等强梁及び等强柱に就て (II)

正員　倉　田　宗　章*

2. 矩形斷面梁

此場合も等强梁の場合と同樣斷面の高さ及底邊の兩方を同時に變化せしむる事は出來ない，いづれか一方を一定とすれば梁形は次の各式で表はされる，w を底邊，$2h$ を高さとせば

a) 單一集中荷重を受くる場合

1. 底邊：w＝一定の場合

$$\left.\begin{array}{ll}[0<x<a]: & h=K\left(\frac{bb'}{l^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \\ {[a<x<a']}: & h=K\left(\frac{ab'}{l^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \\ {[a'<x<l]}: & h=K\left(\frac{aa'}{l^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(18)$$

上式が最小撓みの梁形を表はす場合には：

$$K=\frac{V}{2wlC}$$

最小體積の梁形を表はす場合には：

$$K=\left(\frac{3PC}{2Ew\eta}\right)^{\frac{1}{3}}l$$

但し $C=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{bb'}{l^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{aa'}{l^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}+\left(\frac{ab'}{l^2}\right)^{\frac{1}{4}}S$

玆に $S=0.8\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{5}{4}}-\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{5}{4}}\right\}$

$$-0.111111\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{9}{4}}-\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{9}{4}}\right\}$$

$$-0.028846\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{13}{4}}-\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{13}{4}}\right\}$$

$$-0.012868\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{17}{4}}-\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{17}{4}}\right\}$$

$$-0.007162\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{21}{4}}-\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{21}{4}}\right\}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又 V と η との間の關係は

$$V^3=12C^4\frac{Pl^6w^2}{E}\cdot\frac{1}{\eta}$$

2. 高さ：h＝一定の場合

$$\left.\begin{array}{ll}[0<x<a]: & w=K\left(\frac{bb'}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{l}\right) \\ {[a<x<a']}: & w=K\left(\frac{ab'}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \\ {[a'<x<l]}: & w=K\left(\frac{aa'}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{l}\right)\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(19)$$

上式が最小撓みの梁形を表はす場合には：

$$K=\frac{V}{2hlC}$$

最小體積梁を表はす場合には：

$$K=\left(\frac{3PC}{2Eh^3\eta}\right)\cdot l^3$$

但し $C=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{bb'}{l^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{l}\right)^{2}+\left(\frac{aa'}{l^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b'}{l}\right)^{2}\right\}+\left(\frac{ab'}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}S$

玆に $S=0.333333\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$

$$-0.2\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{5}{2}}-\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}$$

$$-0.013889\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{9}{2}}-\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{9}{2}}\right\}$$

$$-0.007102\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{11}{2}}-\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{11}{2}}\right\}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又 V と η との關係は

$$V=3C^3\frac{Pl^4}{Eh^2}\cdot\frac{1}{\eta}$$

b) 等布荷重を受くる場合

1. w＝一定の場合

$$\left.\begin{array}{ll}[0<x<a']: & h=K\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \\ {[a'<x<l]}: & h=K\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(20)$$

上式が最小撓梁を表はす場合には：

$$K=\frac{V}{2wlS}$$

最小體積梁を表はす場合には：

$$K=\left(\frac{3qS}{4Ew\eta}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot l^{\frac{4}{3}}$$

但し $S=0.666666\left\{\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{y'}{l}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$

$$-0.1\left\{\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{5}{2}}+\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}$$

$$-0.026786\left\{\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{7}{2}}+\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{7}{2}}\right\}$$

* 北海道大學助教授

$$-0.012153\left\{\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{9}{2}}+\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{9}{2}}\right\}$$

$$-0.006836\left\{\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{11}{2}}+\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{11}{2}}\right\}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又 V と η との關係は

$$V^3=6C^4\frac{ql^7w^2}{E}\cdot\frac{1}{\eta}$$

2. $h=$一定の場合

$$[0<x<a']:\quad w=K\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{l}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$[a'<x<l]:\quad w=K\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

上式が最小撓梁を表はす場合には：

$$K=\frac{V}{2hlS}$$

最小體積梁を表はす場合には：

$$K=\left(\frac{3qS}{4Eh^3\eta}\right)l^4$$

但し
$$S=0.5\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^2\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b'}{l}\right)^2\right.$$

$$-1.666666\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^3\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b'}{l}\right)^3\right\}$$

$$-0.031250\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^4\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b'}{l}\right)^4\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$-0.0125\left\{\left(\frac{a'}{l}\right)^5\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b'}{l}\right)^5\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$-0.00651\left\{\left(\frac{b'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a'}{l}\right)^6+\left(\frac{b'}{l}\right)^6\left(\frac{a'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

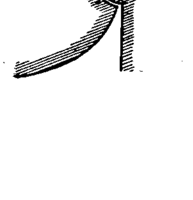
又 V と η との關係は

$$V=1.5\,S^2\frac{ql^5}{Eh^2}\cdot\frac{1}{\eta}$$

[4] 等強梁の增補に關する一考察

一般に梁の問題では曲げモーメントの影響のみを採るから此に依り梁形を決定する場合モーメントが零の箇所卽支點位置に於て梁斷面が消失する事となり剪斷力に對する困難が生ずる爲に支點構造としては剪斷力に耐へる程度に於て圖—5の如き形態のものでなければならない，實用上からは適當な曲線を以て梁形の增補を行ひ剪斷力の影響をカバーしてゐる樣であるが今上來示す如く一般に等强梁が歪エネルギーを最小ならしむる如き梁形である點に鑑み次の如き增補が考へられる，嚴密に言へば梁形が一樣斷面でなければ其の斷面變化に伴ひ斷面内の剪斷應力の分布狀態は次第に異るが[1]斷面全體としての效果に於て一樣斷面の場合を以て換へ得るもの假定すれば剪斷力の影響も考へに入れた場合の歪エネルギーは，Q を剪斷力とせば

圖—5.



$$W=\frac{M^2}{2EI}+\frac{\kappa Q^2}{2GA}$$

但し κ は斷面の形狀に關する係數

矩形斷面に對しては　$\kappa=1.2$

圓形斷面に對しては　$\kappa=1.19$

今一例として幅 $w=$一定，高さ $2h$ の變化する矩形斷面梁を採れば

$$I=\frac{2}{3}wh^3\qquad A=2wh$$

最小歪エネルギー梁形は

$$\frac{\delta W}{\delta h}+\lambda\frac{\delta A}{\delta h}=0$$

故に
$$\frac{9M^2}{4Ewh^4}+\frac{0.3Q^2}{Gwh^2}-2\lambda w=0$$

G は剛性係數で

$$G=\frac{m}{2(1+m)}E\qquad m:\ \text{ポアソン數}$$

なる關係があるから上式は

$$\frac{1}{wE}\left\{\frac{9M^2}{4h^4}+0.6\left(\frac{1+m}{m}\right)\frac{Q^2}{h^2}\right\}-2\lambda w=0$$

となる，鋼に對しては $m=3$ とすれば h の決定式として

$$\frac{9}{4}M^2+\frac{4}{5}Q^2h^2-2\lambda Ew^2h^4=0\cdots\cdots\cdots(21)$$

を得る $M=0$ の位置では上式は

$$\frac{4}{5}Q^2-2\lambda Ew^2h^2=0\qquad\therefore\quad\frac{Q}{2wh}=\left(\frac{5}{8}\lambda E\right)^{\frac{1}{2}}$$

となるから，此位置に於ける平均剪斷應力を τ_m とすれば

$$\tau_m=\frac{Q}{2wh}=\left(\frac{5}{8}\lambda E\right)^{\frac{1}{2}}$$

此よりパラメーター：λ が決定され梁形は (21) 式で與へられる，集中荷重 P が中央に載る場合には

$$M=\frac{Px}{2}\quad\text{であるから}\quad\frac{2\lambda Ew^2l^2}{P^2}=K\ \text{とおいて}$$

1) H. Lorenz "Technische Elastizitätslehre" S. 155.

梁形は (21) より

$$2.25\left(\frac{x}{l}\right)^2+0.8\left(\frac{h}{l}\right)^2-4K\left(\frac{h}{l}\right)^4=0 \cdots\text{(i)}$$

となる，自重の影響を考へぬ場合 $l=60\text{cm}$, $P=2400\text{kg}$ $w=5\text{ cm}$ 及 $\tau_{max}=900\text{ kg/cm}^2$ なる如くするものとせば例の如く

$$\tau_m=\frac{2}{3}\times 900=600\text{ kg/cm}^2$$

故に $M=0$ の箇所に於ける所要斷面積:

$$\frac{1200}{600}=2\text{ cm}^2 \qquad \therefore\ 2h=0.4\text{ cm} \qquad h=0.2\text{ cm}$$

$x=0$ で $M=0$ であるから (i) より

$$0.8-4K\left(\frac{0.2}{60}\right)^2=0$$

$$\therefore\quad K=18000$$

最大曲げモーメントの生ずる梁中央斷面の最大纖維應力 σ_{max} を調べると (i) より

$$2.25\left(\frac{1}{2}\right)^2+0.8\left(\frac{h}{l}\right)^2-4\times 18000\left(\frac{h}{l}\right)^4=0$$

$$\therefore\quad \left(\frac{h}{l}\right)^2=0.00281 \qquad \text{從て}\quad h=3.175\text{ cm}$$

$$\therefore\quad \sigma_{max}=1071\text{ kg/cm}^2$$

となる。梁中央位置に於いて梁高を等しくする增補を施さぬ場合の梁形を比較すれば，**表—1** に示す如く，支點附近に於いて多少の差異が見られる丈である。尙參考の爲增補した梁の緣纖應力を附記した。

表—1.

x/l	等強梁の h (cm)	增補梁の h (cm)	差 (cm)	增補梁の σ_{max} (kg/cm²)
0	0	0.200	0.200	0
1/200	0.318	0.350	0.032	881.
1/100	0.449	0.471	0.022	972.
1/16	1.123	1.129	0.006	1059.
1/8	1.588	1.592	0.003	1065.
2/8	2.245	2.247	0.002	1069.
3/8	2.750	2.751	0.001	1070.
1/2	3.175	3.175	0	1071.

荷重が等布荷重ならば (强度: q kg/cm)

$$M=\frac{blx}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

$$Q=ql\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right)$$

であるから (21) 式により梁形は

$$\frac{9}{16}\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1-2\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right)+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\frac{h}{l}\right)^2-K\left(\frac{h}{l}\right)=0 \quad \cdots\text{(ii)}$$

で表はさる。

今 $q=40\text{ kg/cm}$, $l=60\text{ cm}$, $w=5\text{ cm}$ とし

$$\tau_{max}=900\text{ kg/cm}^2$$

なる如くするものとせば

$$\tau_m=\frac{2}{3}\times 900=600\text{ kg/cm}^2$$

故に $x=0$ 及 $x=l$ に於て $h=0.2\text{ cm}$ なる事を要し從て (ii) 式より $K=18000$ を得る。此場合 $\frac{x}{l}=\frac{1}{2}$ に於ける h 及緣纖應力 σ_{max} は次の如くなる。

$$h=2.243\text{ cm} \qquad \sigma_{max}=1073\text{ kg/cm}^2$$

因に等強梁は通常外力に比し自重の無視し得る場合を取扱うが自重を考慮する場合に就いて愛知博士の研究[2] がある。

[5] 軸方向壓力を受ける等强柱[3]

以上横荷重を受ける梁の最大抵抗形を歪エネルギーの見地より考察したが同様の觀點から軸壓力を受ける場合に就いて考究してみる。

先づ例として一端固定他端自由なる圓形斷面柱を考へる挫屈荷重をエネルギー法に依つて求めるには始めに撓曲線を假定しなければならない，今假定曲線として一様斷面の柱が軸荷重に依り僅か撓曲した時の曲線を用ひる事とすれば撓曲線は次式で表はされる。

$$y=\delta\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

但し原點を固定端に採り挫屈前の柱軸を x 軸，此に直角方向に y 軸を採り自由端に於ける最大撓み量を δ とし，柱の長さを l とす。

故に任意斷面に於ける曲げモーメント M_x は

$$M_x=P\delta\cos\frac{\pi x}{2l}$$

從て歪エネルギー W は

$$W=\int_0^l\frac{M_x^2}{2EI}dx=\frac{2P^2\delta^2}{E\pi}\int_0^l\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}{r^4}dx \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

2) 愛知敬一 "自身の重さを計算に入れたる場合に Uniform Strength の Beam" 機械學會誌第 22 卷第 54 號。尙自重のみを受ける片持梁に關しては，J. Prescott "Applid Elasticity" §. 67. p. 67.

3) Column of Uniform Strength.

柱の體積 V は

$$V=\int_0^l \pi r^2\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23')$$

δ は任意常數と見做して (23) 式の積分の係數全體を λ に含めて歪エネルギーを最小にする柱形として次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{r^4}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2l}\right)+\lambda\pi r^2\right\}=0\cdots\cdots(24)$$

扨柱が軸壓力 P を受けて僅か挫屈した時の P の爲す仕事 T は[4]

$$T=\frac{P\delta^2\pi^2}{16\,l}$$

$$\therefore\quad T=W$$

とおいて

$$\frac{E\pi^3}{32lP}=\int_0^l\frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2l}\right)}{r^4}dx\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

卽 (24) 式は (25) 式を最小にする梁形を表はしてゐる事となる換言せば最大の P（挫屈荷重）を與へる梁形を表はす事が解る。

(24) 式より第一近似梁形として

$$r=\left(\frac{2}{\lambda\pi}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

を得る λ を V で表はす爲に上式を (23′) 式に代入すれば

$$V=\left(\frac{2}{\lambda\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\pi\int_0^l\left(\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^{\frac{2}{3}}dx$$

$$=\left(\frac{2}{\lambda\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\pi}\,l\frac{\Gamma\left(\dfrac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{4}{3}\right)}$$

$$\left(\frac{2}{\lambda\pi}\right)^{\frac{1}{3}}=K \qquad \text{とおけば}$$

$$K=\frac{V\Gamma\left(\dfrac{4}{3}\right)}{l\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{5}{6}\right)}=0.4452\frac{V}{l}$$

從て $\quad r=(K)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\dfrac{\pi x}{2l}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=0.66723\left(\frac{V}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

然るに撓曲線を最初に假定してゐるから近似度を高める必要がある。其爲，所謂 Successive Approximation を行ふ。而し (27) 式より新な撓曲線を計算する事は容易でない，此場合には圖式法が便利に用ひられる[5]。

今撓曲線を

$$y=\delta f\left(\frac{x}{l}\right)$$

なる形に書けば (26) 式は次の形で表はされる

$$r=\left(\frac{2}{\lambda\pi}\right)^{\frac{1}{6}}f\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}=K^{\frac{1}{2}}\cdot f^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots(28)$$

新な撓曲線を求める爲に彈性荷重 w は

$$w=\frac{P\cdot\delta\cdot J}{EI}$$

$\dfrac{x}{l}=0$ で $I=I_0$ となるものとして

$$\frac{I}{I_0}=\frac{\pi r^4}{\pi r_0^4}=\left(\frac{r}{r_0}\right)^4=\mu$$

（但し r_0 は $x=0$ に於ける r）

とおけば $\qquad w=\dfrac{P\delta}{EI_0}\left(\dfrac{f}{\mu}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$

である。作圖に依り撓曲線を求め f の値を各位置に於て計測すれば (28) 式に依つて其位置に於ける r が定まる然るに係數 K は $V=$一定の條件より定めねばならないから

$$V=\int_0^l\pi r^2dx=\int_0^l\pi Kf^{\frac{2}{3}}\,dx\doteqdot\pi K\sum_n\{f_n^{\frac{2}{3}}\triangle x\}$$

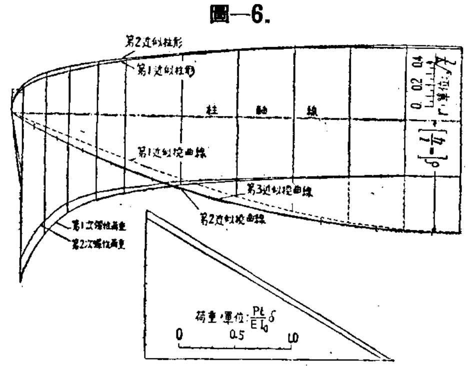
と書けば

$$K=\frac{V}{\pi\sum\limits_n\{f_n^{\frac{2}{3}}\triangle x\}}=\frac{0.3183}{\sum\limits_n\left\{f_n^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{\triangle x}{l}\right)\right\}}\frac{V}{l}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

此より K を算定する事が出來る。玆に分母の Σ は積分に代へるものであるからシンプソンの $\dfrac{1}{3}$ 則を用ひると精度を高め得る，かくて第二近似形が得られ，

圖—6.



4) Timoshenko "Theory of Elastic Stability" p. 79.

5) Timoshenko "Theory of Elastic Stability" p. 132.

更に新な撓曲線を描いて次第に近似の度を高める事が出來る。著者の經驗に依れば第二近似形に依り描いた第三近似撓曲線は第二近似撓曲線と事實上殆ど一致し第三近似形は求めるに及ばない事が解つた。その作圖經過は圖―6 及表―2 の如くである。

表―2.

x/l	第1近似: f (22) より計算	第1近似: r	第2近似: f 図より計測	第2近似: r
0	1.000 δ	$0.667\sqrt{\frac{V}{l}}$	1.000 δ	$0.649\sqrt{\frac{V}{l}}$
1/8	0.980	0.663	0.985	0.646
2/8	0.924	0.650	0.944	0.637
3/8	0.831	0.627	0.875	0.621
4/8	0.707	0.594	0.775	0.596
5/8	0.554	0.548	0.640	0.560
6/8	0.383	0.484	0.470	0.505
7/8	0.194	0.386	0.265	0.417
39/40	0.038	0.224	0.060	0.254
79/80	0.019	0.178	0.030	0.202
l	0	0	0	0

以上の計算に於て彈性荷重 w が $\frac{x}{l}=1$ で常に ∞ となる不都合が生じ作圖が困難となるから自由端附近の部分（本例では $\frac{39}{40}\leqq\frac{x}{l}\leqq 1$ の區間を採つた）は I の平均値を以て代用した[6)]。

斯くて第二次撓曲線の極距は圖より計測して

$$\text{極距:}\quad 2.14\frac{Pl}{EI_0}\delta=2.14\left(\frac{\delta}{l}\right)\left(\frac{Pl^2}{EI_0}\right)=0.535\left(\frac{Pl^2}{EI_0}\right)$$

$$\therefore\quad 0.535\frac{Pl^2}{EI_0}\delta=\delta \quad \text{とおいて}$$

挫屈荷重は $\quad P_{cr}=1.871\frac{EI_0}{l^2}$

又 $\quad I_0=\frac{\pi r_0^4}{4}=0.044\frac{\pi V^2}{l^2}$ であるから

$$P_{cr}=0.083\frac{\pi EV^2}{l^4} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

比較の爲に圓形等斷面の柱に就いては

$$P_{cr}'=\frac{\pi EV'}{16l^4}=0.0625\frac{\pi EV'^2}{l^4}\cdots\cdots\cdots(32)$$

同一挫屈荷重に對する兩者の體積を比較してみると

$$P_{cr}=P_{cr}'$$

とおいて $\quad 0.083\frac{\pi EV^2}{l^4}=0.0625\frac{\pi EV'^2}{l^4}$

$$\therefore\quad \frac{V}{V'}=0.867$$

此は Clausen が與へた數値 $\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$ と一致する[7)]。又逆に P_{cr} が與へられた時最有効の柱形を定むるには (31) 式により V を決定すれば $\sqrt{\frac{V}{l}}$ が定まり r が求められる。

次に此の柱形が等強柱なる事は次の如くにして解る。

撓曲線: $y=\delta\cdot f$ に依る曲げモーメント M は

$$M=P\cdot\delta f$$

(28) 式より $\quad I=\frac{\pi r^4}{4}=\frac{\pi}{4}K^2 f^{\frac{4}{3}}$

故に任意斷面に於ける纎維應力 σ_{max} は

$$\sigma_{max}=\frac{M}{I}r=\frac{4P\delta\cdot f}{\pi K^2 f^{\frac{4}{3}}}K^{\frac{1}{2}}f^{\frac{1}{3}}=\frac{4P\delta}{\pi K^{\frac{3}{2}}}$$

表―3.

a/l	σ_{max}
0	$3.66\left[\delta/\left(\frac{V}{l}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\left[\frac{4P}{\pi}\right]$
1/8	3.65
2/8	3.66
3/8	3.66
4/8	3.66
5/8	3.64
6/8	3.64
7/8	3.63
39/40	3.75
79/80	3.75
l	0

即 σ_{max} は $f\left(\frac{x}{l}\right)$ に無關係となる從て $\frac{x}{l}$ に無關係であるから等强柱に他ならない實際の計算結果は表―3 に示す如くであつて自由端に於て平均慣性能率を代用した爲約 3% 程度の影響が表はれてゐる。

最後に (31) (32) の兩式に於て $V=V'$ とおけば

$$P_{cr}=1.328P_{cr}'$$

愛知博士は Column of Uniform Strength と最大纎維應力を等しくする Ordinary column の $\frac{x}{l}=0$ に於ける柱の Width は前者の $\frac{1}{4}$ 倍であつて其時の兩者の挫屈荷重の比

$$\frac{P_{cr}}{P_{cr}'}=2.37$$

なる事を述べて居られる[8)]。

6) 樋浦太三 "撓角撓度法による構造物安定論" 土木學會誌 第 26 卷第 10 號 p. 941.

7) I. Todhunter, K. Pearson "A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials" Vol. II. Part. 1 p. 327. Timochenko "Theory of Elastic Stability" p. 132. 小野鑑正 "On the Stability of Long Struts of Variable Section" 九大工紀要第 1 卷 p. 404.

8) 愛知敬一 "井口教授著 Column of Uniform Strength の論文への Supplementary note" 機械學會誌第 22 卷第 54 號。

今表—2より $\frac{x}{l}=0$ に於ける r は $0.649\sqrt{\frac{V}{l}}$ である。故に此の $\frac{3}{4}$ 倍を半徑とする等斷面柱の體積 V' は

$$V'=\pi r^2 l=\pi\left(\frac{3}{4}\times 0.649\right)^2\frac{V}{l}l$$

$$\therefore\quad \frac{V}{V'}=1.343$$

$$\therefore\quad \frac{P_{cr}}{P_{cr}'}=1.328\left(\frac{V}{V'}\right)^2=2.39$$

卽大體一致する。

上記の方法は斷面形が正方形，矩形，其他の場合でも應用出來る事は言うまでもない。誤差も實用上差支へない程度と思はれる又兩端廻轉體の柱の場合には前記の柱形を固定端を中點として二個對稱に連結したものとなる事は論を待たない。

結　語

以上梁，柱の最も有効なる形態と言う事に關し古くより論ぜられてゐる問題に就き變分學の簡單な理論を利用して比較的包括的に取扱つてみた心算である。而して最小歪エネルギーも最小撓みの梁形も最小體積の梁形も結局同一物であり大低の場合等强梁である事を明かにした。

最後に日頃御指導を辱ふしてゐる井口鹿象博士並に土木教室教官各位に謝意を表す。(完)

(昭. 21. 9. 20. 受付)

停　年　退　職　の　辭

正員　工學博士　田　中　豐*

今日此の紙上に於て所感の一端を述ぶる機會を得ましたことは洵に欣快に堪へません。私は大正2年東大を卒業し，大正14年以來東大教授の職をけがし，停年の故を以て今春再び卒業せんとして居るものであります。過去35年間の技術生活を顧みるとき，東大に於ける20有餘年の大學生活は幸福にして思出多き私の生活でありました。此の間に於ける諸先生並に同僚各位の御厚意に對しては衷心より感謝して居る次第であります。

今次の戰爭に對しては，吾々が微力でありまして，戰爭を未然に阻止することの出來なかつたことを，諸君の先輩の一人として洵に申譯ないことゝ思つて居ります。

私が大學生活をエンジョイし且つ之に對して感謝して居る理由の一は，東大の重厚なる學風であり，一には東大の自治が戰爭中をも通してその命脉を保ち得たことにあると考へます。自治，それは洵に文化人として不可缺の要望でありまして，新憲法に依つても吾々は研究の自由を與へられ，大學はモラリティーと所謂レターズアンドアーツの源泉としての存在價値を自覺すべきであり，これと同時に，一面に於て人類の幸福の增進に寄與すべき責務を有するものと考へます。團體の自治は個人の自治を單元とすべきでありまして，各個人がセルフ・ガヴアメントの精神によつて，お互に人格の尊嚴と矜持とを保全し得てこそ團體的自治の意義があるのではないかと思います。

私は此の際諸君に對し「かくあるべし」とか「かくある可からず」的言辭を弄せんとするものではありません。それはやゝもすれば全體主義的言辭たるを恐れるからであります。私は諸君の享有せる自由の天地に於て，其の存在價値を自覺し明朗なオーンライフを建設し，人類の幸福と國家の再建に寄與し得べき前途に對し，心から祝福せんとするものであります。

吾々の修得しつゝある工學は人類の經濟的能働による技術的經驗を基調とする科學であります。從つて工學の發展は實驗や體驗に負ふ所が少くない。學理の探求，眞理の探求は工學に關する限り，其の對象を事實に置くことが肝要でありまして，工學上に於ける眞理は實際現象のエッセンスであると謂ふも過言でありません。

一見複雜化せる現象もこれを一貫せる原理，これに共通なる原則は極めて單純に表現出來る場合が少くないのであります。ゼエネラル・モーターズのデイトンの研究所の壁間にも「問題は其の解明に依つて單純化せられる」(Problem when solved is simple) と指示せられて居るとのことであります。大學は教育機關であり，研究機關であり，而して又文化の中心であり，モラリティーの中心でなくてはならぬ。之が爲めには

* 前東大教授。