に其の震度を求める問題に應用し，構造物の震度は地震々度以外に構造物の寸法，材質，更に地震動の作用時間等に依り決定されるものであつて，決して一意的に決定されるものではない事を示す一端としようとするのが本稿の要旨である。

I　桁の境界條件を満足する直交函數系

桁の長サを l とし，桁の一端に座標原点を取り，位置の変数を x とし，$\xi=\frac{x}{l}$ とし，直交函数系を η_n とする。

（1）單　桁

$$\eta_n=\sin\gamma_n\xi,\quad \gamma_n=n\pi\ (n=1,2,3\cdots\cdots\infty)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

（2）片持桁[1]

a）固定端に原点を取ると

$$\left.\begin{aligned}\eta_n&=M_n(\cosh\gamma_n\xi-\cos\gamma_n\xi)\\&\quad-N_n(\sinh\gamma_n\xi-\sin\gamma_n\xi)\\M_n&=\frac{1}{\cosh\gamma_n+\cos\gamma_n},\ N_n=\frac{1}{\sinh\gamma_n+\sin\gamma_n}\end{aligned}\right\}\cdots(2)$$

b）自由端に原点を取ると

$$\left.\begin{aligned}\eta_n&=M_n(\cosh\gamma_n\xi+\cos\gamma_n\xi)\\&\quad-N_n(\sinh\gamma_n\xi+\sin\gamma_n\xi)\\M_n&=\frac{1}{\cosh\gamma_n+\cos\gamma_n}\ N_n=\frac{1}{\sinh\gamma_n+\sin\gamma_n}\end{aligned}\right\}\cdots(2)'$$

茲に γ_n は

$$\cosh\gamma_n\cdot\cos\gamma_n=-1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)''$$

を満足する正の第 n 根とする。

（3）固定桁[2]

$$\left.\begin{aligned}\eta_n&=M_n(\cosh\gamma_n\xi-\cos\gamma_n\xi)\\&\quad-N_n(\sinh\gamma_n\xi-\sin\gamma_n\xi)\\M_n&=\frac{1}{\cosh\gamma_n-\cos\gamma_n},\ N_n=\frac{1}{\sinh\gamma_n-\sin\gamma_n}\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

茲に γ_n は

$$\cosh\gamma_n\cdot\cos\gamma_n=1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)'$$

を満足する正の第 n 根とする。

（4）自由桁[3]

$$\left.\begin{aligned}\eta_n&=M_n(\cosh\gamma_n\xi+\cos\gamma_n\xi)\\&\quad-N_n(\sinh\gamma_n\xi+\sin\gamma_n\xi)\\M_n&=\frac{1}{\cosh\gamma n-\cos\gamma_n}\cdot N_n=\frac{1}{\sinh\gamma_n-\sin\gamma_n}\end{aligned}\right\}\cdots(4)$$

茲に γ_n は

$$\cosh\gamma_n\cdot\cos\gamma_n=1\quad\cdots\cdots\cdots(4)'$$

を満足する正の第 n 根とする。

II　正弦的地震動を受ける桁の強制振動[4]

（1）　一般論

先づ正弦的に時間に依り変る強制力を受ける桁の強制振動を考へよう。

今桁の断面に2次率，彈性係数，單位長当りの質量

1) 方持梁の事である　2) 両端固定桁の事である
3) 両端自由桁の事であつて，之は普通彈性床上に置かれた桁を意味する。
4) 桁は等断面と仮定する。

* 建設省土木研究所技官

第 n 次の固有円振動数及び桁の單位長サ当りの彈性床係数を夫々 I, E, ρ, ν_n, ae とし，正弦的に変化する强制力の最大値を Y_o とし，其の强制作用の作用円振動数を ν とし，桁の境界條件を満足する直交函数系 η_n に依る Y_o の分布荷重展開强度を

$$p_o=\sum_{n=1}^{\infty} p_n\eta_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

とすれば桁の强制振動の基礎微分方程式は一般的に次の如く與へられる。

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+ae y=\sum_{n=1}^{\infty} p_n\eta_n\sin\nu t \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

玆に y は桁の任意点の任意時刻に於ける振動変位とし p_n は Y_o の η_n に関する展開係数とする。

若し桁が彈性床上に置かれていない場合には $ae=0$ と置けば良い。

桁の第 n 次の固有円振動数 ν_n は一般に次式の如く與へられる。

$$\nu_n=\sqrt{\frac{EI\gamma_n^4/l^4+ae}{\rho}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

桁が彈性床上にない場合には

$$\nu_n=\frac{\gamma_n^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)'$$

(6) 式を $t=0$ の時 $y=\frac{\partial y}{\partial t}=0$ なる初期條件を満足する様に解くと，所要の强制振動変位 y は次式の如く得られる。

$$y=\frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n\eta_n}{\nu_n^2-\nu^2}\left(\sin\nu t-\frac{\nu}{\nu_n}\sin\nu_n t\right) \cdots\cdots(8)$$

(2)正弦的地震動を受ける强制振動

此の場合の强制力は桁の全長上に等分布する地震力である。

今地震動の半振幅を e 震動週期を T，此の円振動を ν，主地震動が桁に作用し始めてから任意時刻迄の時間を t 地震々度を

$$k=\frac{e\nu^2}{g}=\frac{4e\pi^2}{gT^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

玆に　g：重力加速度

とし，地震動が最初押して來た場合 $i=1$ 最初引きで來た場合 $i=-1$ とすると，任意時刻 t に於ける地震動の変位は

$$\zeta=ie\sin\nu t=ie\sin\frac{2\pi}{T}t \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

にて與へられる。

依つて桁の全長上に作用する單位長当りの地震力は

$$Y=-\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=ie\rho\nu^2\sin\gamma t=ik\rho g\sin\nu t \qquad \cdots\cdots\cdots(11)$$

にて與へられ，其の最大数値は

$$Y_o=ik\rho g \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

にて與へられる。

此の Y_o を境界條件を満足する直交函数系 η_n を用いて展開した場合の展開係数 p_n は次の如く與へられる。

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{a) 單　桁：} & p_n=\dfrac{4ik\rho g\rho_n}{\pi_n} \\[2ex]
\text{b) 片持桁：} & p_n=\dfrac{2ik\rho g N_n}{\gamma_n M_n^2}\text{(固定端原点)} \\[2ex]
 & p_n=\dfrac{2ik\rho g N_n(-1)^{n-1}}{\gamma_n M^2}\text{(自由端原点)} \\[2ex]
\text{c) 固定桁：} & p_n=\dfrac{4ik\rho g N_n\rho_n}{\gamma_n M_n^2} \\[2ex]
\text{d) 自由桁：} & p_n=0
\end{array}\right\}\cdots(13)$$

玆に

$$\rho_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$$

次に各種の桁に此の震力 Y_o が作用する場合の桁の强制振動変位を示そう。

（1）單桁

$$y=4ikg\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n\sin n\pi\xi}{(\nu_n^2-\nu^2)\,n\pi}\left(\sin\nu t-\frac{\nu}{\nu_n}\sin\nu_n t\right)\cdots(14)$$

若し $\nu_m=\nu$ とすると

$$y=4ikg\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{\rho_n\sin n\pi\xi}{(\nu_n^2-\nu^2)n\pi}\left(\sin\nu t-\frac{\nu}{\nu_n}\sin\nu_n t\right)$$
$$+2ikg\frac{\rho_m\sin m\pi\xi}{\nu^2 m\pi}(\sin\nu t-\nu t\cos\nu t) \cdots\cdots\cdots(14)'$$

となる。

上式にて $\sum_{n=1}^{\infty}{}'$ は $\sum_{n=1}^{\infty}$ の中の $n=m$ なる項を除いた和とする。此の規約は以下の桁に就ても凡て同一の意味に適用するものとす。

（2）方持桁[5]

$$y=2ikg\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n\eta_n}{(\nu_n^2-\nu^3)\gamma_n M_n^2}\left(\sin\nu t-\frac{\nu}{\nu_n}\sin\nu_n t\right) \quad (15)$$

若し $\nu_m=\nu$ とすると

$$y=2ikg\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{N_n\eta_n}{(\nu_n^2-\nu^2)\gamma_n M_n^2}\left(\sin\nu t-\frac{\nu}{\nu_n}\sin\nu_n t\right)$$
$$+ikg\frac{N_m\eta_m}{\nu^2\gamma_m M_m^2}(\sin\nu t-\nu t\cos\nu t) \cdots\cdots\cdots(15)'$$

となる。

（3）固定桁

$$y=4ikg\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n N_n\eta_n}{(\nu_n^2-\nu^2)\gamma_n M_n^2}\left(\sin\nu t-\frac{\nu}{\nu_n}\sin\nu_n t\right) \quad (16)$$

若し $\nu_m=\nu$ とすると

$$y=4ikg\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{\rho_n N_n\eta_n}{(\nu_n^2-\nu^2)\gamma_n M_n^2}\left(\sin\nu t-\frac{\nu}{\nu_n}\sin\nu_n t\right)$$
$$+2ikg\frac{\rho_m N_m\eta_m}{\nu^2\gamma_m M_m^2}(\sin\nu t-\nu t\cos\nu t)\cdots\cdots\cdots(16)'$$

5) 原点を固定端に取る場合に就き論ずる事にする。

となる。

（4）自由桁

$$y=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

となる。即ち自由桁は全長に正弦的地震動を受けた場合は彈性振動はしない事になる。

▌正弦的地震動を受ける桁の震度

嚴密には桁の受ける震度は$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$の正の時間的最大値$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{max}$の重力加速度 g に対する比

$$\vartheta=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{max}/g \qquad (18)$$

に依つて定義されねばならないのであるが之は桁上の点の位置 $\xi=\frac{x}{l}$ に依り値が変るので ϑ の桁の全長に亘る平均値

$$K=\frac{1}{l}\int_0^l \vartheta dx=\frac{1}{g}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{max}d\xi \qquad (19)$$

を以つて便宜上桁の受ける震度と定義する事にしよう

一般に$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$の時間的最大値$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{max}$は

$$t=\frac{p\pi}{\nu}\ (p=1.2.3\ \cdots\infty) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

の時に得られるものである。

$$\left.\begin{array}{l} 今 \quad \frac{T}{T_n}=\frac{\nu_n}{\nu}=(1\pm\varepsilon_n)\ , \quad \varepsilon_n\geqq 0 \\ 玆に \quad T_n=\frac{2\pi}{\nu_n} \quad T=\frac{2\pi}{\nu} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(21)$$

と置き各種の桁に対してKの値を求め更に $\epsilon_n\neq 0$ 即ち共鳴振動をしない場合でも如何なる條件の下に何時 $K\geqq 1$ となるかを次に檢討しよう。

（1）單桁

$$K=\frac{8k}{\pi^2}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n(1\pm\varepsilon_n)\sin\varepsilon_n p\pi}{\varepsilon_n(2\pm\varepsilon_n)n^2}\right| \qquad (22)$$

若し $\nu_m=\nu$ の時は

$$K=\frac{4k}{\pi^2}\left|2\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{\rho\ (1\pm\varepsilon_n)\sin\varepsilon_n p\pi}{E_n(2\pm\varepsilon_n)n^2}+\frac{p\pi\rho_m}{m^2}\right| \cdots(22)'$$

となる。

上式に於ける/　/は絶対値を表はす記号とし，

$\rho_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$，$\rho_m\frac{1-(-1)^m}{2}$ とする。尙此の規約は以下同一の意味に適用するものとする。

$$今 \quad a=\frac{8k}{\pi^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

とし，$n=1$ なる第一項のみを取つて考へると，桁の第一次の固有振動週期 T_1 が

$$\frac{\sqrt{T^4+256e^2/g^2}-16e/g}{T}\leqq T_1\leqq\frac{\sqrt{T^4+256e^2/g^2}+16e/g}{T} \qquad (24)$$

の範囲内にあれば

$$p\geqq\frac{1}{\varepsilon_1\pi}\sin^{-1}\left\{\frac{\varepsilon_1(2\pm\varepsilon_1)}{a(1\pm_1\varepsilon)}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

を満足する最小の正の整数 p を用ひて

$$t=\frac{p\pi}{\nu} \qquad (26)$$

の時間の後に $K\geqq 1$ となる。

更に第一次の固有振動が共鳴するならば近似的に

$$p\geqq\frac{\pi}{4k} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

を満足する最小の正の整数 p を用ひて

$$t=\frac{p\pi}{\nu}$$

の時間の後に $K\geqq 1$ となる。

（2）片持桁

$$K=4k/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1\pm\varepsilon_n)N_n^2}{\varepsilon_n(2\pm\varepsilon_n)\gamma_n^2M_n^2}\sin\ \varepsilon_n p\pi/ \cdots\cdots(28)$$

若し $\nu_m=\nu$ の時は

$$K=2k\ /2\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{(1\pm\varepsilon_n)N_n^2}{\varepsilon_n(2\pm\varepsilon_n)\gamma_n^2M_n^2}\sin\varepsilon_n p\pi + p\pi\left(\frac{N_m^2}{\gamma_m^2M_m^2}\right)\Bigg| \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(28)'$$

となる。

$$今 \quad a=\frac{4kN_1^2}{\gamma_1^2M_1^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

とし，$n=1$ なる第一項のみ取つて考へると桁の第一次の固有振動週期 T_1 が

$$\frac{\sqrt{T^4+64e^2\pi^4N_1^4/g^2\gamma_1^4M_1^4}-8e\pi^2N_1^2/g\gamma_1^2M_1^2}{T}\leqq T_1 \leqq\frac{\sqrt{T^4+64e^2\pi^4N_1^4/g^2\gamma_1^4M_1^4}+8e\pi^2N_1^2/g\gamma_1^2M_1^2}{T} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

即ち $r_1=1.8751$，$M_1=\frac{1}{3.0376}$，$N_1=\frac{1}{4.1378}$ を代入すると

$$\frac{\sqrt{T^4+146.4487e^2/g^2}-12.1016e/g}{T}\leqq T_1 \leqq\frac{\sqrt{T^4+146.4487e^2/g^2}+12.1016e/g}{T} \cdots\cdots\cdots(30)'$$

の範囲内にあれば

$$p\geqq\frac{1}{\varepsilon_1\pi}\sin^{-1}\left\{\frac{\varepsilon(2\pm\varepsilon_1)}{a(1\pm\varepsilon_1)}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

を満足する最小の正の整数 p を用ひて

$$t=\frac{p\pi}{\nu}$$

の時間の後に $K\geqq 1$ となる。

更に第一次の固有振動が共鳴するならば近似的に

$$p\geqq\frac{\gamma_1^2M_1^2}{2k\pi N_1^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

を満足する最小の正の整数 p を用ひて

$$t=\frac{p\pi}{\nu}$$

の時間の後に $K \geqq 1$ となる。

(3) 固定桁

$$K=16k/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1\pm\varepsilon_n)\rho_n^2N_n^2}{\varepsilon_n(2\pm\varepsilon_n)\gamma_n^2M_n^2}\sin\varepsilon_n p\pi/\cdots\cdots(33)$$

若し $\nu_m=\nu$ の時は

$$K=8k/\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{(1\pm\varepsilon_n)\rho_n^2N_n^2}{\varepsilon_n(2\pm\varepsilon_n)\gamma_n^2M_n^2}\sin\varepsilon_n p\pi$$

$$+p\pi\left(\frac{\rho_m^2N_m^2}{\gamma_m^2M_m^2}\right)/\cdots\cdots(33)'$$

となる。

今 $$a=\frac{16kN_1^2}{\gamma_1^2M_1^2} \qquad (34)$$

とし $n=1$ なる第一項のみを取つて考へると，桁の第一次の固有振動週期 T_1 が

$$\frac{\sqrt{T^4+10.4e^2\pi^4N_1^4/g^2\gamma_1^4M_1^4-32e\pi^2N_1^2/g\gamma_1^2M_1^2}}{T}\leqq T_1$$

$$\leqq\frac{\sqrt{T^4+10.4e^2\pi^4N_1^4/g^2\gamma_1^4M_1^4-32e\pi^2N_1^2/g\gamma_1^2M_1^2}}{T}$$

$$\cdots\cdots(35)$$

即ち $\gamma_1=47.300$, $M_1=\frac{1}{56.6346}$, $N_1=\frac{1}{57.6432}$ を代入すると

$$\frac{\sqrt{T^4+185.6897e^2/g^2-13.6068e/g}}{T}\leqq T_1$$

$$\leqq\frac{\sqrt{T^4+185.6897e^2/g^2+13.6068e/g}}{T}\cdots\cdots(35)'$$

の範囲内にあれば

$$\rho\geqq\frac{1}{\varepsilon_1\pi}\sin^{-1}\left\{\frac{\varepsilon_1(2\pm\varepsilon_1)}{a(1\pm\varepsilon_1)}\right\}\cdots\cdots(36)$$

を満足する最小の正の整数 p を用ひて

$$t=\frac{p\pi}{\nu}$$

の時間の後に $K \geqq 1$ となる。

更に第一次の固有振動力が共鳴するとすれば近似的に

$$p\geqq\frac{\gamma_1^2M_1^2}{8k\pi N_1^2}\cdots\cdots(37)$$

を満足する最小の整数 p を用ひて

$$t=\frac{p\pi}{\nu}$$

の時間の後に $K \geqq 1$ となる。

以上を要するに横方向地震動を受ける桁の震度は，地震々度のみならず桁の特性即ち桁の彈性係数，断面二次率，單位長当りの質量，桁の長サ並に地震動の週期，半振幅，作用時間等に依り決定されるものであつて，或る一つの要素のみに依つて決定されるものではない。例へば今迄〝地震動に対する橋梁の水平方向の震度は 0.2とすべしと〟橋梁の示方書に一意的に規定してあつた事は明らかに誤ちである。又同じ水平震度と云つても橋軸に直角方向と橋軸方向とに於ける震度は理論的には明らかに異なるものであるにも拘はらず，両者に対して一率に 0.2 と規定した事も明らかに誤ちである。

Ⅳ結　語

各種の境界條件を満足する直交函数系に依り，正弦的地震動を受ける桁の強制振動変位を求め，更に其の桁の震度を求め以つて構造物の震度に関する昔時の概念の切替へに対する時暗示を與へたのが本稿であるが尙之等の直交函数系は Rayleigh-Ritz のエネルギー法に依る変断面桁の固有円振動数並に挫屈荷重を求める問題に有力に使用される事を附言して本稿を終る。

コンクリート・ダムの滑動安定度について(要旨)

正員　畑　野　　正*

SAFETY AGAINST SLIDING OF CONCRETE DAMS

(Abstract)　(JSCE Feb.1950)　*Tadashi Hatano C. E. Member*

本文は先に発表した同名の論文の概略を紹介したものであつて，その詳細は將來発行される学会論文集の原論文を参照され度い。

コンクリート・ダムの滑動の問題は，ダムの安定度を論ずる上に最も重要な事項の一つであるが，今まで殆ど適確に論ぜられた事がない様に思われる。我國に於てはダム全体に作用する水平力と垂直力の比を滑動係数としてこの値が，0.70～0.80 の程度に抑えられねばならないとされてゐるが，設計上の滑動係数の値は略々これに近いから，安全率は1と云う事になり，コンクリートや岩盤の強度の安全率とは余りに違い過ぎる。又水平力，垂直力としてダム全体に作用する水平力，底面全体に作用する垂直力をとつてゐるから，全体を一体として考えた，平均の滑動安定を論じてゐることになり，内部應力を精しく計算する行き方と矛盾した取扱いと云はねばならない。次に 0.70～0.80 と云う数値は後にも明になるが，全く附着してゐない平滑な円体面間の摩擦係数であつて実際に合致していないものである。アメリカに於ては，Henny の説に従つて次式が採用されてゐる。

* 日本発送電々力技術研究所主任研究員