

# 報 文

## コンクリートの弾性係数に就て

正員 高橋 逸 夫\*

### 緒 言

コンクリート及び鉄筋コンクリート構造物の設計に關する理論は鋼構造に比して不明瞭の點多く單に想像による事多し。その原因はコンクリートは弾性乏しく塑性(粘性)を多分に含む事による。又コンクリートは張力に弱くして壓力に對して比較的強い。然るにその壓強度の本質も極めて不確かである。何となればコンクリート供試體の抗壓強度なるものが實際に存在せずしてそれが支持力、剪斷力或は張力の形にて供試體は破壊するものである。従つて弾性もそれ等の應力に對して原形に復する性質にして張力に對する弾性係數とはその趣を異にする。尙コンクリートは張力に對して極めて弱きのみならず抗張強度の値が不均一で實驗に於て一定値を得る事は困難である。土木工學に於て基礎及土質の問題は難解のこと多く實地の經驗に俟たねばならぬもの多きと同様にコンクリート及鉄筋コンクリートの問題は試驗方法により又實驗者によつて多く異なる。

### 1. 物質の強度に關する假説

物質の外力に對する抵抗力即ち強度は物質内の二分子間に起る引力  $a$  (Attraction) 及び熱作用による斥力  $r$  (Repulsion) と外力  $P$  との間に平衡條件が成立して生ずるものである。今 圖-1 に於て  $m, m'$  を分子の核心とする。  $m, m'$  に二つの大きき等しくして反對の符號を有する力  $a$  及び力  $r$  が作用する。  $a$  及び  $r$  は 圖-2 に於て二點の距離  $x$  を横距とし、その引力  $a$  及び斥力  $r$  を縦距にとれば茲に  $A$  及び  $R$  なる二曲線を得る。この二曲線は共に二軸を漸近線と假定する。第三の曲線  $S$  は二力の差  $(a-r)$  を表はす。之は横軸  $X$  を  $B'$  及び  $C'$  に於て切る。即この二點は  $a=r$  である點である。この曲線の最大値を與ふる點は  $M$  にして Herman Hubert はこの曲線

を次式にて表はす。

圖-1.

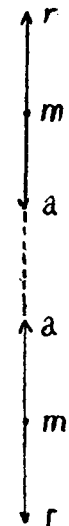
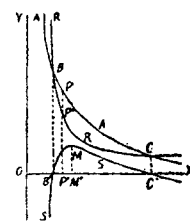


圖-2.



$$y = mm' \left( a - \frac{b}{x^n} \right) \frac{1}{x^p}$$

上式中  $y = a - r$ ,  $x =$  二分子間の距離,  $m, m'$  は分子量,  $a, b, n, p$  は常數を表はす。

$$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \text{ なる時 } y = 0$$

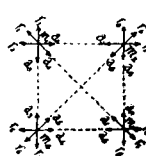
$$x = \sqrt[n]{\frac{b(n+p)}{ap}} \text{ なる時}$$

$$y_{max} = mm' \frac{a}{x^p}$$

$mm'$  の直線上に各分子に外力  $P$  が  $a$  と同一方向に働いたものとすれば  $P+a > r$  となり二分子は近づいて  $a'$  と  $r'$  なる力を生じて  $P+a'=r'$  即ち  $P=r'-a'$  となる。

かくて曲線  $S$  は常に平衡状態にある  $P$  なる力を表はすものである。即ち 圖-2 に於て  $P = P'P' - PP' = r' - a'$  又力  $P$  が反對の方向に作用すれば  $P = PP' - P'P' = a' - r'$  となる。但し  $P$  は最大値  $MM'$  より小なる事を要し、若し  $P$  がこの値を超過すれば分子は無限に離れて組織の破壊が起る。二分子  $m, m'$  が自由

圖-3.



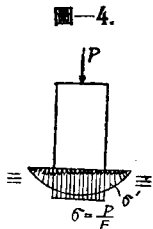
に運動し得る空間があれば  $P$  の作用によつて振動を生ずるも他の分子によつて運動が妨げられて變形及びそれに對して弾性が起る。圖-3 に示す如く四分子  $m_1, m_2, m_3, m_4$  を考へて  $m_1$  及び  $m_2$  に

\* 京都大學教授

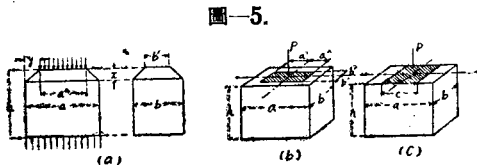
$\alpha_1$  の方向に  $P$  なる力を作用せしむればそれは  $m_3$ ,  $m_4$  に作用する引力及び斥力の影響を受ける  $P$  であらねばならぬ。而して  $P$  は張力又は壓力であり得る。

2. コンクリートの抗壓強度

(1) 支持力 廣い平面上の一定面積  $F$  を壓下する時には圖-4 に示す如き壓應力を生ずる。計算による平均壓應力  $\sigma = \frac{P}{F}$  は實際に生ずる壓應力  $\sigma'$  より大なるものである。従つてかかる場合には許容應力を大にとり得る。壓應力の分布は圖に示す如く壓下面より幾分大なる面積にて支持せられて且つ周囲の壓力の小さな部分が壓力の大なる部分の横に逃れんとする力を妨げる。



(2) 供試體の一部に荷重が加はる場合 圖-5 (a) に於て供試體の全面積を  $a \times b = F$  とし壓搾面を  $a' \times b' = F'$  とすれば、 $\sigma = \frac{P}{F}$  は  $\sigma' = \frac{P}{F'}$  に比して小である。又實驗上よりも圖-5 (b), (c) に示す如く立方體の上面の一部分に荷重が作用する時は立方體供試體より大なる強度となる。



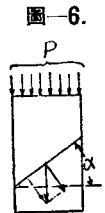
(3) 供試體の全面に力が作用する場合

(a) 剪斷力の不足から破壊する場合 之は Coulomb の説で圖-6 に示す如く壓力  $P$  を受けた場合  $\alpha$  なる面に沿ふ剪斷力によつて滑動し以て破壊するといふ説で  $K_s$  を滑動面の單位面積當りの抵抗力即ち抗剪強度とすれば  $P \sin \alpha$  は滑動面に沿ふ剪斷力であるから次の關係を得る。

$$P \sin \alpha = K_s \frac{F}{\cos \alpha}$$

$$\therefore P = K_s \frac{2F}{\sin 2\alpha}$$

従つて  $\sin 2\alpha$  が最大即ち  $\alpha = 45^\circ$  の時  $P$  は最小となる。而してその時  $P = 2K_s F$  となる。即ち  $P$  がこの値に達した時  $\alpha = 45^\circ$  なる面に沿ひ滑動し始めるといふ事になる。尙抗壓強度  $K_c < 2K_s$  なる時は  $P = K_c F < 2K_s F$  であるから  $\alpha = 45^\circ$  なる面に沿ふて滑動する以前に壓應力により粉碎する事となる。



又この理論に於て滑動面の摩擦抵抗  $f$  を考へると、

$$P \sin \alpha - f \cdot P \cos \alpha = K_s \frac{F}{\cos \alpha}$$

$$P(\sin \alpha - f \cos \alpha) = K_s \frac{F}{\cos \alpha}$$

$$P = K_s F \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha - f \cos^2 \alpha}$$

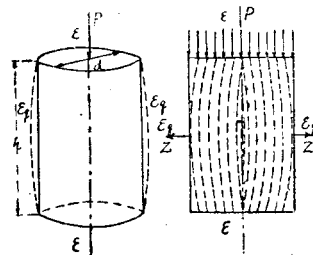
$$= K_s F \frac{2}{\sin 2\alpha - 2f \cos^2 \alpha}$$

故に  $\frac{d}{d\alpha}(\sin 2\alpha - 2f \cos^2 \alpha) = 0$  即ち  $\cos 2\alpha + f \sin 2\alpha = 0$  から  $\alpha$  を計算すれば滑動により破壊する場合の角  $\alpha$  を知る事が出来る。この説によれば立方體供試體を用ひて實驗する時圖-7 に示す形で破壊するから實際と能く一致することを知る。

(b) 横方向の張力の不足により破壊する場合 横變形  $\epsilon_q$  を考へる。即ち壓力による縦の變形を  $\epsilon$ 、コンクリートのポアソン比を  $m$  とすれば  $\epsilon_q = \frac{\epsilon}{m}$  従つて  $\sigma_{ct} = E_c \epsilon_q$  となる。コンクリートに対しては  $m = 6 \sim 10$  なる故に  $m = 8$ 、又  $E_{ct} = E_c$  とすれば

$$\sigma_{ct} = \frac{E_c \epsilon}{8} = \frac{\sigma_c}{8}$$

$\sigma_{ct}$  が  $\sigma_c$  の  $\frac{1}{8}$  以下なれば供試體は横の方向に膨張して張應力のため破壊する事になる。圖-8 に示す如く高さ  $h$  が直径  $d$  の二倍なる標準型の圓筒供試體の試験結果にあつては普通この種の狀態にて破壊するものである。



尙以上 (a), (b) の場合にその形は相似であつても寸法の大小によつて破壊強度は異なる。形の相似ならざるものの強度を異にするは勿論である。

(4) 試験桁に於て壓力側のコンクリートの強度不足により破壊する場合 抗張鐵筋を多量に挿入した鐵筋コンクリート試験桁に於て彎曲力率を受け、壓力

鋼コンクリートが破壊する場合には 圖-9 にも示す如く最大圧應力を受ける所は壓力側の一部分に過ぎないから立方體供試體より大なる應力に達し得るものと想像せられる。従つて桁の破壊彎曲力率を與へて普通計算によつてコンクリートの應力を計算した値は立方體壓應力より稍大なるものを與へる。

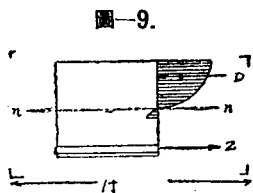


圖-9.

(5) 長柱として作用し破壊する場合 この場合は (4) と同様の状態で破壊する。

以上述べた如く供試體の形、寸法の異なるに従ひ、又抗壓供試體なると試験桁なるとによつて抗壓強度は異なるから、コンクリートの壓應力には絶対値は存在しない。

(6) 試験方法による強度の差異 コンクリートは使用材料の性質、配合、水セメント比、材齡、養生等を異にするに従つてその強度及び弾性係数を異にするは勿論、全く同種類でも試験結果は不均一である。又その試験方法に於ても大いに異なる。著者は次の方法によつたが之とて決して合理的なものではない。即ち圖-10 に示す如く荷重を二回づつ反覆して總變形と残留變形を定めて順次荷重を上昇せしめた。Prof Bach は荷重を幾回となく繰返して同一讀みに歸する時即ち最早それ以上の残留變形を生ぜざる時を以てその時の總變形とした。何回も繰返して變形が一致する點を見出す事は残留變形の多いコンクリートの如き供試體の試験には多くの時間を要し實際上用ひ難い。又第一回目の讀み即ち處女變形 (Jungfräuliche Dehnung) を取るも一方法であるが讀みが正確なりや否や

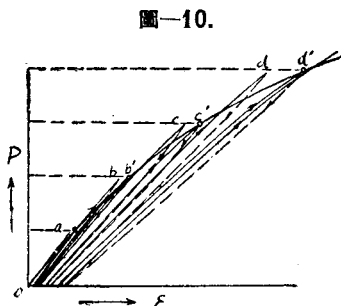


圖-10.

を知るために二回目の讀みを總變形とし、更に之を荷重零に戻した時の讀みを以て残留變形とし、又總變形

から残留變形を差引いたものを弾性變形とした。

### 3. 應力比 $(\frac{\sigma}{K_c})$ 變形圖

Schreyer 氏は Beton und Eisen 誌 1933 年號第 42 頁に於てコンクリートの應力  $\sigma$  を用ひずして應力  $\sigma$  の破壊強度  $K_c$  に対する比即應力比 (Relativespannung)  $(\frac{\sigma}{K_c})$  を用ひて單位變形  $\epsilon$  に對する平均應力變形圖を求めた。さればコンクリートの任意の應力  $\sigma = \zeta \cdot K_c$  に對する弾性係数は破壊強度  $K_c$  を與ふれば次式によつて求め得る。

$$E_c = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{d\zeta}{d\epsilon} \cdot K_c = \xi \cdot K_c$$

Schreyer 氏は 圖-11 に於て荷重の反覆回數に如何に拘らず處女變形が同一である事を示す。即ち曲線 A を荷重を反覆せず靜かに順次上昇せしめた場合の曲線にして、曲線 B は荷重を反覆せしめて得た處女曲線にして之等兩者の略一致する事實を示してゐる。又圖-12 は各種配合、材齡のコンクリートに對する個

圖-11.

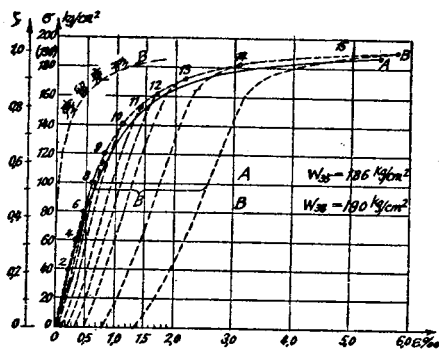
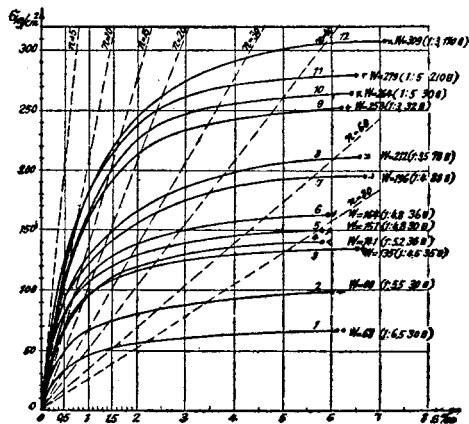


圖-12.



個の應力變形圖を示す。この曲線はコンクリートの強度に従つて色々の形をとるも之を應力比變形圖に纏れば 圖-13 に示す曲線を得る。但し實驗は立方體供試體に就いて行はれた。又この曲線を双曲線公式にて表はすを最も適當なりと證明した。

即ち次式を得る。

圖-13.

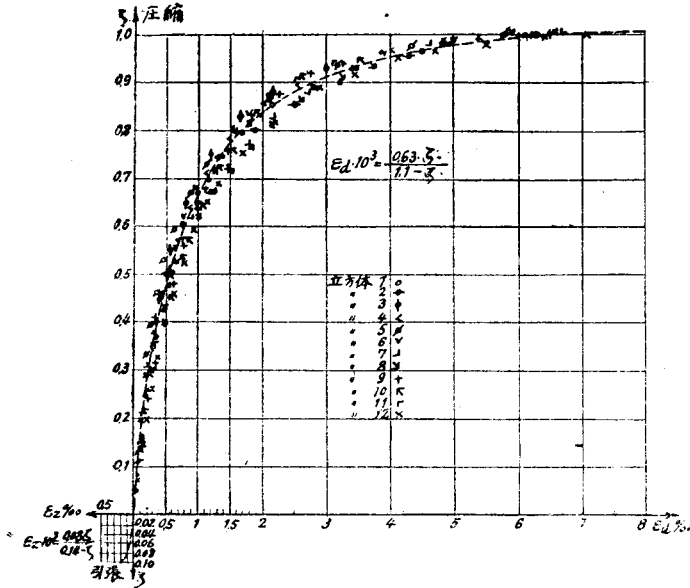
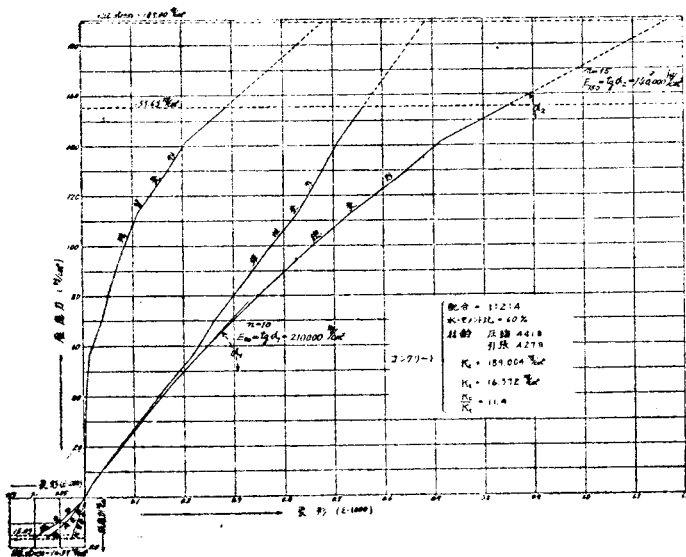


圖-14.



$$\epsilon = \frac{\alpha \zeta}{\beta - \zeta} \quad \text{或は} \quad \zeta = \frac{\beta \cdot \epsilon}{\alpha + \epsilon}$$

上式中  $\alpha, \beta$  は常數にして Schreyer の實驗の結果は抗壓試驗に對し  $\alpha=0.63, \beta=1.10$  又抗張試驗に對し  $\alpha=0.08, \beta=0.14$  を得た。

著者が桁の曲げ試驗に於て桁を造る毎に造つた抗壓抗張供試體は配合 1: 2: 4, 水セメント比 65% のコンクリートにして材齢は桁の試験の時まで經過したもので一定しないが、この試験の結果に Schreyer 氏の方法を應用した應力比變形圖を求める事とした。その抗壓供試體は直徑 15 cm, 高さ 30 cm の標準圓筒形にして、その中央 100mm を測長にとつた。この圖は 8 種の供試體の結果を綜合したものであるが、その内一例として供試體 (供試桁 No. 8, No. 9 に關するもの) を取つて應力に關する總、彈性、殘留變形及びそれ等の彈性係數及び變形率等を 表-1 に示した。又その總、彈性、殘留變形に對する應力變形曲線を 圖-14 に示す。

次に各種供試體の總變形について個々の曲線を應力比變形圖に變化して點を記入してそれ等の平均曲線を求めれば 圖-15 に示す通りである。

Schreyer 氏の方法に従つてこの曲線を双曲線を以て表はす。即ち

$$\epsilon = \frac{\alpha \zeta}{\beta - \zeta}$$

$$\text{又は} \quad \zeta = \frac{\beta \cdot \epsilon}{\alpha + \epsilon} \quad \dots \quad (a)$$

上式にて表はされたる曲線の切線の方法を求めれば

$$\frac{d\zeta}{d\epsilon} = \xi = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \epsilon)^2} \quad \dots \quad (b)$$

となる。軸の原點 0 に於ける切線の方法は

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\zeta}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} &= \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \quad \dots \quad (c) \end{aligned}$$



又双曲線公式の常數として  $\alpha=0.202$ ,  $\beta=0.287$  を得る。

抗張供試體 (No. 8, No. 9) の破壊抗張強度は  $K_t=16.57 \text{ kg/cm}^2$  にして計算による  $E_{ct}$  と實驗値  $E_{ct}$  とを比較して表に示した。而して兩者はよく一

表-5.

應力比 = 30% コンクリート 抗張弾性係數					
$G(\%)$	$\frac{\sigma}{K_t}$	$1000 \cdot \epsilon$	$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = E$	$E_{ct} = K_t \cdot \xi$	實驗値 $E_{ct} (\text{kg/cm}^2)$
0	0	0	14200	235,300	—
1.45	0.0875	0.00453	13591	225,200	312,400
2.58	0.1557	0.00969	12937	214,400	219,000
3.72	0.2245	0.01498	12314	204,000	215,500
4.85	0.2927	0.02122	11635	192,800	181,100
5.98	0.3607	0.02910	10855	179,900	143,400
7.11	0.4291	0.03542	10285	170,400	178,300
8.24	0.4973	0.04187	9748	161,500	175,200
9.37	0.5655	0.04827	9256	153,400	176,600
10.51	0.6343	0.05777	8591	142,400	120,000
11.64	0.7025	0.06524	8118	134,500	151,300
12.77	0.7707	0.07333	7645	126,700	138,300
13.90	0.8389	0.08136	7070	117,100	102,900
15.03	0.9071	0.09318	6654	110,300	128,100
16.57	1.0000	—	—	—	—

$\xi = \frac{\beta \cdot E}{\alpha + E}$      $\alpha = 0.202$      $K_t = 16.57 \text{ kg/cm}^2$   
 $\beta = 0.287$

致する。

Schreyer 氏の實驗は立方體供試體については、著者の實驗は圓筒供試體については行はれたもので、その兩曲線を圖-15 及び圖-17 に示し比較した。尙この實驗公式は多數の實驗結果の平均を曲線として表はすものであるから常數  $\alpha$ ,  $\beta$  の値を異にするのであるが公式の結果と實驗數値とは能く一致する。著者が大正 10 年土木學會誌に發表した弾性係數に関する實驗に於て軟練 (W) と硬練 (D) とに二大別し配合 1: 2: 3, 1: 2: 4, 1: 2.5: 4, 1: 2.5: 5, 1: 3: 5, 1: 3: 6 なる六種のコンクリート供試體材齡一ヶ月の

圖-16.

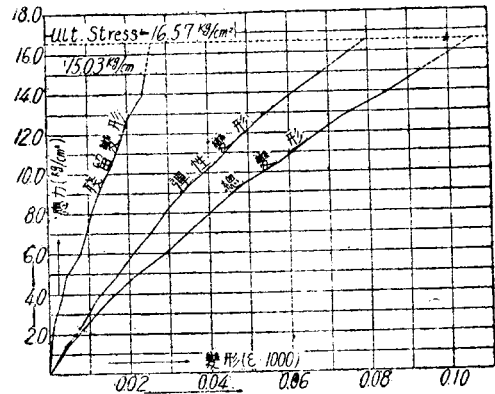


圖-15.

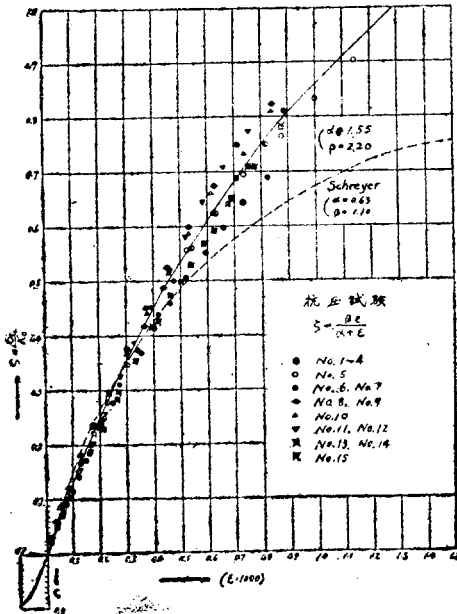


圖-17.

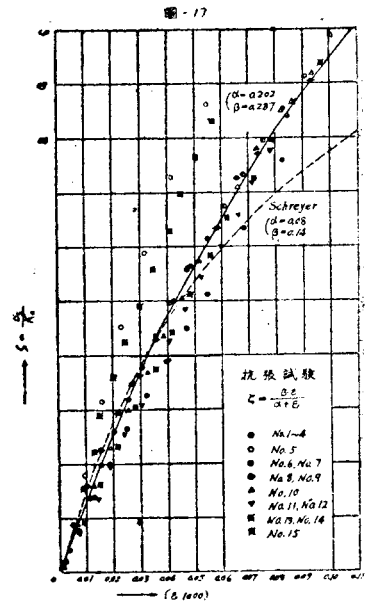


圖-18.

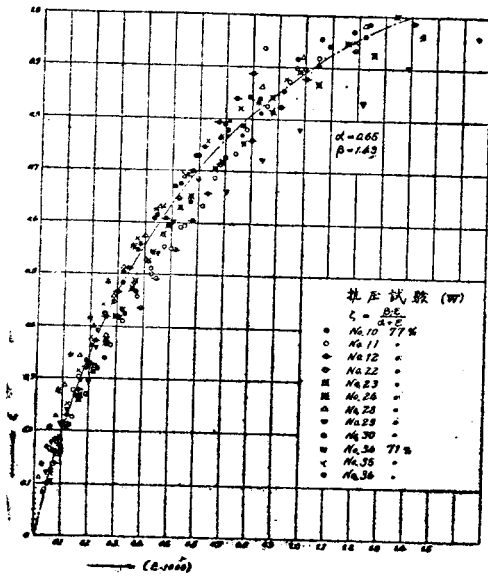
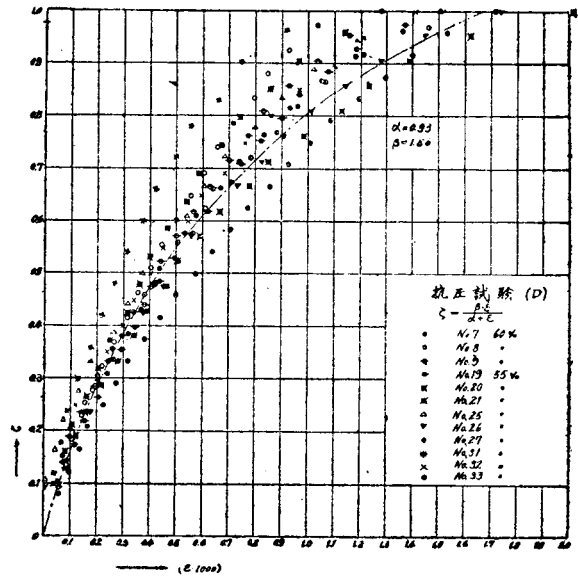


圖-19.



ものにつき Schreyer 氏の曲線を求むれば 圖-18, 圖-19 に示す如くであつて, その双曲線公式

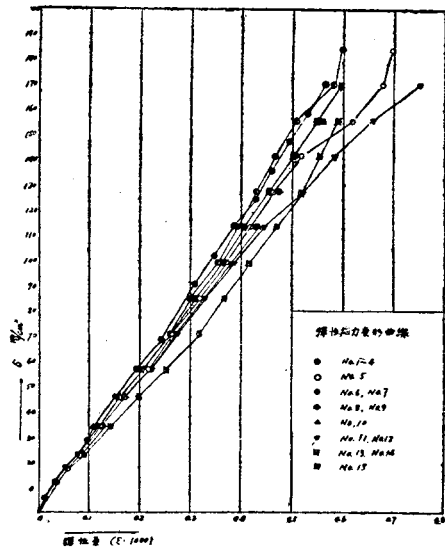
$$\zeta = \frac{\epsilon\beta}{\alpha + \beta}$$

中の常数は硬練コンクリートに對し  $\alpha = 0.93$ ,  $\beta = 1.56$  又軟練コンクリートに對し  $\alpha = 0.65$ ,  $\beta = 1.43$  なる結果を得る。

4. 弾性變形の應力變形圖

既に表-1 及び 圖-14 に示す如く抗壓弾性係數に關する限り弾性係數の應力變形圖は曲線にあらずして寧ろ直線に近い。即ち弾性係數  $E_c$ , 變形率  $\alpha = \frac{1}{E_c}$  及び弾性比  $n$  の値は一定値をとる。8 種の供試體について弾性變形による應力變形圖を描けば 圖-20 に示す如くであつてその状況を知ることが出来る。供試體 (桁 No. 8, No. 9 に關するもの) 配合 1: 2: 4, 材齡 441 日のみについて言へば平均値として  $E_c = 277560 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 3.6 \cdot 10^{-6}$ ,  $n = 7.6$  を得る。この結果はコンクリートの弾性係數は應力の増加と共に減少するといふ一般概念と異なる。又コンクリートの殘留變形の量は荷重の増加と共に益々多く, 總變形より之を差引けば弾性變形は小となり, 弾性係數は應力の増

圖-20.



加と共に却つて小となることがある。

(昭 23. 4. 7 受付)