

# 討 議

第 29 卷 第 11 號 昭和 18 年 11 月

## 軌 條 控 屈 の 計 算

(第 29 卷 第 7 號 所載)

正會員 工學博士 安 宅 勝\*

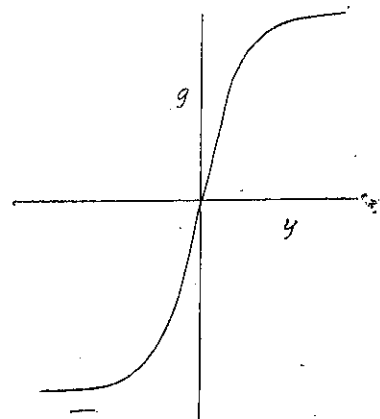
表記の論文興味深く拜見致しました。就てはその内容につき 2, 3 私見を述べさせて戴きます。論文の読み誤りに基く誤解もあるでせうし又討議者の誤りもあることと思ひます。この點は御容赦下さい。

著者は先づ枕木の引抜抵抗を測定しこれを理論の基礎として研究を進め、計算の結果を堀越博士の實驗と對比して居られる。軌條の横抵抗は一定値  $g$  を假定し次の微分方程式によつて控屈を論じて居る<sup>1)</sup>。

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\rho}{EJ} \frac{d^2 y}{dx^2} \pm \frac{g}{EJ} = 0 \dots\dots\dots 4)$$

軌條の横抵抗  $g$  を一定値と見做すか又は圖-1 の如く  $g=f(y)$  として控屈の計算をなすべきかに就ては議論のある所であるが、 $g=cy$  の如き場合の他は簡單には解が求められそうにも思はれない。さりとして  $g$  一定とせる場合の控屈値の解も案外に困難な様で、本會誌第 25 卷 6 號に所載の稻田博士の論文もこの點で苦心して居られる様に見受けられる(筆ついでにて誠に禮を失する嫌はあるがこの機會に、博士の不慮の災厄に對して萬腔の甲意を表明させて戴く)。然し同博士の話を承つても御自身まだあの解には満足されて居なかつた様で實驗の結果とは一致せぬといふことを云はれた記憶がある。即ち  $g$  は一定とは云ひ條  $y > 0$  のとき  $g > 0$ 、 $y = 0$  のとき  $g = 0$ 、 $y < 0$  のとき  $g < 0$  なる如き意味を含んだ解を求めたいのであるが、4) 式より求めた控屈値には  $g$  の影響が含まれてゐない。これは明らかに不合理である。この點は次の如くに解すべきではないかと思ふ。今  $g=cy$  と考へれば最小控屈荷重は近似的に、柱の兩端を

圖-1.



ピン端と考ふれば  $P_K = 2\sqrt{CEJ}$  となる<sup>2)</sup>。これは Engesser が初めて與へた近似公式であるが精確には

$$P_K = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} n^2 + \frac{Cl^2}{n^2 \pi^2} \quad \text{となり } P_K \text{ min は } dP_K/dn = 0 \text{ を満足する } n \text{ の値即ち } n =$$

$l/\pi\sqrt{C/EJ}$  によつて定る。但し  $n$  は整数であるからこの條件を満足する  $n$  の特定値に近い整数を採用するのである。

即ちこの場合に於ては眞直なる柱は  $P$  の一般なる値に對しては直線を維持する。即ち何等かの原因によつて柱が曲げられてもその原因が去れば柱は舊に復するが、 $P$  の特定値に對しては不定の曲りを與える。即ち横抵抗なき柱の控屈と同様に、少くとも弾性の控屈を考ふる場合に於ては柱の「フレ」が小なる限りは控屈荷重には影響

\* 京城帝國大學教授  
1) 式番號は原文と一致せしめてある。  
2) 例へば Káram & Biot: Mathematical Methods in Engineering. p. 306.  
Bleich: Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken. s. 189.

しない。所が若し圖-1 の如く  $g=f(y)$  と考へた場合は所謂非線型 (non linear) な微分方程式の解に相當し挫屈荷重を求めることは容易でないが、少くともその挫屈値に關しては次のことが云へると思ふ。即ちこの場合には**安定の條件が當初のフレに關係する**といふことである。即ち挫屈荷重は柱のクセ又は故意に與えた當初の變形に影響されるのであるから、實驗に於ては挫屈荷重は廣い範圍に涉つて變化するのが當然である。このことは堀越博士もその論文に於て論及して居られる。従つて柱に於る「クセ」又は「フレ」の範圍を與えざる限りは實驗による挫屈値を理論と對比することは出来ない。従つて軌條の挫屈値を實驗的に決めるとしても非常に多數の實驗を繰り返して最確確 (most probable) となるクセに基く最確の挫屈値を決める外に方法はないと思ふ。理論と實驗とが一致するとか、せぬとかいふことは假に正しい解が求まつても輕々に定め得ないと考へる。

次に挫屈荷重が軌條の長さの方向に作用する抵抗値に影響されるかどうかといふ問題であるが、挫屈を論ずるに際しては柱の微小なる撓みに關して議論するのであつて曲率半徑に關しても現に  $(dy/dx)^2$  を無視してゐるのであるから、柱の撓み  $j$  に比して柱の長さの方向に於る移動は無視し得べく、挫屈後に生ずる大きな撓みを論ずる場合は別として限界荷重を論ずる場合にはこの影響は餘り大でないものと見做す可きでは無からうか。前述の挫屈荷重がフレの影響を受ける場合に就て 2, 3 の考察をして見よう。

今簡單のために中央に鉸を有し一定の横抵抗  $Q$  を受くる棒の安定がフレの角  $\alpha$  に影響される程度を調べてみるに、安定なるためには  $Q \geq 2P \tan \alpha$  なることを要する。従つて圖-3 に於て何等かの原因に基くフレの角  $\alpha$  が生じたとき  $\alpha \leq \alpha_0$  なら安定  $\alpha > \alpha_0$  なら不安定 となる。

但  $\tan \alpha_0 = \frac{Q}{2P}$  にて與えらる。

従つて  $Q$  が一定なる場合の挫屈荷重はフレの角に支配され

$$P_K = \frac{Q}{2} \cot \alpha \quad \text{となる。}$$

即ちこの棒はクセが小ならば挫屈値はいくらでも大となる反面クセによつて挫屈値はいくらでも小になることを示す。

これに反し今横抵抗が撓位に比例するときは  $Q = k\delta = kl \sin \alpha$  とをけば

安定の條件は  $kl \sin \alpha = 2P \tan \alpha$

故  $P_K = kl/2 \sec \alpha$  となり

$\alpha$  の小なる範圍に於ては  $P_K = kl/2$

なる一定値 となる。

又  $Q$  が實測の結果の様に圖-5 a に於て  $Q > \alpha$  に對し  $Q_0$  なる如き結果を得た場合に

$Q = Q_0 \tanh ky/a$  の如くをけば  $k$  が大體 3 以上

なら實測値に似た曲線が得られる。今

$Q = Q_0 \tanh 3y/a$  と考へ

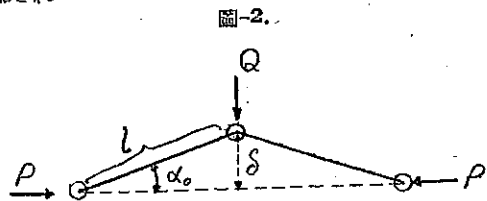


圖-2.

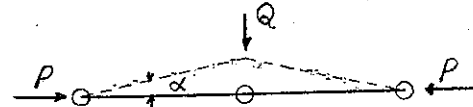


圖-3.

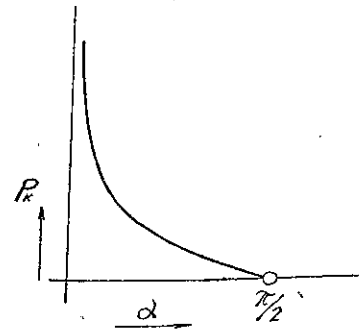


圖-4.

$$P_K = \frac{Q_0}{2} \cot \alpha = \frac{Q_0}{2} \tanh \frac{3y}{a} \cot \alpha$$

又  $y = l \sin \alpha$  とをき

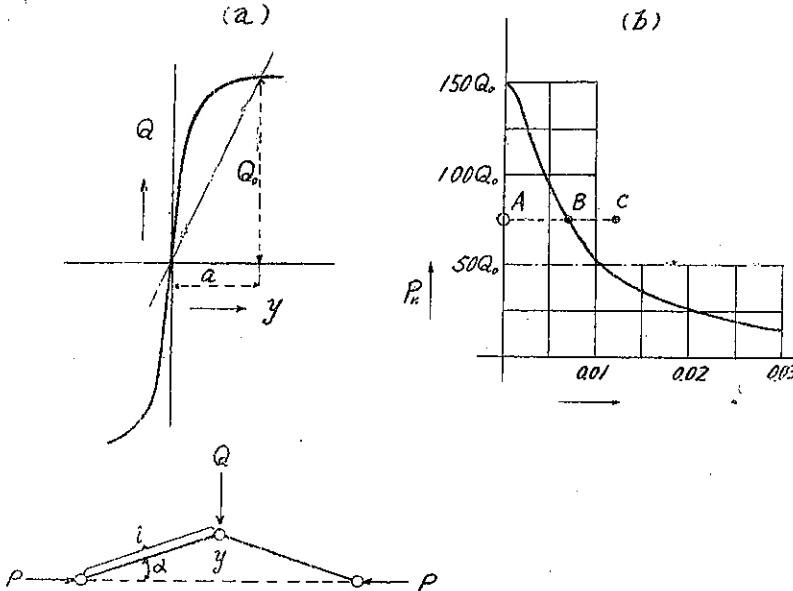
$$P_K = \frac{Q_0}{2} \tanh \left( \frac{3l}{a} \sin \alpha \right) \cot \alpha \quad \text{を得。}$$

$a$  は恐らく 10 mm とか 20 mm とかいふ小なる値であらう。今  $l/a=100$  の場合を考へると

$$P_K = \frac{Q_0}{2} \tanh (300 \sin \alpha) \cot \alpha \dots\dots\dots A)$$

A) 式を 圖示すると圖-5 b を得。フレの變化に應じて  $P_K$  が大きく變化してゐる。圖中たとへば  $P=75 Q_0$  に對してはフレの角を何等かの原因によつて  $\alpha < \overline{AB}$  なる状態に持つて來てもその原因が去れば舊に復するが、 $\alpha > \overline{AB}$  なる状態に於ては變化は元に戻らぬ即ち不安定な状態となる。今  $Q=Q_0 y/a$  と考ふれば  $l/a=100$  のとき

圖-5.



$P_K = 50 Q_0 \sec \alpha$  となり圖示の範圍では一定値である。

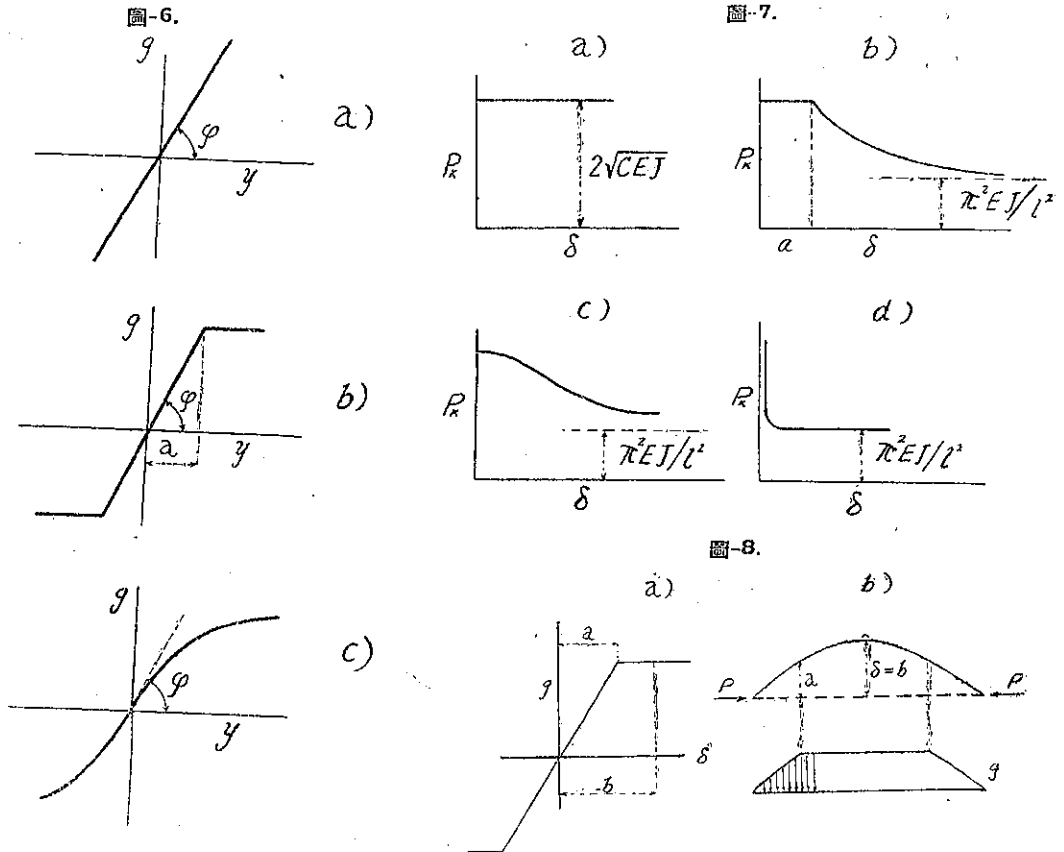
同様の類推が軌條の挫屈の場合にも適用さるべく  $g = Cy$  と考ふれば  $P_K = 2\sqrt{CEJ}$  一定となる。圖-6 b, c の場合にはフレの度合に應じ  $2\sqrt{CEJ} > P_K > \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$  となるであらう。但  $C = \tan \varphi$  である。

$g$  一定なる場合はこの特別な場合即ち  $\tan \varphi = \infty$  に當る故  $\infty > P_K > \pi^2 EJ/l^2$  と考へ得る。即ちフレの角が微少なるときは大きな挫屈荷重を與え得る譯である。

今柱に與えた當初の最大撓みを  $\delta$  を以て示した場合にフレが挫屈荷重に及ぼす影響は圖-6 の a, b, c の各場合に應じて圖-7 の如くなるものと考へ得るであらう。

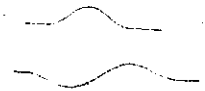
$g = \text{const}$  の場合は圖-7, d の如くなるものと解す可きである。但し孰れも長さ  $l$  にして兩端ピン端なる軌條の挫屈を想定してゐる。

横抵抗を圖-8 の如く考ふれば最大撓み  $\delta=b$  の場合には 圖-8 b) の下に示す如き荷重に對し平衡條件を求めればよい譯である。



以上の如く平衡條件が當初の變形の大きさによつて定めらるゝことが理論的にも想像し得らるゝ以上、實驗値の數個を取り出して比較することは、假に  $q=f(y)$  に對應する正解が求まつたとしても軌條のクセに關する明確な資料が無い限り不可能の様で、たとへば棒が一定の横抵抗を有する様な場合でも不用意に實驗すれば種々雑多な挫屈値が出て來て恐らくは判斷に苦しむのではあるまいか。

附圖

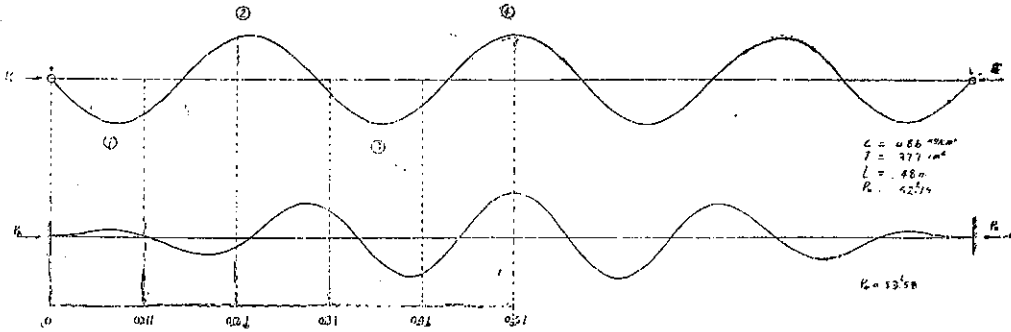


猶挫屈形を附圖の如き形等に分類することは實驗による挫屈の形に拘泥し過ぎた嫌があつて意味のないことに思ふ。今軌條の横抵抗が撓みに比例するとして、 $q=Cy$  なる場合に堀越博士の實驗の場合の様に 50 kg 軌條 ( $J=377 \text{ cm}^4$ ,  $l=48 \text{ m}$ )

に於て  $q=0.86 y \text{ kg/cm}$  と假定せば<sup>3)</sup>圖-9 の如き波形を得る。但しこの場合は理論の構成上挫屈の大きさは定め得ない。勿論曲率半徑に關し精確に  $\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}$  とをけば此等の値は定る。

3)  $C$  を 0.86 に取つたのは堀越氏の實驗値として精選道床に對し  $q=1.73 \text{ kg/cm}$  とあり、この最大値に達するのは大體變位が 4 cm 位の場合であるからその平均の變化を取り  $C = \frac{1.73}{2} = 0.86$  としたのである。同氏論文 p.1209, 1199 参照。

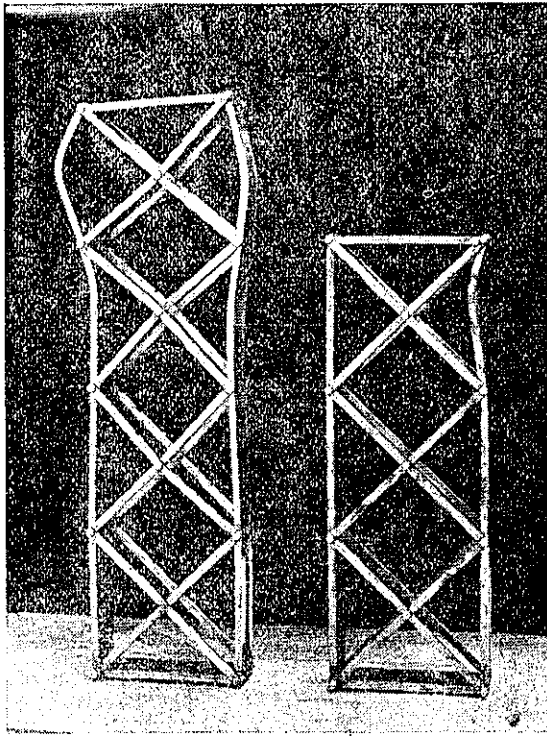
圖-9.



今假に横抵抗が大體變位  $y$  に比例する様な地盤が實在したとしても、現地に於て挫屈の實驗をしたならば軌條の全長に涉つて狀況は嚴密には一樣でないから、これらの波形の全部が同時に現出することはなく挫屈形が一部に現れ、挫屈の進行が局部的に急激に進むと共に軌條の全長に涉つて荷重の降下を伴ひ破壊に至るものと想像される。従つて一部に挫屈が伸展すると荷重の降下に伴ひ他の部分は挫屈の可能性が却つて減少する様な結果になるのではあるまいか。

局部的の挫屈が實驗的に認められたからといつて理論上の多波形の挫屈に対する根據は必ずしも動搖するものでは無い様に考へる。圖-10 の場合は少し異なるが討

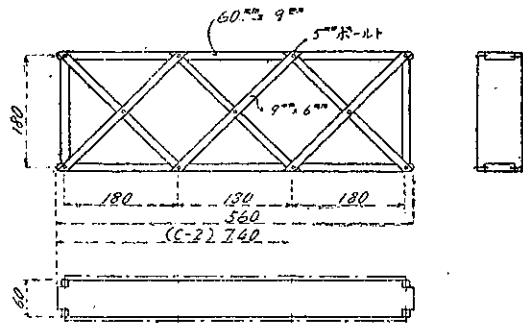
圖-10.



議者の行つた實驗の結果を示す。これは、断面 60 mm×9 mm の鋼板を徑 5mm のボルトを以てピン結合とした骨組抗壓材の壓縮試験後の状態である。支點に於て廻轉自由なる等格間の連續抗壓材の挫屈荷重は格間長を挫屈長とせる挫屈値となることは理論的に證明されるから、格間長を  $l$  とすれば骨組全體に作用する荷重を  $P$  とすれば挫屈荷重は

$$P_{K/2} = \frac{\pi^2 E I}{l^2} \text{ となる。} \text{ 圖-11 は該模型の構造を示す。圖-10 の寫真に示したものはこれと同型式}$$

圖-11.



4)  $J$  は構成主材 1 個の慣性モーメントを示す。

圖-12.

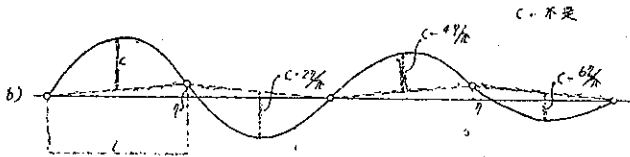


圖-14.

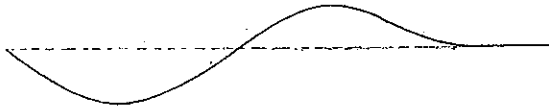
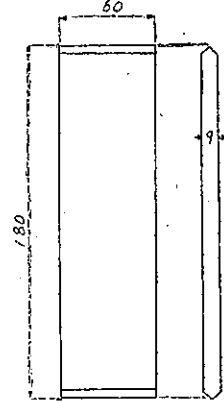


圖-13.



の4格間のものである。

格間長  $l=180\text{ mm}$ ,  $l/\gamma=70$  の場合に相當する。

$$\frac{P}{2} = \frac{\pi^2 EJ'}{l^2}$$

の値は圖-13 に示す如き構成部材の1格間に等しき試験片の壓縮試験によ

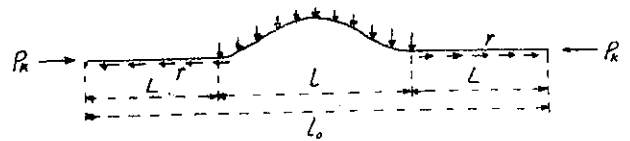
つて、平均挫屈應力度  $\sigma_K=2300\text{ kg/cm}^2$  なることを確め得た。而して骨組の壓縮試験に於ては平均應力度  $\sigma_K=2310\text{ kg/cm}^2$  を得たのであるから理論値と完全に一致してゐる譯である。この場合に於ても以上の理論を無視して單に實驗の結果のみより判斷すれば、圖-14 の様な挫屈形が想像できないこともなからう。これを要するに長い軌條の挫屈はこれを理論的に見れば多くの波形の連続したものと考へた方が妥當な様である。猶横抵抗を  $C_y$  とせるときの最小挫屈荷重に對する挫屈形は柱の長さその他の要素に應じて對稱又は非對稱の形が理論的には求められるが、これが局部的に出現した場合には如何様にも考へ得べく、例へば圖-9 に於て②の波形が顯著に現れこれに近接した①③の波形の出現が遅れると著者の所謂挫屈形 I に類似の形が現れるし、②③或は③④が同時に現れれば一見して挫屈形 II の形を取る如く觀察されるであらう。

之を要するに實驗の結果として軌條の一部に現れた波形によつて軌條の一部が挫屈するといふ様な根據の下に、挫屈荷重を考へることは適當でない様に思ふ。事實かゝる假定の下に計算を進めると境界條件に對し常數の數が不足してうまく行かない。著者の示された公式は數値的には堀越博士の實驗中の 2, 3 の特定値とよく一致して居る様であるが、實驗の條件と理論の基礎をなす條件とは自分の読み誤りで無い限りは大きな開きがあり理論値が實驗値と一致したといふことを納得せしむるに

困難を感じるものゝ如くである。著者の公式に對する疑問に就て一言すれば、著者は先づ挫屈荷重を求める手段として軌條の一部なる部分は  $P_K$  より  $P$  に低下し、彎曲に伴つて C, D 點

は移動し  $L$  なる部分にはその長さの方向に  $rL$  なる抵抗を受け又  $l$  なる部分は  $Sl=l\sqrt{\frac{P}{EJ}}=9.87$  なる状態に於て彎曲するものゝ考へ、軌條の長さに沿うた抵抗を  $r\text{ kg/cm}$ , 横抵抗を  $g\text{ kg/cm}$  とした場合に  $P_K=P+rL$  なる條件を考慮し、CD の移動を考に入れて次式を得る。

圖-15.



$$P_K = P + \sqrt{75.60 EA(EJ)^{3/2} g^3 P^{-7/2} + 20.19 EJr^2 P^{-1} - 4.49 \sqrt{\frac{EJ}{P}}} \dots\dots\dots (30)$$

而して 30) 式に示す  $P_K$  の最小値即ち  $dP_K/dP=0$  を満足する値を以て挫屈荷重としてある。著者の取り扱はれた「挫屈」とは如何なる状態を示すものであるか、數式的には一應の疑問があるがこれには此處では觸れぬこととする。30) 式を満足する  $P_K$  の最小値は著者によれば近似的に

$$P_K = 4.229 \{EA(EJ)^{3/2} r g^2\}^{2/11} \dots\dots\dots 31)$$

次に 30) 又は 31) 式より求められる挫屈値公式の適用範圍に對する疑問であるが、これは無限に長い軌條の挫屈にのみ適用さるべき公式なのであらうか。有限長の軌條の挫屈荷重が  $r=0, g=0$  にて 0 となるのは一寸常識的な結果とは考へられない。

著者は p. 548 に於て堀越博士の實驗結果と比較し 50 kg 軌條の場合に於て  $g=1.73 \text{ kg/cm}, r=3.71 \text{ kg/cm}$  のとき

挫屈荷重實驗値平均 55.5 t に對し理論値 50.3 t を得てこれとよく一致したと云つて居られるが、堀越博士の實驗値は相當の廣範圍に涉つて變化がありその平均値すら定め得ない様な状態である。而して實驗上かゝる種々雑多の値が出得ることは横抵抗と變位との關係が  $\eta$  に比例して居ないため當然理論的にも豫想し得べきことは本文の初めに記述した通りである。又著者の理論値を堀越博士の實驗と比較するにしても、實驗の状況と著者の理論上の假定とは大部異り比較の對照にはならぬ様に思はれる。實驗に於ては長 48 m の軌條の一端を壓縮して挫屈荷重平均の 55.5 t を得てある。所で著者の理論によつて  $P_K=50.3 \text{ t}$  となる場合は兩端に  $L$  なる長さを有し、少くとも全長  $l_0=2L+l$  なる軌條を示すのである。

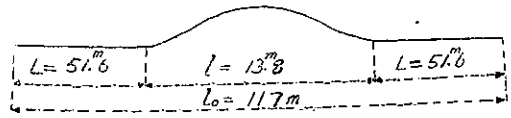


圖-16.

今便宜近似式 31) 式によりて  $g=1.73 \text{ kg/cm}, r=3.71 \text{ kg/cm}$  として挫屈荷重を求めると  $P_K=52.3 \text{ t}, P=33.5$  となり、 $P_K$  が中央にて  $P$  に低下するためには  $L = \frac{P_K - P}{r} = \frac{19100}{371} = 51.6 \text{ m}$ 、又  $l = 8.987 \sqrt{\frac{EJ}{P}} = 13.3 \text{ m}$  故軌條の全長は 117 m となる。即ちこの場合には 30) 式に示す  $P_K$  の最小値は採用出来ない譯で  $2L+l=48 \text{ m}$  となる如き  $P_K$  の値を 30) 又は 31) 式より求めねばならぬ。かくするときは大體  $P_K=66.9 \text{ t}, P=60.0 \text{ t}$  にて、 $l_0=2L+l=$

47.6 m となる。即ち大體に於てこの程度の挫屈値となる筈であつて實驗値とは異つて来る。理論的には討議者としてはどうも首肯し兼ねる理論の結果が、50 kg 軌條及び 30 kg 軌條の場合には數個の實驗値と一應の一致を見てゐるのはどういふ譯であらうか。猶著者が論文末に掲げて居る表-5 中第 2 列軌條重量 37 kg 中にある實驗値は 50 kg 軌條のものゝ如くであるが如何 (堀越氏實驗 50 kg 軌條 no. 12~no. 15 参照)。

猶横抵抗  $g$  の値は堀越博士の實驗によれば圖-17 の如く大體變位 40 cm 位にて一定値に達する故、本文に記載せる挫屈荷重の公式  $P_K = 2\sqrt{CEJ}$  中の  $C$  の値を  $C = \frac{g_{\max}}{2 \text{ cm}}$  の如く取ることはさして不當とも云へないであらう。堀越氏に従ひ  $g_{\max}$  の値は切込砂利  $g=1.46 \text{ kg/cm}$ 、精選道床  $g=1.73$

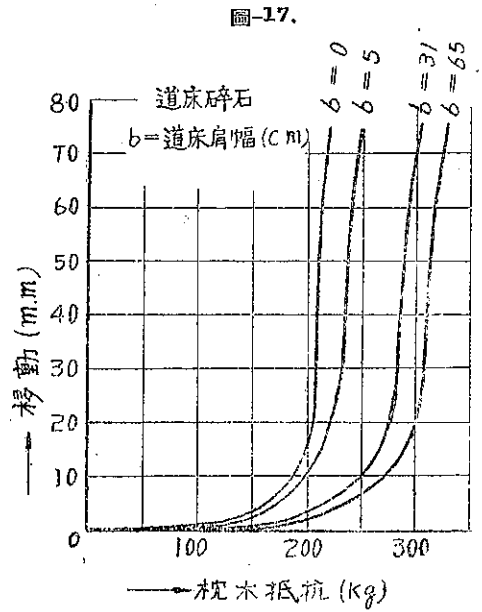


圖-17.

kg/cm, 碎石=2.04 kg/cm 故  $C$  の値はその各々に應じ 0.73 kg/cm<sup>2</sup>, 0.86 kg/cm<sup>2</sup>, 1.02 kg/cm<sup>2</sup> となる。但 30 kg 軌條に對しては上記の値に  $70/76=0.92$  を乗ずるものとす。今 50 kg, 37 kg, 30 kg 各軌條に對し上記の値を使用しては平均の挫屈荷重を計算すると(但  $J$  は 50 kg, 37 kg, 30 kg 各軌條に對しそれぞれ 377, 227, 152 cm<sup>4</sup> とする)次の如くなる。

50 kg 軌條 ( $J=377 \text{ cm}^4$ )				37 kg 軌條 ( $J=227 \text{ cm}^4$ )			30 kg 軌條 ( $J=152 \text{ cm}^4$ )		
通床	$g$	$C$	$P_K$	通床	$C$	$P_K$	通床	$C$	$P_K$
切込	1.46	0.73	48.1 t	切込	0.73	37.5 t	切込	0.67	29.3 t
精選	1.73	0.86	52.2 t	精選	0.86	40.3 t	精選	0.79	31.8 t
碎石	2.04	1.02	57.1 t	碎石	1.02	44.0 t	碎石	0.94	34.6 t

この程度の計算でも著者の發表せられた程度の精密度は得られる。之を要するに格別複雑な計算に依らなくとも  $P_K=2\sqrt{CEJ}$  の如き簡単な公式によつて係數  $C$  の判断さえ誤らなければ實用的には一應の見當は付け得る様にも考へられる。

(昭. 18. 9. 2. 受付)

附記 軌條挫屈計算の原著は目下南方要員として派遣されてゐる爲、本討議に對する應答は後日に譲ることに致します。