微分方程式近似解法と變斷面壓縮材の限界荷重算定法に對する一考察

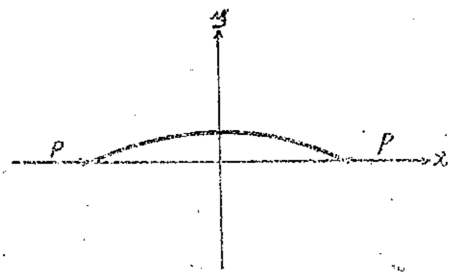
准會員　工　藤　忠　夫*

はしがき 本稿は二階線型微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+u^2F(x)y=0$ の近似解を Jeffreys の解法に從つて誘導し之を用ひて變斷面壓縮材の限界荷重を算定する方法を記述せるものであるが，本稿の範圍內に於ては，問題を解決する迄に至つてゐない。むしろ疑問の提出，解法求探態度の記述に過ぎない。從つて一見，一應の結果を示してはゐるが，中に多くの矛盾，不合理を藏してゐる爲，この解法に對し著者自身も高い信賴を寄せるものではなく，斯る解法誘導態度の可不可，適不適に就いて，讀者諸賢の御敎授，御叱正を得ん事を希ふものである。

1. 變斷面壓縮材の彈曲線方程式

圖-1 に於いて變斷面壓縮材の彈曲線方程式は

圖-1.



$$EI_{(x)}\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但し　E: 材料の彈性係數

P: 中心軸荷重

I: 壓縮材の慣性モーメントで一般に x の函數

である。(1) 式の $I_{(x)}$ を次の如き形にとる。

$$I_{(x)}=I_c-(I_c-I_e)\left(\frac{2x}{l}\right)^n \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但し　I_c: 壓縮材の中央斷面の慣性モーメント

I_e: 壓縮材の兩端斷面の慣性モーメント

l: 壓縮材の長さ

n: 正の整數

而して

$$\frac{2x}{l}=\lambda;\quad \frac{PL^2}{4EI_c}=a^2,\quad 0\leqq P^n=\frac{I_c-I_e}{I_c}\leqq 1$$

と置き換へて，(2) 式を (1) 式に代入すると，基礎微分方程式は次の如くなる。

$$(1-P^n\lambda^n)\frac{d^2y}{d\lambda^2}+a^2y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

この際における境界條件は

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda=0 \text{ のとき} & \dfrac{dy}{d\lambda}=0\\ \lambda=1 \text{ のとき} & y=0\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

である。更に

$$\varphi_{(\lambda)}=\frac{1}{1-P^n\lambda^n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

と置けば (3) 式は

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2}+a^2\varphi_{(\lambda)}y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

となる[1]。

2. 基礎微分方程式近似解の誘導

方程式 (6) の解を次の如く假定する。

$$y=\phi e^{a\omega}\left(1+\frac{f_1}{a}+\frac{f_2}{a^2}+\cdots\cdots\right) \cdots\cdots\cdots(7)$$

但し $\phi,\omega,f_1,f_2\cdots\cdots$ は λ 丈けの函數とする。

(7) 式を λ に就き微分して

$$\frac{dy}{d\lambda}=e^{a\omega}\left\{\phi'^{2)}\left(1+\frac{f_1}{a}+\frac{f_2}{a^2}+\cdots\cdots\right)\right.$$
$$+\phi a\omega'\left(1+\frac{f_1}{a}+\frac{f_2}{a^2}+\cdots\cdots\right)$$
$$\left.+\phi\left(\frac{f_1'}{a}+\frac{f_2'}{a^2}+\cdots\cdots\right)\right\}$$

* 工學士　滿洲國々防道路建設所技佐

1) 本節に關しては土木學會誌 26 卷 10 號 959 頁「基礎微分方程式を冪級數に展開して解き變斷面壓縮材の限界荷重を求むる方法」なる横田氏論文，土木試驗所報告 44 號「エネルギー法に依る變斷面壓縮材の限界荷重を求むる方法」，同氏論文，又は土木學會誌 26 卷 10 號 941 頁「撓角撓度法による構造物安定論」樋浦氏論文等々參照

$$=e^{a\omega}\left\{a\omega'\phi+(\phi'+\phi\omega'f_1)+\frac{1}{a}(\phi'f_1+\phi f_1'+\phi\omega'f_2)+\cdots\right\}$$

玆で $\omega'\phi=P$, $\phi'+\omega'\phi f_1=Q$, $\phi'f_1+\phi f_1'+\omega'\phi f_2=R$ と置換ると

$$\frac{dy}{d\lambda}=e^{a\omega}(aP+Q+a^{-1}R+\cdots)\quad\cdots\cdots(8)$$

更に (8) 式を微分して

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2}=e^{a\omega}\{a\omega'(aP+Q+a^{-1}R+\cdots+(aP'+Q'+a^{-1}R'+\cdots)\}$$
$$=e^{a\omega}\{a^2\omega'P+a(\omega'Q+P')+(\omega'R+Q')+\cdots\}\quad\cdots\cdots(9)$$

(7), (9) 式を (6) 式に代入して

$$e^{a\omega}\{a^2\omega'P+a(\omega'Q+P')+(\omega'R+Q')+\cdots\}+a^2\varphi\phi e^{a\omega}\left(1+\frac{f_1}{a}+\frac{f_2}{a^2}+\cdots\right)=0$$

$e^{a\omega}\neq0$ とし

$$a^2\omega'P+a(\omega'Q+P')+(\omega'R+Q')+a^2\varphi\phi\left(1+\frac{f_1}{a}+\frac{f_2}{a^2}+\cdots\right)=0\quad\cdots\cdots(10)$$

(10) 式に於て, a^2, a^1, a^0 の係數を夫々零に等置して以下の 3 方程式を得る。

$$\omega'P+\varphi\phi=0\quad\cdots\cdots(11)$$
$$\omega'Q+P'+\varphi\phi f_1=0\quad\cdots\cdots(12)$$
$$\omega'R+Q'+\varphi\phi f_2=0\quad\cdots\cdots(13)$$

然るに $P=\omega'\phi$, $Q=\phi'+\omega'\phi f_1$, $R=\phi'f_1+\phi f_1'+\omega'\phi f_2$

なる故

(11) 式より $(\omega')^2\phi+\varphi\phi=0$ $\phi\neq0$ とし

$$(\omega')^2+\varphi=0\quad\cdots\cdots(14)$$

(12) 式より

$$\omega'\phi'+(\omega')^2\phi f_1+(\omega''\phi+\omega'\phi')+\varphi\phi f_1=0$$

整頓して

$$2\omega'\phi'+\omega''\phi+f_1\{(\omega')^2\phi+\varphi\phi\}=0$$

(14) 式の關係を用ひ

$$2\omega'\phi'+\omega''\phi=0\quad\cdots\cdots(15)$$

(13) 式より

$$\omega'(\varphi'f_1+\phi f_1'+\omega'\phi f_2)+(\phi''+\omega''\phi f_1+\omega'\phi'f_1+\omega'\phi f_1')+\varphi\phi f_2=0$$

整頓して

$$f_1(2\omega'\phi'+\omega''\phi)+f_2(\omega'^2\phi+\varphi\phi)+f_1'(2\omega'\phi)+\phi''=0$$

(14), (15) 式の關係を用ひ

$$2f_1'\omega'\phi+\phi''=0\quad\cdots\cdots(16)$$

(14) 式より[3]

$$\omega'=\varphi^{1/2}\left(\cos\frac{2K+1}{2}\pi+i\sin\frac{2K+1}{2}\pi\right)\quad\cdots\cdots(17)$$

玆に $K=0$ 又は 1

(17) 式を積分して

$$\omega=\left(\cos\frac{2K+1}{2}\pi+i\sin\frac{2K+1}{2}\pi\right)\int^{\lambda}\varphi^{1/2}d\lambda\quad\cdots\cdots(18)$$

(15) 式より

$$\frac{\phi'}{\phi}=-\frac{1}{2}\frac{\omega''}{\omega'}$$

仍ち積分して

$$\log\phi=-\frac{1}{2}\log\omega'+\text{const}$$

なるが故に

$$\phi=(\omega')^{-1/2}$$

として充分である。

(17) 式にて表はされた ω' の値を上式へ代入して

$$\phi=\varphi^{-1/4}\left(\cos\frac{2K+1}{2}\pi+i\sin\frac{2K+1}{2}\pi\right)^{-1/2}$$

De Moivre の定理を用ひて

$$\phi=\varphi^{-1/4}\left\{\cos\frac{-(2K+1)}{4}\pi+i\sin\frac{-(2K+1)}{4}\pi\right\}\quad\cdots\cdots(19)$$

$K=0,\ 1$

(19) 式を微分して

$$\phi'=-\frac{1}{4}\varphi^{-5/4}\varphi'\left\{\cos\frac{-(2K+1)}{4}\pi+i\sin\frac{-(2K+1)}{4}\pi\right\}$$

$$\phi''=-\frac{1}{4}\left\{\cos\frac{-(2K+1)}{4}\pi+i\sin\frac{-(2K+1)}{4}\pi\right\}\varphi^{-5/4}\left\{-\frac{5}{4}\varphi^{-1}(\varphi')^2+\varphi''\right\}\quad\cdots\cdots(20)$$

(17), (19), (20) の各式にて與へられた ω', ϕ, ϕ'' を用ひ (16) 式を書き變へるときは

---

2) $\phi'=\dfrac{d\phi}{d\lambda}$, $\omega'=\dfrac{d\omega}{d\lambda}\cdots$, を意味する

3) 間谷, 三輪, 古賀三氏共著： 高等數學提要 121～122 頁參照。この場合 $\varphi>0$ なる事は (5) 式より明らかであり, 又 $\varphi^{1/2}>0$ と考へてゐる。

$$2f_1'\varphi^{1/2}\left(\cos\frac{2K+1}{2}\pi+i\sin\frac{2K+1}{2}\pi\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{4}\left\{\cos\frac{-(2K+1)}{4}\pi+i\sin\frac{-(2K+1)}{4}\pi\right\}\times\varphi^{-5/4}\left\{-\frac{5}{4}\varphi^{-1}(\varphi')^2+\varphi''\right\}}{\varphi^{-1/4}\left\{\cos\frac{-(2K+1)}{4}\pi+i\sin\frac{-(2K+1)}{4}\pi\right\}}$$

整頓して

$$2f_1'\varphi^{1/2}\left(\cos\frac{2K+1}{2}\pi+i\sin\frac{2K+1}{2}\pi\right)=\frac{1}{4}\varphi^{-1}\left\{-\frac{5}{4}\varphi^{-1}(\varphi')^2+\varphi''\right\}$$

依つて

$$f_1'=\frac{1}{8}\varphi^{-3/2}\left\{-\frac{5}{4}\varphi^{-1}(\varphi')^2+\varphi''\right\}\times\frac{1}{\cos\frac{2K+1}{2}\pi+i\sin\frac{2K+1}{2}\pi}$$

積分して

$$f_1=\frac{1}{8\left\{\cos\frac{2K+1}{2}\pi+i\sin\frac{2K+1}{2}\pi\right\}}\times\left\{-\frac{5}{4}\int\varphi^{-5/2}(\varphi')^2dx+\int\varphi^{-3/2}\varphi''d\lambda\right\}$$

然るに部分積分法に依つて

$$\int\varphi^{-3/2}\varphi''d\lambda=\varphi^{-3/2}\varphi'+\frac{3}{2}\int\varphi^{-5/2}(\varphi')^2d\lambda$$

なるが故に

$$f_1=\frac{1}{8\left\{\cos\frac{2K+1}{2}\pi+i\sin\frac{2K+1}{2}\pi\right)}\times\left\{\varphi^{-3/2}\varphi'+\frac{1}{4}\int\varphi^{-5/2}(\varphi')^2d\lambda\right\}\cdots\cdots(21)$$

となる。

扨　$K=0$ なるとき

$$\cos\frac{2K+1}{2}\pi+i\sin\frac{2K+1}{2}\pi=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

$$\cos\frac{-(2K+1)}{4}\pi+i\sin\frac{-(2K+1)}{4}\pi$$
$$=\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$K=1$ なるとき

$$\cos\frac{2K+1}{2}\pi+i\sin\frac{2K+1}{2}\pi=-i$$

$$\cos\frac{-(2K+1)}{4}\pi+i\sin\frac{-(2K+1)}{4}\pi=\frac{1}{i\sqrt{2}}(1-i)$$

従つて

$K=0$ に對し

$$\phi=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\varphi^{-1/4}$$
$$\omega=i\int^{\lambda}\varphi^{1/2}d\lambda$$
$$f_1=\frac{1}{8i}\left\{\varphi^{-3/2}\varphi'+\frac{1}{4}\int\varphi^{-5/2}(\varphi')^2d\lambda\right\}$$

故に

$$y=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\varphi^{-1/4}e^{ia\int^{\lambda}\varphi^{1/2}d\lambda}\times\left[1+\frac{1}{8ia}\left\{\varphi^{-3/2}\varphi'+\frac{1}{4}\int\varphi^{-5/2}(\varphi')^2d\lambda\right\}+\cdots\right]\cdots\cdots\cdots(22)$$

$K=1$ に對し

$$\phi=\frac{1-i}{i\sqrt{2}}\varphi^{-1/4}$$
$$\omega=-i\int^{\lambda}\varphi^{1/2}d\lambda$$
$$f_1=\frac{-1}{8i}\left\{\varphi^{-3/2}\varphi'+\frac{1}{4}\int\varphi^{-5/2}(\varphi')^2d\lambda\right\}$$

故に

$$y=\frac{1-i}{i\sqrt{2}}\varphi^{-1/4}e^{-ia\int^{\lambda}\varphi^{1/2}d\lambda}\times\left[1+\frac{-1}{8ia}\left\{\varphi^{-3/2}\varphi'+\frac{1}{4}\int\varphi^{-5/2}(\varphi')^2d\lambda\right\}+\cdots\right]\cdots\cdots\cdots(23)$$

更に

$$a\int^{\lambda}\varphi^{1/2}d\lambda=L,\quad \varphi^{-3/2}\varphi'+\frac{1}{4}\int\varphi^{-5/2}(\varphi')^2d\lambda=M$$
$$\varphi^{-1/4}=N$$

と置換るときは (22), (23) 式は近似的に次の形をとる。

$$y=Ne^{iL}\frac{1-i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{M}{8ia}\right)$$
$$=N\frac{e^{iL}}{\sqrt{2}}\left\{\left(1-\frac{M}{8a}\right)-i\left(1+\frac{M}{8a}\right)\right\}\cdots(22')$$

及び

$$y=Ne^{-iL}\frac{1-i}{i\sqrt{2}}\left(1-\frac{M}{8ia}\right)$$
$$=-N\frac{e^{-iL}}{\sqrt{2}}\left\{\left(1-\frac{M}{8a}\right)+i\left(1+\frac{M}{8a}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots(23')$$

(22'), (23') 式中

$$1-\frac{M}{8a}=\xi,\ 1+\frac{M}{8a}=\eta$$

と置換し，任意恒數を A_1, B_1 とするとき一般解として

$$y=N\{A_1e^{iL}(\xi-i\eta)+B_1e^{-iL}(\xi+i\eta)\}\cdots(24)$$

を得。上式に次の關係式

$$e^{iL}=\cos L+i\sin L$$
$$e^{-iL}=\cos L-i\sin L$$

を入れて

$$\begin{aligned}y&=N\{A_1(\cos L+i\sin L)(\xi-i\eta)\\&\quad+B_1(\cos L-i\sin L)(\xi+i\eta)\}\\&=N[\cos L\{(A_1+B_1)\xi-i(A_1-B_1)\eta\}\\&\quad+\sin L\{i(A_1-B_1)\xi+(A_1+B_1)\eta\}]\end{aligned}$$

茲で　$A_1+B_1=A$　$-i(A_1-B_1)=B$　として

$$y=N\{\cos L(A\xi+B\eta)+\sin L(A\eta-B\xi)\}$$

或ひは

$$\begin{aligned}y&=N\{A(\xi\cos L+\eta\sin L)\\&\quad+B(\eta\cos L-\xi\sin L)\}\quad\cdots\cdots(25)\end{aligned}$$

即ち (25) 式が基礎微分方程式 (6) の近似解を與へるものである[2,3]。

茲に　$N=\varphi^{-1/4},\quad \xi=1-\dfrac{M}{8a}$

$$L=a\int^{\lambda}\varphi^{1/2}d\lambda,\quad \eta=1+\frac{M}{8a}$$

$$M=\varphi^{-3/2}\varphi'+\frac{1}{4}\int\varphi^{-5/2}(\varphi')^2d\lambda$$

A, B＝任意恒數

3. 固有値 (a) 算定式の誘導

(25) 式を λ に就いて微分すれば

$$\begin{aligned}y'&=N'\{A(\xi\cos L+\eta\sin L)+B(\eta\cos L-\xi\sin L)\}\\&\quad+N\{A(\xi'\cos L-\xi L'\sin L+\eta'\sin L+\eta L'\cos L)\\&\quad+B(\eta'\cos L-\eta L'\sin L-\xi'\sin L-\xi' L\cos L)\}\end{aligned}$$

A, B に就いて整頓し

$$\begin{aligned}y'&=A\{N'(\xi\cos L+\eta\sin L)+N(\xi'\cos L-\xi L'\sin L\\&\qquad+\eta'\sin L+\eta L'\cos L)\}\\&\quad+B\{N'(\eta\cos L-\xi\sin L)+N(\eta'\cos L-\eta L'\sin L\\&\qquad-\xi'\sin L-\xi L'\cos L)\}\\&\qquad\cdots\cdots(25')\end{aligned}$$

境界條件は

$$\begin{cases}\lambda=1 \text{ のとき } y=0 & \cdots\text{i}\\ \lambda=0 \text{ のとき } y'=1 & \cdots\text{ii}\end{cases}$$

なるが故に $\lambda=0$, $\lambda=1$ に對する各函數の數値を 0, 1 のサフィックスを附したるものを以て表示せば

條件 i を (25′) 式に適用し

$$\begin{aligned}&N_1\{A(\xi_1\cos L_1+\eta_1\sin L_1)\\&+B(\eta_1\cos L_1-\xi_1\sin L_1)\}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(26)\end{aligned}$$

條件 ii を (25) 式に適用し

$$\begin{aligned}&A\{N_0'(\xi_0\cos L_0+\eta_0\sin L_0)+N_0(\xi_0'\cos L_0\\&\quad-\xi_0L_0'\sin L_0+\eta_0'\sin L_0+\eta_0L_0'\cos L_0)\}\\&+B\{N_0'(\eta_0\cos L_0-\xi_0\sin L_0)+N_0(\eta_0'\cos L_0\\&\quad-\eta_0L_0'\sin L_0-\xi_0'\sin L_0-\xi_0L_0'\cos L_0)\}=0\\&\qquad\cdots\cdots(27)\end{aligned}$$

然るに　$N=\varphi^{-1/4}$　なるが故に

$$N'=-\frac{1}{4}\varphi^{-5/4}\varphi'=N\left(-\frac{1}{4}\varphi^{-1}\varphi'\right)=N\overline{N}$$

但し　$\overline{N}=-\dfrac{1}{4}\varphi^{-1}\varphi'$ とす。

依つて (27) 式は次の如く書き換へ得。

$$\begin{aligned}&N_0[A\{\overline{N_0}(\xi_0\cos L_0+\eta_0\sin L_0)\\&+(\xi_0'\cos L_0-\xi_0L_0'\sin L_0+\eta_0'\sin L_0+\eta_0L_0'\cos L_0)\}\\&+B\{\overline{N_0}(\eta_0\cos L_0-\xi_0\sin L_0)+(\eta_0'\cos L_0\\&-\eta_0L_0'\sin L_0-\xi_0'\sin L_0-\xi_0L_0'\cos L_0)\}]=0\\&\qquad\cdots\cdots(27')\end{aligned}$$

$N_1\neq0,\ N_0\neq0$　として

(26) 式より

$$A(\xi_1\cos L_1+\eta_1\sin L_1)+B(\eta_1\cos L_1-\xi_1\sin L_1)=0\quad\cdots\cdots(28)$$

(27′) 式より

$$\begin{aligned}&A\{\overline{N_0}(\xi_0\cos L_0+\eta_0\sin L_0)+(\xi_0'\cos L_0\\&\quad-\xi_0L_0'\sin L_0+\eta_0'\sin L_0+\eta L_0'\cos L_0)\}\\&+B\{\overline{N_0}(\eta_0\cos L_0-\xi_0\sin L_0)+(\eta_0'\cos L_0\\&\quad-\eta_0L_0'\sin L_0-\xi_0'\sin L_0-\xi_0L_0'\cos L_0)\}=0\\&\qquad\cdots\cdots(29)\end{aligned}$$

2) 本節に關し，雨宮綾夫氏譯レヴイ・バゴット「微分方程式の數値解法」238～254 頁參照。

3) $f_1=0$ 即ち $M=0$ と近似的に考へるときは $\xi=\eta=1$ となり (25) 式は

$$\begin{aligned}y&=N\{\cos L(A\xi+B\eta)+\sin L(A\eta-B\xi)\}\\&=N\{\cos L(A+B)+\sin L(A-B)\}\\&=N(A'\cos L+B'\sin L)\end{aligned}$$

本式は，仍ち Baggott の提示せる式である。

更に，基礎微分方程式が

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2}+a^2y=0$$

なる場合は

$$\varphi=1,\quad L=ax,\quad N=1,\quad M=0,\quad \xi=\eta=1$$

となり一般解は

$$y=A\cos a\lambda+B\sin a\lambda$$

なる熟知の形となる。

(28), (29) 兩式より A, B を消去するときは

$$\begin{aligned}&\overline{N}_0(\xi_1\cos L_1+\eta_1\sin L_1)(\eta_0\cos L_0-\xi_0\sin L_0)\\&\quad+(\xi_1\cos L_1+\eta_1\sin L_1)(\eta_0'\cos L_0-\eta_0L_0'\sin L_0\\&\qquad-\xi_0'\sin L_0-\xi_0L_0'\cos L_0)\\&-\overline{N}_0(\eta_1\cos L_1-\xi_1\sin L_1)(\xi_0\cos L_0+\eta_0\sin L_0)\\&\quad-(\eta_1\cos L_1-\xi_1\sin L_1)(\xi_0'\cos L_0-\xi_0L_0'\sin L_0\\&\qquad+\eta_0'\sin L_0+\eta_0L_0'\cos L_0)\\&=0 \quad\cdots\cdots(30)\end{aligned}$$

上式を整理して

$$U(\cos L_0\cos L_1+\sin L_0\sin L_1)+V(\cos L_1\sin L_0-\sin L_1\cos L_0)=0$$

但し

$$\begin{aligned}U&=\overline{N}_0(\xi_0\eta_1-\xi_1\eta_0)+(\xi_0'\eta_1-\xi_1\eta_0'+\xi_0\xi_1L_0'+\eta_0\eta_1L_0')\\&=\overline{N}_0(\xi_0\eta_1-\xi_1\eta_0)+L_0'(\xi_0\xi_1+\eta_0\eta_1)+(\xi_0'\eta_1-\xi_1\eta_0')\\&=\overline{N}_0\alpha+L_0'\beta+\gamma\\V&=\overline{N}_0\beta-L_0'\alpha+\delta\end{aligned}$$

$\cos L_0\cos L_1\neq 0$ と考へて，これにて上式を徐し

$$U(1+\tan L_0\tan L_1)+V(\tan L_0-\tan L_1)=0$$

$$-\frac{U}{V}=\frac{\tan L_0-\tan L_1}{1+\tan L_0\tan L_1}=\tan(L_0-L_1)\quad\cdots(31)$$

茲に

$$U=\overline{N}_0\alpha+L_0'\beta+\gamma$$
$$V=\overline{N}_0\beta-L_0'\alpha+\delta$$
$$\alpha=\xi_0\eta_1-\xi_1\eta_0\qquad\beta=\xi_0\xi_1+\eta_0\eta_1$$
$$\gamma=\xi_0'\eta_1-\xi_1\eta_0'\qquad\delta=\xi_0'\xi_1+\eta_0'\eta_1$$
$$\xi=1-\frac{M}{8a}\qquad\eta=1+\frac{M}{8a}$$
$$L=a\int^\lambda\varphi^{1/2}d\lambda$$
$$M=\varphi^{-3/2}\varphi'+\frac{1}{4}\int\varphi^{-5/2}(\varphi_1')^2d\lambda$$
$$\overline{N}=-\frac{1}{4}\varphi^{-1}\varphi'$$

又は

$$\eta=2-\xi$$

の關係を用ひるときは，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は次の形をとる。

$$\alpha=2(\xi_0-\xi_1)\qquad\beta=2\{\xi_0\xi_1-(\xi_0+\xi_1)+2\}$$
$$\gamma=2\xi_0'\qquad\delta=2\xi_0'(\xi_1-1)$$

4. $n=1$ なる場合の固有値算定超越方程式

固有値 a を定める超越方程式 (31) が $n=1$ の場合如何なる形となるか本節で誘導してみる。但し M の値は最初の第 1 項のみを取つて考へる。尙第 2 項省略の影響その他は，後節に於て考察する。

方程式 (31) は

$$\tan(L_0-L_1)=-\frac{U}{V}$$

但し

$$L_0=\left[a\int^\lambda\varphi^{1/2}d\lambda\right]_{\lambda=0}\quad L_1=\left[a\int^\lambda\varphi^{1/2}d\lambda\right]_{\lambda=1}$$

etc.

$$U=\overline{N}_0\alpha+L_0'\beta+\gamma$$
$$V=\overline{N}_0\beta-L_0'\alpha+\delta$$

$n=1$ なる場合の各函數値を p,λ を以て表はすと次の形となる。先づ基本値は

$$\varphi\ =(1-p\lambda)^{-1}$$
$$\varphi^{-1}=(1-p\lambda)$$
$$\varphi^{1/2}=(1-p\lambda)^{-1/2}$$
$$\varphi^{-3/2}=(1-p\lambda)^{3/2}$$
$$\varphi'=\frac{d}{d\lambda}\{(1-p\lambda)^{-1}\}=p(1-p\lambda)^{-2}$$
$$\int^\lambda\varphi^{1/2}d\lambda=-\frac{2}{p}(1-p\lambda)^{1/2}$$
$$\varphi^{-3/2}\varphi'=p(1-p\lambda)^{-1/2}$$
$$\frac{d}{d\lambda}\{\varphi^{-3/2}\varphi'\}=\frac{p^2}{2}(1-p\lambda)^{-3/2}$$

である故 $\lambda=0$ 及 $\lambda=1$ に對する函數値は

$$L_0=-\frac{2a}{p}\qquad L_1=-\frac{2a}{p}(1-p)^{1/2}$$
$$L_0'=a^*\qquad\overline{N}_0=-\frac{p}{4}$$
$$\xi_0=1-\frac{M_0}{8a}=1-\frac{p}{8a}\qquad\xi_1=1-\frac{p}{8a}(1-p)^{-1/2}$$
$$\xi_0'=-\frac{p^2}{16a}$$

となる。從つて，運算の結果

$$\alpha=2\left\{\frac{p}{8a}\left(\frac{1}{\sqrt{1-p}}-1\right)\right\}$$
$$\beta=2\left(1+\frac{p^2}{64a^2\sqrt{1-p}}\right)$$
$$\gamma=-2\frac{p^2}{16a}$$
$$\delta=2\frac{p^3}{128a^2\sqrt{1-p}}$$

* L_0' は L_0 を微分したものに非ずして L' に $\lambda=0$ を代入した値なることに注意

表-1.

p	$\sqrt{1-p}$	$1-\sqrt{1-p}$	$\dfrac{2}{p}$	$\dfrac{2}{p}(1-\sqrt{1-p})$	$1+\sqrt{1-p}$	$\dfrac{\sqrt{1-p}}{1+\sqrt{1-p}}$	$\dfrac{8}{p}$	$\dfrac{8\sqrt{1-p}}{p(1+\sqrt{1-p})}$
0.1	0.9487	0.0513	20.0000	1.0264	1.9487	0.4868	80.0000	38.9464
0.2	0.8944	0.1056	10.0000	1.0557	1.8944	0.4721	40.0000	18.8856
0.3	0.8367	0.1633	6.6667	1.0889	1.8367	0.4552	26.6667	12.1475
0.4	0.7746	0.2254	5.0000	1.1270	1.7746	0.4365	20.0000	8.7298
0.5	0.7071	0.2929	4.0000	1.1716	1.7071	0.4142	16.0000	6.6274
0.6	0.6325	0.3675	3.3333	1.2251	1.6325	0.3874	13.3333	5.1657
0.7	0.5477	0.4523	2.8571	1.2922	1.5477	0.3539	11.4286	4.0445
0.8	0.4472	0.5528	2.5000	1.3820	1.4472	0.3090	10.0000	3.0902
0.9	0.3162	0.6838	2.2222	1.5195	1.3162	0.2403	8.8889	2.1356

を得る。之等を用ひて U, V の値を求めるときは，途中の運算を略して

$$U=\overline{N}_0\alpha+L_0'\beta+\gamma$$

$$=2\left\{-\frac{p^2}{64a\sqrt{1-p}}-\frac{p^2}{32a}+a\right\}$$

$$V=\overline{N}_0\beta-L_0'\alpha+\delta$$

$$=2\left\{\frac{p^3}{256a^2\sqrt{1-p}}-\frac{p}{\sqrt{1-p}}-\frac{p}{8}\right\}$$

となる。依つて (31) 式は

$$\tan\left\{-\frac{2a}{p}(1-\sqrt{1-p})\right\}$$

$$=-\frac{-\dfrac{p^2}{64a\sqrt{1-a}}-\dfrac{p^2}{32a}+a}{\dfrac{p^3}{256a^2\sqrt{1-p}}-\dfrac{p}{8\sqrt{1-p}}-\dfrac{p}{8}}$$

なる形を有する $\sqrt{1-p}\neq 0$ として右邊の分子，分母に乘じ，且つ (-1) を左右兩邊に乘ずる操作を施すときは

$$\tan\left\{\frac{2a}{p}(1-\sqrt{1-p})\right\}$$

$$=-\frac{-\dfrac{p^2}{64a}+\left(\dfrac{-p^2}{32a}+a\right)\sqrt{1-p}}{\dfrac{-p^3}{256a^2}+\dfrac{p}{8}(1+\sqrt{1-p})}$$

右邊分子中の $-\dfrac{p^2}{64a}-\dfrac{p^2}{32a}\sqrt{1-p}$ を省略し合せて分母中の $\dfrac{-p^3}{256a^2}$ を省略するとき上式は

$$\tan\left\{\frac{2}{p}(1-\sqrt{1-p})a\right\}=-\frac{8\sqrt{1-p}}{p(1+\sqrt{1-p})}a \quad \cdots(32)$$

なる簡單な形となる。誘導過程中分子，分母に於いて行つた省略項の影響は M の第 2 項省略と共に後節に於て論議する。

5 數値計算及固有値 a の圖上試索

(32) 式に於て $p=0.1$ より 0.9 迄の各値に對し a の係數を計算すると表-1 の如くである。計算は小數 5 位以下を 4 捨 5 入してゐる。

次に a を求める方法であるが，正常の a の範圍は $p=0$ の場合 $\pi/2$ であり $p=1$ の時大約 1.2 となる。仍ち前者は $I_e=I_c$ の場合なる故當然 Euler の限界荷重を與へるものでなければならず，後者は田中博士[3]が Bessel Function に依つて解いた $4a^2=0.584\pi^2$ と一致しなければならぬものである。扨 (32) 式より a を求める方法は種々あろうが近似式なる性質に鑑み圖-2 の如き圖上試索が簡便である。又適當なノモグラムを造つて置く事はより效果的かとも思惟さるる。圖-2 を説明すると，縱軸が a 軸であり横下邊を x 軸上邊を y-軸とする。ax 平面に $x=-8\sqrt{1-p}a/p(1+\sqrt{1-p})$ を滿足する直線 x を描き，ay 平面には $y=2(1-\sqrt{1-p})/p$ なる直線 y を描く。直線 y 上の 1 點 y_1 の tangent の値 x_1 を函數表[4]より求め，之を y_1 を過り x 軸に平行なる直線上に計り取る。この時 x_1 が直線 x の丁度上に乘るならば，この x_1 は (32) 式を滿足する。この時 x_1 に對應する a の値が求める固有値である。實際には x_1 が丁度直線 x 上に乘る樣になし難い爲直線 x を挾む二個の x_1, x_2 を與へる y_1, y_2 を函數表より探し當てゝ，平均値の考へを利用

3) 土木學會誌 15 卷 230 頁. On Strength of Columns with Variable Cross Sections. Y. Tanaka
4) 例へば 林 桂一氏: 高等函數表

圖-2.

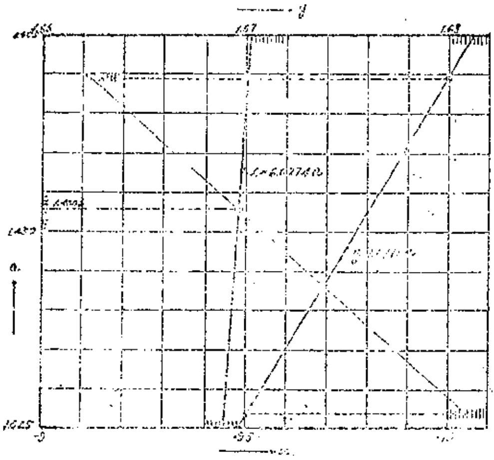
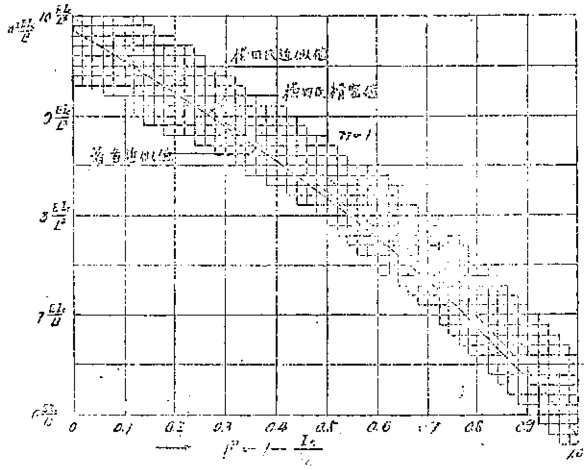


圖-3.



する。a, x, y の目盛の範圍決定には 1, 2 度の試みに依り適當に爲すべきである。y_1, y_2 を探し求める事は容易である。函數表に於ける $\tan y=x$ の y 値が 0.01 位の間隔である時は，より正確なる x を求める爲には，内挿公式等に依り間隔をもつとせばめる必要があるが，(32) 式は元來が近似式なる爲かく迄正確な x の値，從つて a の値を知るには不適當である。

圖-2 は $p=0.4$ の場合に於ける 1 例であり，かくして求めた a 値が表-2 に纒められてゐる。横田氏の計算値は比較の爲掲げた。圖-3[5] はこれらを圖示したものである。（未完）

附記 (32) 式の精度に就いては若干の數値的考察を行ふ筈でありますが一見表-3 乃至圖-3 が本近似式の高精度を示してゐる樣見受けられます。しかし前言の如く著者は本式に確信を有してゐるのではありません。それは Jeffreys の解法の根本的な考へ方に對する研究不充分の故であります。而し一應著者の考へを記しますと，衆知の如く微分方程式中の a は一群の値をとり得るパラメーターでありますがこの中最小なものが限界荷重を與へます。この時には微分方程式に於て a は λ に無關係な常數と考へて差支へないでありませう。かく考へますれば a の各羃の係數を夫々零に等置すると言ふ Jeffreys の方法が適用出來ると存じます。この際氣掛りなのは a があまり大なる數ではないと言ふことであります。これ等の事に就いて更に研究してみたいと思つてゐます。

表-2.

p	a	$4a^2$	$4a^2$ 横田氏嚴密値	$4a^2$ 同氏近似値
0.1	1.5466	9.5680	9.5712	9.69
0.2	1.5215	9.2599	9.2620	9.40
0.3	1.4943	8.9317	8.9403	9.09
0.4	1.4632	8.5638	8.6035	8.76
0.5	1.4306	8.1865	8.2483	8.40
0.6	1.3948	7.7819	7.8701	8.02
0.7	1.3552	7.3463	7.4612	7.62
0.8	1.3118	6.8833	7.0085	7.18
0.9	1.2667	6.4181		6.67

尚本稿脱稿後日高孝次氏の數値積分法下卷をみました。註 2 に本書を追加致します。淺學の著者は本書に依つて始めて Jeffreys の名を知りました。先に Baggott の提示した式と言つたのは Jeffreys の誘導した式かもしれません。　　以上

2603. 1. 20　　　（昭. 19. 2. 29 受付）

5) $p=0.9$ 以降の曲線形は後節に於て研究するが省略項の影響が大きく，極限値は 1/2 に近づく。仍ち $p=0.9\sim1$ の間にて變曲點を有する。