論　説　報　告

第29巻第11號　昭和18年11月

相對二邊に於て支承せられる矩形版が彈性基礎上に在る場合の彎曲，並に其他の彈性諸問題の研究　(其の一)

正會員　工學博士　原　口　忠　次　郞*

要旨　本文は相對二邊に於て支承せられる矩形版が，彈性基礎上に在りて任意の部分的分布荷重を受くる場合の彎曲に關する一般式を求め，先づ其他の相對二邊が自由なる平版に關する諸公式を算出し且つ數字的算例によりこれが沈下狀況を明かにし，更に其他の境界條件を有する各種の版について論究すると共に之等諸問題と，單純彎曲，自由振動，挫屈問題等との關連性を論じ，且つ之等に關する重要なる諸公式を導き以て實用に資せんとするものである。

上記問題に關する基本微分方程式の解説にあたりては，M. Lévy の代置法を用ひ，且つ「フーリエ」の級數を適用したものである。

目　次

第 1 章　地盤の反力

矩形版が彈性基礎上にて或荷重を負ふときはその版は沈下を生ずる。從つて地盤は反力を惹起する。今版の沈下量(撓度)を w とすると，地盤の反力は Cw を以て表される。C は地盤の沈下係數で "kg/cm³" なる量で示され，其値は地盤の種類，狀態等に依り異なるものである。

第 2 章　基本解説

彈性基礎上に於ける矩形版の平衡の微分方程式は一般に次式

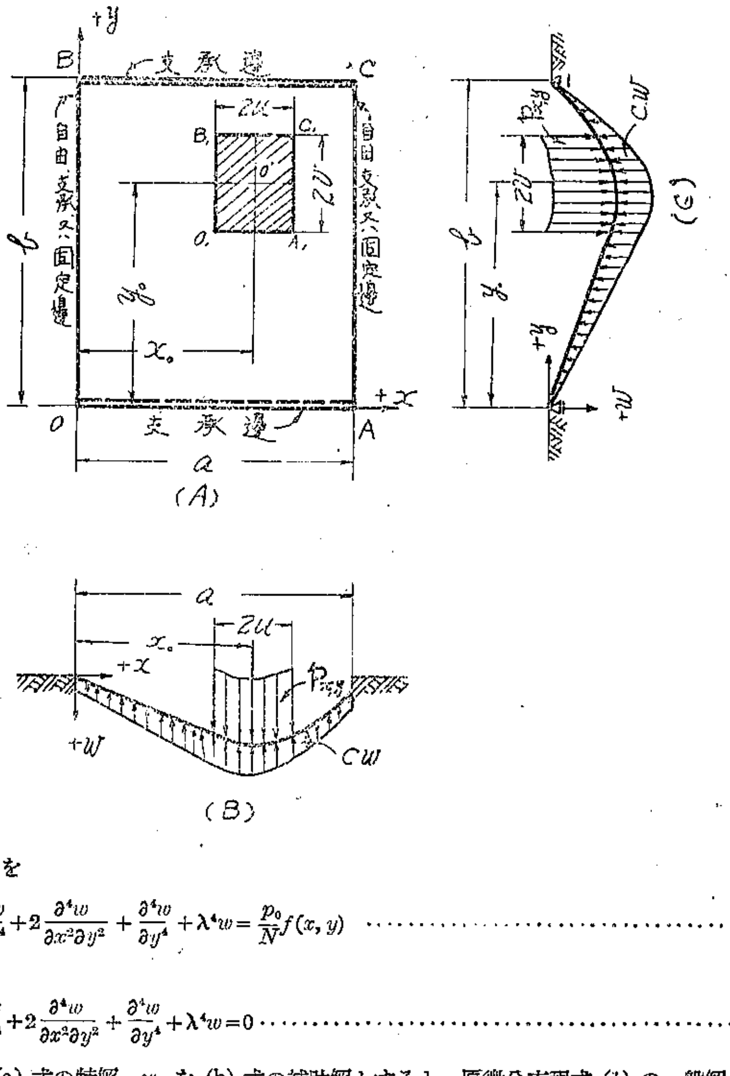
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 x}{\delta x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\lambda^4 w=\frac{p_{x,y}}{N}=\frac{p_0}{N}f(x,y) \quad \cdots\cdots(1)$$

にて表される。上式中，w は撓度，$\lambda^4=C/N$，C は地盤の沈下係數，$p_{x,y}$ は單位面積に對する荷重の大さ，N は

* 内務技師　内務省中國四國地方土木出張所長

版の剛度，即ち E を其彈性係數，ν を其ポアソン比とすれば，$N=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ にて表され，h は版の厚さを示すものである。圖-1 に於て (A) は平面圖，(B) は OA 側より見たる斷面圖，(C) は AC 側より見たる斷面圖とす。矩形版 OACB の相對する二邊 OA, BC を各々支承邊とし，他の相對する二邊 OB, AC は種々の境界條件を有するものとする。版上に分布荷重 $O_1A_1C_1B_1$（單位面積當荷重 $p_{x,y}$ とす）が加へられると版は彎曲し，下部には (B), (C) 圖-1 に示す如く Cw なる反力が惹起される。今座標は O を原點とし，OA, OB の方向に各々 x, y の正軸を取り w は下の方向を正とする。

圖-1.



今微分方程式 (1) を

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\lambda^4 w=\frac{p_0}{N}f(x,y) \quad\cdots\cdots\text{(a)}$$

及び

$$\frac{\partial^4 x}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\lambda^4 w=0 \quad\cdots\cdots\text{(b)}$$

に分類して，w_1 を (a) 式の特解，w_2 を (b) 式の補助解とすると，原微分方程式 (1) の一般解 w は

$$w=w_1+w_2 \quad\cdots\cdots\text{(2)}$$

にて表される。

1. w_1 の解式

微分方程式 (a) の特解 w_1 を求むるためには，先づ (a) 式の荷重函數 $f(x,y)$ を或函數にて表すことが捷徑である。それには荷重を三角函數の正弦級數に展開する。

$$f(x,y)=\sum_m\sum_n a_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \quad\cdots\cdots(3)$$

$$\xi=\frac{x}{a},\quad \eta=\frac{y}{b},\qquad m,n=1,2,3,4,\cdots\infty$$

更に (a) 式の特解を

$$w_1=\sum_m\sum_n A_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \quad\cdots\cdots(4)$$

$$m,n=1,2,3,4,\cdots\infty.$$

と假定する。之等 (3), (4) 式を (a) 式に代入すれば

$$\sum_m\sum_n\left\{A_{mn}\left(\frac{\pi^4m^4}{a^4}+2\frac{\pi^4m^2n^2}{a^2b^2}+\frac{\pi^4n^4}{b^4}+\lambda^4\right)-\frac{p_0}{N}a_{mn}\right\}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta=0$$

を得る。この關係は ξ 及 η の如何なる値に對しても成立すべきものであるから

$$A_{mn}\left(\frac{\pi^4m^4}{a^4}+2\frac{\pi^4m^2n^2}{a^2b^2}+\frac{\pi^4n^4}{b^4}+\lambda^4\right)-\frac{p_0}{N}a_{mn}=0$$

が成立する。故に

$$A_{mn}=\frac{p_0a_{mn}}{N\rho_{mn}} \quad\cdots\cdots(5)$$

但し
$$\rho_{mn}=\frac{\pi^4m^4}{a^4}+2\frac{\pi^4m^2n^2}{a^2b^2}+\frac{\pi^4n^4}{b^4}+\lambda^4$$

$$=\frac{\pi^4}{a^4}(m^2+K_n^2)(m^2+K_n'^2)$$

$$K_n^2=\frac{a^2}{b^2}n^2+i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\qquad K_n'^2=\frac{a^2}{b^2}n^2-i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}$$

を得る。そこで特解 w_1 は (4), (5) 式より

$$w_1=\sum_m\sum_n\frac{p_0a_{mn}}{N\rho_{mn}}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \quad\cdots\cdots(6)$$

$$m,n=1,2,3,4,\cdots\infty.$$

を得る。この a_{mn} は荷重の種類と位置により種々異なつた値を持つものである。

2. A_{mn} の解式

(A) 荷重が版上の任意の點にある場合

(a) 矩形型等分布荷重の場合

此の場合に於ては

$$p_{x,y}=p_0f(x,y)=p_0,\quad f(x,y)=1,\quad x_0-u\leqq x\leqq x_0+u\quad y_0-v\leqq y\leqq y_0+v \text{ 内に於て,}$$

$$=0,\quad f(x,y)=0,\quad x_0-u\geqq x\geqq x_0+u\quad y_0-v\geqq y\geqq y_0+v \text{ 内に於て,}$$

であるから (3) 式，即ち

$$\sum_m\sum_n a_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta=f(x,y)$$

を $0\leqq\xi\leqq1$, $0\leqq\eta\leqq1$ 内に於て Navier の方法に依つて正弦級數に展開すれば

$$\sum_m\sum_n a_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta=\sum_m\sum_n\left\{\frac{4}{ab}\int_{\xi_0-\xi_1}^{\xi_0+\xi_1}\int_{\eta_0-\eta_1}^{\eta_0+\eta_1}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta\, d\xi d\eta\right\}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta$$

となる。依つて

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_{\xi_0-\xi_1}^{\xi_0+\xi_1}\int_{\eta_0-\eta_1}^{\eta_0+\eta_1}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta\, d\xi d\eta$$

$$=\frac{16}{\pi^2 mn}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1 \cdots\cdots(7)$$

但し　$\xi_0=\frac{x_0}{a},\quad \xi_1=\frac{u}{a},\quad \eta_0=\frac{y_0}{b},\quad \eta_1=\frac{v}{b}$

となる。隨つて A_{mn} は (5) 式より

$$A_{mn}=\frac{16p_0}{N\pi^2 mn\,\rho_{mn}}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1 \cdots\cdots(8)$$

を得る。

この (8) 式が基本式となるもので，今後詳述する各種の荷重に對する公式は，皆この式より誘導せるものである。

(b) 直線荷重の場合

(i) 長 $2v$ なる直線荷重が圖-2 に示す如く oy 軸に平行なる場合

一般に單位面積當荷重 p_0 が或面積 $(4uv)$ にかゝるときの全荷重 P は

$P=4uvp_0$　　　　の關係から

$$p_0=\frac{P}{4ab\xi_1\eta_1}$$

が成立つから，これを (8) 式に代入すると圖-2 の場合の A_{mn} を得る。卽ち

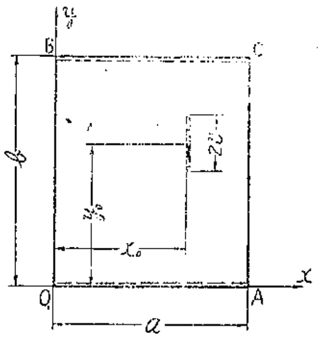


圖 - 2

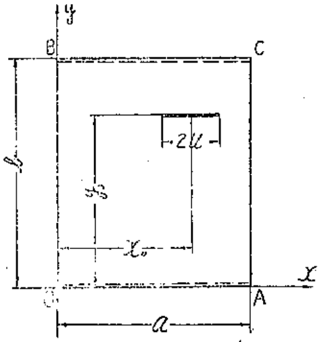


圖 - 3

$$A_{mn}=\frac{4P}{N\pi ab\eta_1 n\rho_{mn}}\sin m\pi\xi_0\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1 \cdots\cdots(9)$$

$$m,n=1,2,3,4,\cdots\cdot\infty.$$

但し　$\lim_{u\to 0}\frac{\sin m\pi\xi_1}{m\pi\xi_1}=1$　　が成立するからである。

(ii) 圖-3 の如く荷重が ox 軸に平行なるとき

この場合は

$$\lim_{v \to 0} \frac{\sin n\pi\eta_1}{n\pi\eta_1} = 1$$

が成立つから

$$A_{mn} = \frac{4P}{N\pi ab\xi_1 m\rho mn} \sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_0 \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

$$m, n = 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\infty.$$

(c)　圖-4 の如き等分布荷重があるとき

この場合は

$$x_0 = \frac{a}{2}, \quad \sin m\pi\xi_0 = \sin\frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \qquad m = 1, 3, 5, \cdots\cdots\infty \text{ のとき}$$

$$= 0 \qquad m = 2, 4, 6, \cdots\cdots\infty \text{ のとき}$$

又

$$u = \frac{a}{2}, \quad \sin m\pi\xi_1 = \sin\frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \qquad m = 1, 3, 5, \cdots\cdots\infty \text{ のとき}$$

$$= 0 \qquad m = 2, 4, 6, \cdots\cdots\infty \text{ のとき}$$

となるから

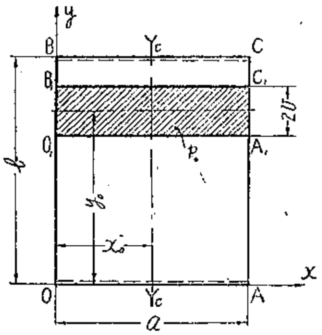


圖-4

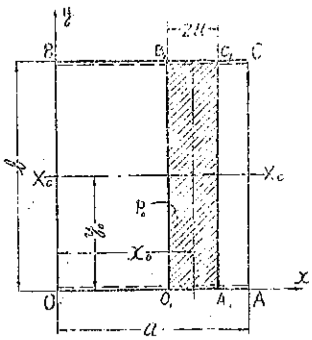


圖-5

$$\sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 = \left[(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]^2 = 1 \qquad m = 1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$$

$$\sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 = 0 \qquad m = 2, 4, 6, \cdots\cdots\infty$$

を得る。よつて A_{mn} は

$$A_{mn} = \frac{16p_0}{N\pi^2 mn\rho mn} \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

$$m = 1, 3, 5, \cdots\cdots\infty, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\infty$$

を得る。

(d)　圖-5 の如き等分布荷重の場合

この時は $v = \frac{b}{2}$，　$y_0 = \frac{b}{2}$　となるから

$$\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 = 1 \qquad n = 1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$$

$$\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 = 0 \qquad n=2,4,6,\cdots\infty$$

を得る。よつて前同樣に

$$A_{mn}=\frac{16p_0}{N\pi^2 mn\rho_{mn}}\sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\eta_1 \cdots\cdots(12)$$

$$m=1,2,3,4,\cdots\infty, \qquad n=1,3,5,\cdots\infty$$

となる。

(e) 圖-6 の如き ox 軸に平行なる直線荷重の場合

この場合は (11) 式に於て

$$\lim_{v\to 0}\frac{\sin n\pi\eta_1}{n\pi\eta_1}=1$$

であるから

$$A_{mn}=\frac{8P}{N\pi abm\rho_{mn}}\sin n\pi\eta_0 \cdots\cdots(13)$$

$$m=1,3,5,\cdots\infty, \qquad n=1,2,3,4,\cdots\infty$$

を得る。

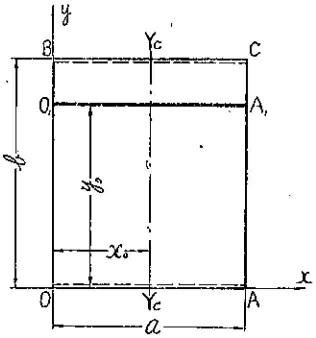


圖-6

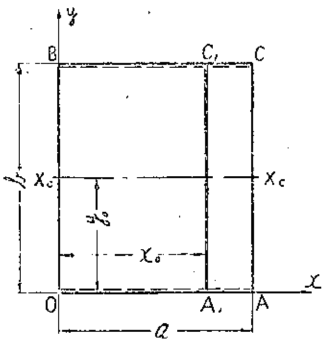


圖-7

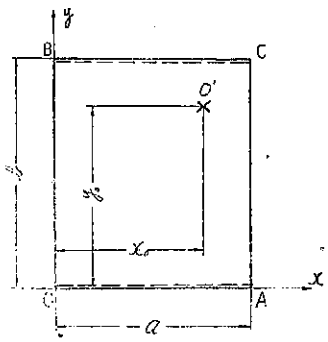


圖-8

(f) 圖-7 の如き oy 軸に平行なる直線荷重のあるとき

この場合は (12) 式より

$$A_{mn}=\frac{8P}{N\pi abn\rho_{mn}}\sin m\pi\xi_0 \cdots\cdots(14)$$

$$m=1,2,3,4,\cdots\infty,$$

を得る。

(g) 圖-8 の如く任意の點に集中荷重 P が存在する場合

この場合は (9) 又は (10) 式より

$$A_{mn}=\frac{4P}{Nab\rho_{mn}}\sin m\pi\xi_0 \sin n\pi\eta_0 \cdots\cdots(15)$$

$$m,n=1,2,3,4,\cdots\infty$$

を得る。

(B) 荷重面積の中心が x 軸に平行なる版の中心線上任意の點に在るとき

(a) 圖-9 の如く等分布荷重 p_0 を有するとき

この場合は　$y_0=\dfrac{b}{2}$，　$\eta_0=\dfrac{1}{2}$　であるから (8) 式より直ちに

$$A_{mn}=\frac{16P_0}{N\pi^2mn\rho_{mn}}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\pi\eta_1 \cdots\cdots(16)$$

$$m=1,2,3,4,\cdots\infty,\qquad n=1,3,5,\cdots\infty$$

を得る。

(b) 圖-10 の如き直線荷重が在るとき

この場合は　$y_0=\dfrac{b}{2}$，　$\eta_0=\dfrac{1}{2}$　であるから (10) 式より

$$A_{mn}=\frac{4P}{N\pi ab\xi_1 m\rho_{mn}}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdots\cdots(17)$$

$$m=1,2,3,4,\cdots\infty,\qquad n=1,3,5,\cdots\infty$$

を得る。

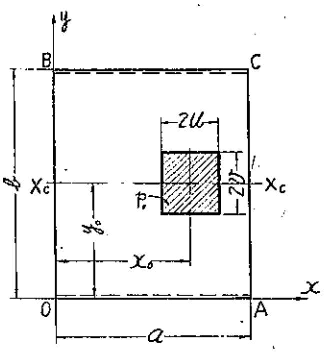


圖-9

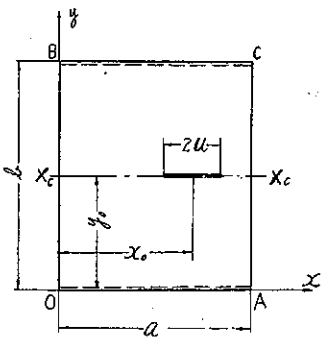


圖-10

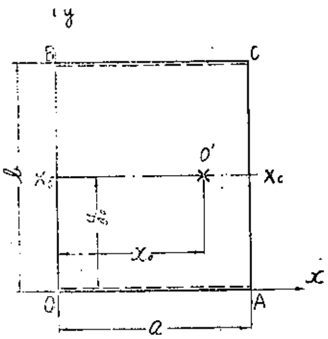


圖-11

(c) 圖-11 の如き集中荷重のとき

(15)式より直ちに

$$A_{mn}=\frac{4P}{Nab\rho_{mn}}\sin m\pi\xi_0(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdots\cdots(18)$$

$$m=1,2,3,4,\cdots\infty,\qquad n=1,3,5,\cdots\infty$$

となる。

(C) 荷重面積の中心が y 軸に平行なる版の中心線上にあるとき

(a) 圖-12 の如く中心線 Y_c—Y_c 上の任意の點に等分布荷重が存在する場合

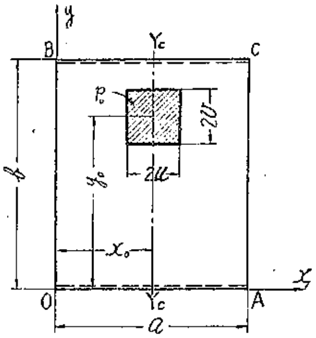


圖-12

この時は　$x_0=\dfrac{a}{2}$，　$\xi_0=\dfrac{1}{2}$　となるから (8) 式より直ちに

$$A_{mn}=\frac{16p_0}{N\pi^2mn\rho_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin m\pi\xi_1\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1 \cdots\cdots(19)$$

$$m=1,3,5,\cdots\infty,\qquad n=1,2,3,4,\cdots\infty$$

を得る。

(b) 圖-13 の如き直線荷重が存在する場合

(9) 式より直ちに

$$A_{mn}=\frac{4P}{N\pi ab\eta_1 n\rho_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin n\pi\eta_1\sin n\pi\eta_0 \quad\cdots\cdots(20)$$

$$m=1,3,5,\cdots\infty,\qquad n=1,2,3,4,\cdots\infty$$

を得る。

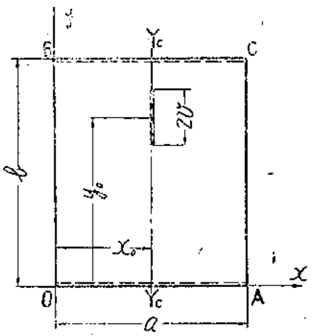


圖-13

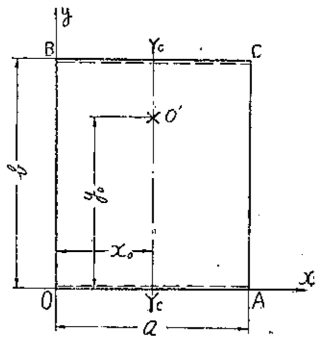


圖-14

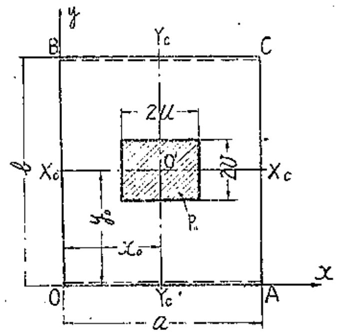


圖-15

(c) 圖-14 の如く O′ 點に集中荷重が存在する場合

(15) 式より直ちに

$$A_{mn}=\frac{4P}{Nab\rho_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin n\pi\eta_0 \quad\cdots\cdots(21)$$

$$m=1,3,5,\cdots\infty,\qquad n=1,2,3,4,\cdots\infty$$

を得る。

(D) 荷重面積の中心が版の中心と一致するとき

(a) 圖-15 の如く等分布荷重が版の中心點を圍んで存在するとき

この場合には

$$x_0=\frac{a}{2},\quad y_0=\frac{b}{2}\quad \text{即ち}\quad \xi_0=\frac{1}{2},\quad \eta_0=\frac{1}{2}$$

仍て (8) 式より直ちに

$$A_{mn}=\frac{16p_0}{N\pi^2 mn\rho_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin m\pi\xi_1(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\pi\eta_1 \quad\cdots\cdots(22)$$

$$m,n=1,3,5,\cdots\infty$$

を得る。

(b) 圖-16 の如き直線荷重が在るとき

(20) 式より直ちに

$$A_{mn}=\frac{4P}{N\pi ab\eta_1 n\rho_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\pi\eta_1 \quad\cdots\cdots(23)$$

$$m, n = 1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$$

を得る。

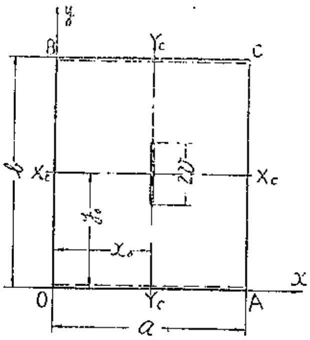


圖-16

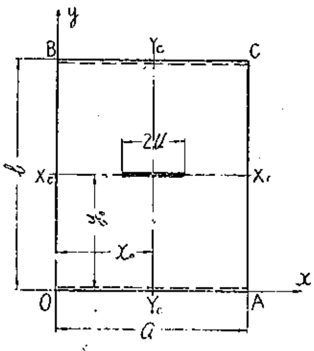


圖-17

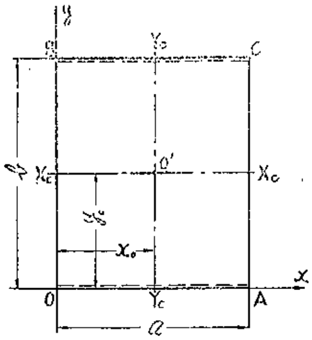


圖-18

(c)　圖-17 の如き直線荷重が在るとき。

(17) 式より直ちに

$$A_{mn} = \frac{4P}{N\pi ab\xi_1 m\rho_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin m\pi\xi_1 \quad \cdots\cdots(24)$$

$$m, n = 1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$$

を得る。

(d)　圖-18 の如く中心點 O′ に集中荷重 P が在るとき。

この場合には (21) 式より直ちに

$$A_{mn} = \frac{4P}{Nab\rho_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad \cdots\cdots(25)$$

$$m, n = 1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$$

を得る。

(e)　圖-19 の如く $O_1A_1B_1C_1$ に等分布荷重が在るとき。

この場合には (12) 式より直ちに

$$A_{mn} = \frac{16p_0}{N\pi^2 mn\rho_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin m\pi\xi_1 \quad \cdots\cdots(26)$$

$$m, n = 1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$$

を得る。

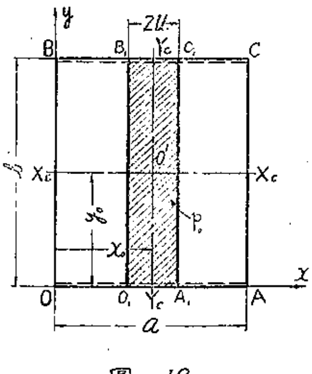


圖-19

(f)　圖-20 の如く $O_1A_1C_1B_1$ に等分布荷重が在るとき。

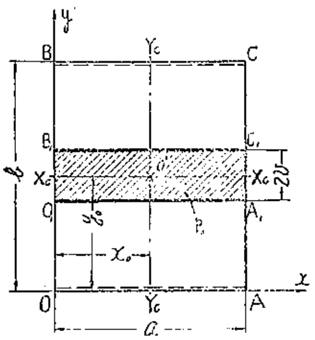
この場合には (11) 式より直ちに

$$A_{mn} = \frac{16p_0}{N\pi^2 mn\rho_{mn}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\pi\eta_1 \quad \cdots\cdots(27)$$

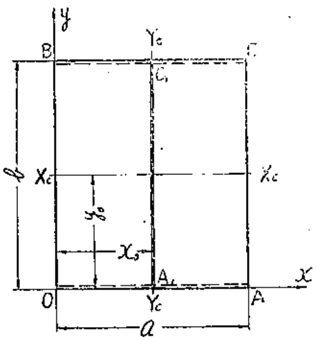
$$m, n = 1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$$

を得る。

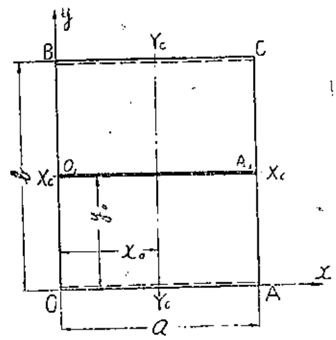
(g)　圖-21 の如き A_1C_1 直線荷重が在るとき。



圖－20



圖－21



圖－22

この場合は (14) 式より直ちに

$$A_{mn}=\frac{8P}{N\pi abn\rho_{mn}}(-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \cdots\cdots (28)$$

$$m,n=1,3,5,\cdots\cdots\infty$$

を得る。

(h) 圖-22 の如き O_1A_1 直線荷重が在るとき。

この場合は (13) 式より直ちに

$$A_{mn}=\frac{8P}{N\pi abm\rho_{mn}}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad \cdots\cdots (29)$$

$$m,n=1,3,5,\cdots\cdots\infty$$

を得る。

(i) 版全面に等分布荷重を有するとき。

$$A_{mn}=\frac{16p_0}{N\pi^2mn\rho_{mn}} \quad \cdots\cdots (30)$$

$$m,n=1,3,5,\cdots\cdots\infty$$

を直ちに求め得る。

(11) ～ (30) 式に於て，$m=1,3,5,\cdots\cdots\infty$ 又は $n=1,3,5,\cdots\cdots\infty$ とせしは m 又は n が夫々偶數の時には

$$A_{mn}=0$$

を意味するものである。

以上の如く荷重の種類と其分布狀態により A_{mn} は種々なる形式にて表はされるものである。

3. w_2 及び w の解式

方程式 (b) の補助解 w_2 を求むるには，M. Lèvy の代置法により w_2 を

$$w_2=\sum_n X_n(\xi)\sin n\pi\eta$$

$$\xi=\frac{x}{a},\quad \eta=\frac{y}{b},\quad n=1,2,3,4,\cdots\cdots\infty$$

と置いて，これを (b) 式に代入すると

$$\frac{d^4X_n}{d\xi^4}-2\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2\frac{d^2X_n}{d\xi^2}+\left(\pi^4\frac{a^4}{b^4}n^4+a^4\lambda^4\right)X_n=0$$

となるが，今 $D=d/d\xi$ とすれば

$$D^4-2\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2D^2+\pi^4\frac{a^4}{b^4}n^4+a^4\lambda^4=0$$

を得る。よつて

$$\left(D^2-\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2-ia^2\lambda^2\right)\left(D^2-\pi\frac{a^2}{b^2}n^2+ia^2\lambda_2\right)=0$$

となる。

故に D の 4 つの根

$$D=\pm\sqrt{\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2+ia^2\lambda^2}\qquad D=\pm\sqrt{\pi^2\frac{a^2}{b^2}n^2-ia^2\lambda^2}$$

$$\equiv\pm\pi K_n\qquad\qquad \equiv\pm\pi K_n'$$

$$K_n\equiv\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}}\qquad K_n'\equiv\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}}$$

を得る。

そこで獨立解として

$$\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right),\quad \sinh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right),\quad \cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right),\quad \sinh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)$$

が得られるから (b) の解として

$$w_2=\sum_n\left\{A_n\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+A_n'\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+B_n\sinh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\right.$$
$$\left.+B_n'\sinh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\right\}\sin n\pi\eta \cdots\cdots(31)$$

$$n=1,2,3,4,\cdots\cdots\infty$$

を採用する。

よつて，基本方程式 (1) の一般解 w は (2) 式より w_1+w_2 であるから

$$w=\sum_n\left\{A_n\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+A_n'\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+B_n\sinh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\right.$$
$$\left.+B_n'\sinh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right\}\sin n\pi\eta \cdots\cdots(32)$$

$$m,n=1,2,3,4,\cdots\infty$$

を得る。この (32) 式が求むる基本解式である。然してこの式は支承邊に對する境界條件即ち

$$(w)_{\substack{\eta=0\\\eta=1}}=0,\quad \left(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)_{\substack{\eta=0\\\eta=1}}=0$$

は夫れ自身既に滿足して居るから 4 つの未定係數 A_n, A_n', B_n, B_n' は其他の二邊に對する境界條件にて決定すべきものである。

第 3 章　彈性基礎上に於て相對二邊支承され他の二邊が自由なる矩形版

本問題の境界條件として (圖-23)

1. 自由邊 (OB, AC) の曲げモーメント M_x は消失する。

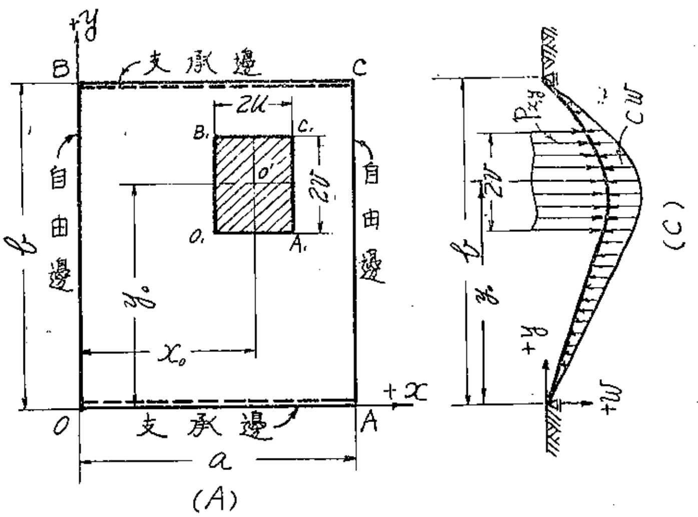
即ち $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\qquad x=0,(\xi=0),\quad x=a,(\xi=1)$ に對して，

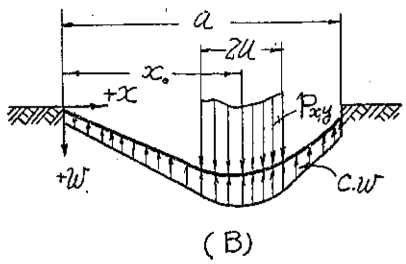
2. 自由邊 (OB, AC) の反力は消失する。

即ち $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=0,\qquad x=0,(\xi=0),\quad x=a,(\xi=1)$ に對して，

が成立せねばならぬ。以上 4 つの條件より各常數は決定し得るのである。

圖-23.





$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ を作り

$(M_x)_{\xi=0}=0$ 即ち $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\xi=0}=0$ より

$$A_n\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\cosh\frac{\pi}{2}K_n+A_n'\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\cosh\frac{\pi}{2}K_n'$$

$$+B_n\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\sinh\frac{\pi}{2}K_n+B_n'\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\sinh\frac{\pi}{2}K_n'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)}$$

を得る。同様に $(M_x)_{\xi=1}=0$ 即ち $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\xi=1}=0$ より

$$A_n\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\cosh\frac{\pi}{2}K_n+A_n'\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\cosh\frac{\pi}{2}K_n'$$

$$-B_n\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\sinh\frac{\pi}{2}K_n-B_n'\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\sinh\frac{\pi}{2}K_n'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

を得る。$\frac{(a)+(b)}{2}$ 及び $\frac{(a)-(b)}{2}$ より次の 2 式

$$A_n\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\cosh\frac{\pi}{2}K_n+A_n'\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\cosh\frac{\pi}{2}K_n'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

$$B_n\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\sinh\frac{\pi}{2}K_n+B_n'\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\sinh\frac{\pi}{2}K_n'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

を得る。今便宜上

$$E_n'=\frac{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}{K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2}A_n \qquad F_n'=\frac{\sinh\frac{\pi}{2}K_n}{K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2}B_n$$

なる如き新未定係數 E_n', F_n' を用ゆる事とすると，A_n, A_n' 等は夫々

$$\left.\begin{aligned}
A_n&=E_n'\frac{K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n} \qquad & A_n'&=-E_n'\frac{K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\\
B_n&=F_n'\frac{K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n} \qquad & B_n'&=-F_n'\frac{K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n'}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(e)$$

なる如き關係を持つ。依つて 4 つの未定係數を含む (32) 式は 2 つの未定係數を含むあらたな式，即ち

$$w=\sum_n\Bigg[E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}$$

$$+F_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\right.$$

$$\left.\times\frac{\sinh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\Bigg]\sin n\pi\eta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

$$m,n=1,2,3,4,\cdots\infty$$

に變形し得るのである。未定係數の少ない式ほど取扱ひ等に便宜であるから今後はすべてこの (33) 式を基本式とすることにする。この (33) 式の E_n', F_n' は版の殘りの境界條件，即ち $\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)_{\substack{\xi=0\\ \xi=1}}=0$ より決定すべきものである。

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)_{\xi=0}=0 \qquad \text{の條件式を作ると}$$

$$E_n'\left[K_n\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\left\{K_n^2-(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\tanh\frac{\pi}{2}K_n-K_n'\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\left\{K_n'^2-(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\right.$$

$$\times\tanh\frac{\pi}{2}Kn'\Big]+Fn'\Big[Kn\Big(Kn'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)\Big\{Kn^2-(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big\}\coth\frac{\pi}{2}Kn-Kn'\Big(Kn^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)$$

$$\times\Big\{Kn'^2-(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big\}\coth\frac{\pi}{2}Kn'\Big]+\sum_m A_{mn}m\Big\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big\}=0$$

となるが，この式内の

$$Kn^2-(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2=\frac{a^2}{b^2}n^2+i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}-\frac{2a^2}{b^2}n^2+\frac{\nu a^2}{b^2}n^2$$

$$=-\Big(Kn'^2-\nu\frac{a^2}{b^2}n^2\Big)$$

となり，又同様に

$$Kn'^2-(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2=-\Big(Kn^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)$$

となるから上式は

$$En'\Big\{Kn\Big(Kn'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\tanh\frac{\pi}{2}Kn-Kn'\Big(Kn^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\tanh\frac{\pi}{2}Kn'\Big\}$$

$$+Fn'\Big\{Kn\Big(Kn'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\coth\frac{\pi}{2}Kn-Kn'\Big(Kn^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\coth\frac{\pi}{2}Kn'\Big\}$$

$$=\sum_m A_{mn}m\Big\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big\}\cdots\cdots\cdots\text{(f)}$$

と變形される。

同様に

$$\Big\{\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\Big\}_{\xi=1}=0 \qquad \text{より}$$

$$En'\Big\{Kn\Big(Kn'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\tanh\frac{\pi}{2}Kn-Kn'\Big(Kn^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\tanh\frac{\pi}{2}Kn'\Big\}$$

$$-Fn'\Big\{Kn\Big(Kn'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\coth\frac{\pi}{2}Kn-Kn'\Big(Kn^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\coth\frac{\pi}{2}Kn'\Big\}$$

$$=-\sum_m A_{mn}m\Big\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big\}(-1)^m\cdots\cdots\cdots\text{(g)}$$

を得る。

隨つて (f)+(g) 及び (f)−(g) より En', Fn' は各々

$$\left.\begin{aligned}En'&=\frac{\sum_m A_{mn}\frac{1-(-1)^m}{2}m\Big\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big\}}{Kn\Big(Kn'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\tanh\frac{\pi}{2}Kn-Kn'\Big(Kn^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\tanh\frac{\pi}{2}Kn'}\\ Fn'&=\frac{\sum_m A_{mn}\frac{1+(-1)^m}{2}m\Big\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big\}}{Kn\Big(Kn'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\coth\frac{\pi}{2}Kn-Kn'\Big(Kn^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\Big)^2\coth\frac{\pi}{2}Kn'}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(34)}$$

の 2 式を得る。然しながら (33),(34) 式共 i を含むためこれを消去せねばならぬ。

Kn^2, Kn'^2 は

$$Kn^2=\frac{a^2}{b^2}n^2+i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2} \qquad Kn'^2=\frac{a^2}{b^2}n^2-i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}$$

であるから K_n, K_n' は

$$K_n=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}+\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}-\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}}\equiv p_n+iq_n$$

$$K_n'=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}+\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}-\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}}\equiv p_n-iq_n$$

を作り i を追出す計算をすると遂に w は

$$w=\sum_n\left[E_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}f(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)\right\}+F_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}f_1(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi_1(x)\right\}\right.$$
$$\left.+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta \quad \cdots\cdots (35)_1$$

$$m, n=1, 2, 3, 4, \cdots\infty$$

但し

$$E_n=\frac{\sum_m A_{mn}\frac{1-(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}}{-a_n\sin\pi q_n-a_n'\sinh\pi p_n}$$

$$F_n=\frac{\sum_m A_{mn}\frac{1+(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}}{a_n\sin\pi q_n-a_n'\sinh\pi p_n}$$

$$a_n=\left\{(1-\nu)^2\frac{a^4n^4}{b^4}-\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}p_n+2(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2n^2}{\pi^2b^2}q_n,\quad a_n'=\left\{(1-\nu)^2\frac{a^4n^4}{b^4}-\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}q_n-2(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2n^2}{\pi^2b^2}p_n$$

$$p_n=\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}+\frac{a^2n^2}{b^2}}{2}},\qquad q_n=\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}-\frac{a^2}{b^2}n^2}{2}}$$

$$N=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\qquad \lambda^4=\frac{C}{N}$$

$$f(x)=\sinh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n\xi+\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(1-\xi)$$

$$f_1(x)=\sinh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n\xi-\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(1-\xi)$$

$$\phi(x)=\cosh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n\xi+\cosh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(1-\xi)$$

$$\phi_1(x)=\cosh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n\xi-\cosh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(1-\xi)$$

を得る。圖-23 に示す如き p_0 なる單位壓力を有する等分布荷重に對する A_{mn} は (8) 式より

$$A_{mn}=\frac{16p_0}{N\pi^2mn\rho mn}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1$$

であるから，$(35)_1$ 式にて整理すると w は

$$w=\sum_n\left[E_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)\right\}+F_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f_1(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi_1(x)\right\}\right.$$
$$\left.+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta \cdots\cdots (35)_2$$

玆に

$$A_{mn}=\frac{16p_0a^4}{N\pi^6mn\left\{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1$$

となる。又圖-15 に示す如く等分布荷重が版の中心點上にあるときの A_{mn} は (22) 式より得られるから，これを $(35)_2$ 式に入れて整理すると w は

$$w=\sum_n\left[E_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)\right\}+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)_3$$

$$m, n=1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$$

但し

$$A_{mn}=\frac{16p_0a^4(-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{N\pi^6mn\left\{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}\sin m\pi\xi_1\sin n\pi\eta_1$$

を得る。又版全面に等分布荷重がある場合には A_{mn} は (30) 式より得られるから w は

$$w=\sum_n\left[E_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)\right\}+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)_4$$

$$m, n=1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$$

但し

$$A_{mn}=\frac{16p_0a^4}{N\pi^6mn\left\{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}}$$

を得る。

斯くの如く $(35)_1$ 式に於て A_{mn} を荷重の種類別に定むれば，その場合に對應する w を求むる事が出來る。

この式中係數 E_n, F_n は $m=1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$ の時は E_n は一定の値を採るに反し F_n は零となる。又 $m=2, 4, 6, \cdots\cdots\infty$ の時は F_n は一定の値となるも E_n は零となる。而してこの $m=1, 3, 5, \cdots\cdots\infty$ 即ち m が奇數のときは w が x-軸の方向に版の中心線に關して對稱，$m=2, 4, 6, \cdots\cdots\infty$ 即ち m が偶數のときは w が x-軸の方向に版の中心線に對して斜對稱なる場合に對應するものである。

以上にて，荷重の種類とその位置とにより $(35)_1, (35)_2, (35)_3, (35)_4$ の各式が適用される。之等は m, n の項を含む二重無限級數であるから，その數値計算は可なり面倒であるが第 13 章の計算例に示す如く荷重の位置によつては收斂が急速であるから m, n 共に第 7 項迄採用すれば殆んど正確に近い結果が得られる。然し等分布荷重が版全面に載荷されたる場合は m, n 共に相當に多くの項を取らなければならない。

(35) 式中係數 E_n, F_n 及び最終項は m, n に關しての無限級數で表はされて居るから，是等を m に就て總和すると n のみの級數となり其の收斂は極めて早い式となる。

この計算方法は Adolf Kneser 著 "Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik" の第 38 節並に井口鹿象氏著 "Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten" の第 5 節を參考として計算する事とする。

今 $1/\rho_{mn}$ を部分分數に分つと

$$\sum_m\frac{1}{\rho_{mn}}=\sum_m\frac{a^4}{\pi^4}\frac{1}{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}$$

$$=\sum_m \frac{a^4}{\pi^4}\cdot\frac{1}{Kn^2-Kn'^2}\left(\frac{1}{m^2+Kn'^2}-\frac{1}{m^2+Kn^2}\right)$$

玆に

$$Kn^2=\frac{a^2n^2}{b^2}+i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}$$

$$Kn'^2=\frac{a^2n^2}{b^2}-i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}$$

を得るから

$$\sum_m \frac{1}{\rho mn}\cos m\pi\xi=\sum_m \frac{a^4}{\pi^4}\cdot\frac{1}{Kn^2-Kn'^2}\left\{\frac{\cos m\pi\xi}{m^2+Kn'^2}-\frac{\cos m\pi\xi}{m^2+Kn^2}\right\}\cdots\cdots(36)$$

$$m=1,2,3,4,\cdots\cdot\infty$$

となる。

扨て新しく $\cosh\omega\theta$ なる函數を取り來りこれを $-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ の區間にて「フーリエ」の級數に展開すると

$$\sum_m \frac{\cos\omega(\pi-\theta)}{m^2+\omega^2}=\frac{\pi\cosh\omega\theta}{2\omega\sinh\omega\pi}-\frac{1}{2\omega^2}$$

なる關係が成立つ。ω は變數 θ を含まない如何なる値でも差支へない。更に上式にて，$\pi-\theta=\pi\xi$ と置くと $\theta=\pi(1-\xi)$ となり ξ の區間は零と 2 の間となる。

依つて上式は

$$\sum_m \frac{1}{m^2+\omega^2}\cos m\pi\xi=-\frac{1}{2\omega^2}+\frac{\pi\cosh\omega\pi(1-\xi)}{2\omega\sinh\omega\pi}\cdots\cdots(37)$$

$$0\leqq\xi\leqq2 \qquad m=1,2,3,4,\cdots\cdot\infty$$

となる。(36) と (37) 式とより次式を得る。

$$\sum_m \frac{1}{\rho mn}\cos m\pi\xi=\frac{a^4}{\pi^4}\frac{1}{Kn^2-Kn'^2}\left\{\frac{\pi\cosh\pi Kn'(1-\xi)}{2Kn'\sinh\pi Kn'}-\frac{1}{2Kn'^2}+\frac{1}{2Kn^2}-\frac{\pi\cosh\pi Kn(1-\xi)}{2Kn\sinh\pi Kn}\right\}\cdots(38)$$

(38) 式中の Kn, Kn' には i を含むから Kn, Kn' を

$$\frac{Kn}{Kn'}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2\pm i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}}=pn\pm iqn$$

$$\text{但し}\quad \frac{pn}{qn}=\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{a^4n^4}{b^4}+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}\pm\frac{a^2n^2}{b^2}}{2}}$$

として，i を追出す計算をすると

$$\sum_m \frac{1}{\rho m}\cos m\pi\xi=\frac{a^4}{\pi^4}\left\{\frac{-1}{2\left(\frac{a^4n^4}{b^4}+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)}+\frac{\pi(pn\gamma_{n,\xi}+qns_{n,\xi})}{2\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{a^4n^4}{b^4}+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}(\cosh 2\pi pn-\cos 2\pi qn)}\right\}\cdots(39)$$

但し

$$\gamma_{n,\xi}=\cosh\pi pn(2-\xi)\sin\pi qn\xi+\cosh\pi pn\xi\sin\pi qn(2-\xi)$$

$$s_{n,\xi}=\sinh\pi pn(2-\xi)\cos\pi qn\xi+\sinh\pi pn\xi\cos\pi qn(2-\xi)$$

$$0\leqq\xi\leqq2 \qquad n=1,2,3,4,\cdots\cdot\infty$$

なる結果を得る。即ち (39) 式の左邊は m, n を含むが，右邊は n だけを含み m は含まぬから，m の總和の式に外ならないのである。同樣な方法により，或は直接 (39) 式より次の諸公式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_m \frac{m}{\rho_{mn}}\sin m\pi\xi = -\frac{a^4}{\pi}\frac{1}{2a^2\lambda^2 t_n}u_{n,\xi} && 0<\xi<2\\
&\sum_m \frac{m^2}{\rho_{mn}}\cos m\pi\xi = -\frac{a^4}{\pi}\frac{1}{2a^2\lambda^2 t_n}(p_n\gamma_{n,\xi}-q_n s_{n,\xi}) && 0\leqq\xi\leqq 2\\
&\sum_m \frac{m^3}{\rho_{mn}}\sin m\pi\xi = \frac{a^4}{\pi}\frac{1}{2a^2\lambda^2 t_n}\left(\frac{a^2n^2}{b^2}u_{n,\xi}+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}v_{n,\xi}\right) && 0<\xi<2\\
&\sum_m \frac{1}{m\rho_{mn}}\sin m\pi\xi = \frac{a^4}{\pi^3}\frac{1}{2\left(\frac{a^4n^4}{b^4}+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)}\left\{(1-\xi)-\frac{\pi^2}{a^2\lambda^2 t_n}\left(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}v_{n,\xi}-\frac{a^2n^2}{b^2}u_{n,\xi}\right)\right\} &&\\
& && 0<\xi<2
\end{aligned}\right\}\cdots(40)$$

但し，

$$u_{n,\xi}=\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(2-\xi)-\sinh\pi p_n(2-\xi)\sin\pi q_n\xi$$

$$v_{n,\xi}=\cosh\pi p_n(2-\xi)\cos\pi q_n\xi-\cosh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(2-\xi)$$

$$t_n=\cosh 2\pi p_n-\cos 2\pi q_n$$

更に (39) 及び (40) 式に於て，ξ の代りに $1-\xi$ と置いて整理すると次の諸公式

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_m \frac{1}{\rho_{mn}}(-1)^m\cos m\pi\xi = \frac{a^4}{\pi^4}\left\{-\frac{1}{2\left(\frac{a^4n^4}{b^4}+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)}+\frac{1}{2\frac{a^2\lambda^2}{\pi^3}\sqrt{\frac{a^4n^4}{b^4}+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}\,t_n}\right. &&\\
&\qquad\left.\times(p_n\gamma_{n,1-\xi}+q_n s_{n,1-\xi})\right\} && 0\leqq 1-\xi\leqq 2\\
&\sum_m \frac{m}{\rho_{mn}}(-1)^m\sin m\pi\xi = \frac{a^4}{\pi}\frac{1}{2a^2\lambda^2 t_n}u_{n,1-\xi} && 0<1-\xi<2\\
&\sum_m \frac{m^2}{\rho_{mn}}(-1)^m\cos m\pi\xi = -\frac{a^4}{\pi}\frac{1}{2a^2\lambda^2 t_n}(p_n\gamma_{n,1-\xi}-q_n s_{n,1-\xi}) && 0\leqq 1-\xi\leqq 2\\
&\sum_m \frac{m^3}{\rho_{mn}}(-1)^m\sin m\pi\xi = -\frac{a^4}{\pi}\frac{1}{2a^2\lambda^2 t_n}\left(\frac{a^2n^2}{b^2}u_{n,1-\xi}+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}v_{n,1-\xi}\right) &&\\
& && 0<1-\xi<2\\
&\sum_m \frac{1}{m\rho_{mn}}(-1)^m\sin m\pi\xi = -\frac{a^4}{\pi^3}\frac{1}{2\left(\frac{a^4n^4}{b^4}+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)}\left\{\xi-\frac{\pi^2}{a^2\lambda^2 t_n}\left(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}v_{n,1-\xi}\right.\right. &&\\
&\qquad\left.\left.-\frac{a^2}{b^2}n^2u_{n,1-\xi}\right)\right\} && 0<1-\xi<2
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(41)$$

等を得る。更に以上 (39), (40), (41) の各式を適宜組合せると次の諸公式

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_m \frac{m^2}{\rho_{mn}}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1 = \frac{a^4}{\pi}\frac{1}{4a^2\lambda^2 t_n}\{-p_n(\gamma_{n,\xi'}-\gamma_{n,\xi''})+q_n(s_{n,\xi'}-s_{n,\xi''})\} &&\\
& && \begin{matrix}0\leqq\xi'\leqq 2\\ 0\leqq\xi''\leqq 2\end{matrix}\\
&\sum_m \frac{1}{\rho_{mn}}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1 = \frac{a^4}{\pi}\frac{1}{4a^2\lambda^2\sqrt{\frac{a^4n^4}{b^4}+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}\,t_n}\{p_n(\gamma_{n,\xi'}-\gamma_{n,\xi''}) &&\\
&\qquad+q_n(s_{n,\xi'}-s_{n,\xi''})\} && \begin{matrix}〃 & 〃\\ 〃 & 〃\end{matrix}\\
&\sum_m \frac{m^2}{\rho_{mn}}(-1)^m\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1 = -\frac{a^4}{\pi}\frac{1}{4a^2\lambda^2 t_n}\{-p_n(\gamma_{n,1-\xi''}-\gamma_{n,1-\xi'}) &&\\
&\qquad+q_n(s_{n,1-\xi''}-s_{n,1-\xi'})\} && \begin{matrix}0\leqq 1-\xi'\leqq 2\\ 0\leqq 1-\xi''\leqq 2\end{matrix}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(42)$$

$$\sum_m \frac{1}{\rho mn}(-1)^m \sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 = -\frac{a^4}{\pi}\frac{1}{4a^2\lambda^2\sqrt{\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}\,t_n}$$

$$\times\{p_n(\gamma_{n,1-\xi''}-\gamma_{n,1-\xi'})+q_n(\delta_{n,1-\xi''}-\delta_{n,1-\xi'})\} \qquad \begin{matrix} 0\leqq 1-\xi'\leqq 2 \\ 0\leqq 1-\xi''\leqq 2 \end{matrix}$$

但し, $\qquad \xi'=\xi_0-\xi_1, \qquad \xi''=\xi_0+\xi_1$

等を得る。

今 A_{mn} を

$$A_{mn}=\frac{16p_0}{N\pi^2 mn\rho mn}\sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1$$

(圖-23 に示す荷重) とすれば

$$\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi = \frac{16p_0}{N\pi^2 mn\rho mn}\sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1$$

$$=\frac{4p_0}{N\pi^2 mn\rho mn}\{\sin m\pi(\xi_0-\xi_1+\xi)-\sin m\pi(\xi_0-\xi_1-\xi)-\sin m\pi(\xi_0+\xi_1+\xi)$$

$$+\sin m\pi(\xi_0+\xi_1-\xi)\}\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1$$

を得るから右邊の $\dfrac{1}{m\rho mn}\sin m\pi(\xi_0-\xi_1+\xi)$ 等に (40) の公式を夫々適用すると

$$\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi = \frac{p_0a^4}{N}\frac{2}{\pi^3a^2\lambda^2 n\left(\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)t_n}\Bigg[\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}(v_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}-v_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}-v_{n,\xi_0+\xi_1-\xi}$$

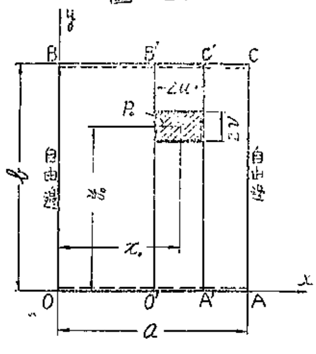
$$+v_{n,\xi_0+\xi_1+\xi})+\frac{a^2n^2}{b^2}(u_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}-u_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}-u_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}+u_{n,\xi_0+\xi_1-\xi})\Bigg]\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \qquad \cdots\cdots(43)_1$$

を得る。而して $(43)_1$ 式の右邊の $v_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}$ 又は $u_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}$ 等は常に

$$0<\xi_0-\xi_1-\xi<2$$

でなければならない。この事は $(43)_1$ 式は圖-24 にて oy 軸とそれに平行なる O'B' 線(荷重の端を通る線)との間に圍まれたる各點の ξ にのみ適用出來る事を意味するものである。

圖-24



從つて平行線 O'B', A'C' 間に圍まれたる各點の ξ に對しては次式

$$\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi = \frac{p_0a^4}{N}\frac{2}{\pi^3a^2\lambda^2 n\left(\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)t_n}$$

$$\times\Bigg[\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}(v_{n,\xi-\overline{\xi_0-\xi_1}}-v_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}-v_{n,\xi_0+\xi_1-\xi}+v_{n,\xi_0+\xi_1+\xi})$$

$$+\frac{a^2n^2}{b^2}(u_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}+u_{n,\xi-\overline{\xi_0-\xi_1}}-u_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}+u_{n,\xi_0+\xi_1-\xi})\Bigg]\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \cdots\cdots(43)_2$$

が適用出來る。又直線 A'C' を越した各點の ξ に對する式としては

$$\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi = \frac{p_0a^4}{N}\frac{2}{\pi^3a^2\lambda^2 n\left(\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)t_n}\Bigg[\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}(v_{n,\xi-\overline{\xi_0-\xi_1}}-v_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}-v_{n,\xi-\overline{\xi_0+\xi_1}}+v_{n,\xi_0+\xi_1+\xi})$$

$$+\frac{a^2n^2}{b^2}\left(u_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}+u_{n,\xi-\overline{\xi_0-\xi_1}}-u_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}-u_{n,\xi-\overline{\xi_0+\xi_1}}\right)\Bigg]\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \cdots\cdots(43)_3$$

が得られるのである。

(43) 式は n のみを含み，m は含まぬ。即ち m の總和の式である。この式の右の部分を按ずるに，分母は n の五次式，分子は二次式であるから，n の「マイナス」三次式となる。加ふるに分母には t_n が掛つて居るが，t_n は

$$t_n = \cosh 2\pi p_n - \cos 2\pi q_n$$

でこの値は n の増加に從つて p_n は

$$p_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}+\dfrac{a^2n^2}{b^2}}{2}}$$

であるから常に増加し，$\cosh 2\pi p_n$ は急激に増加する。故に (43) 式の右邊の各級數はその收斂が非常に早い事を知る。(35) 式中の E_n, F_n は等分布荷重に對しては

$$E_n = \frac{1}{-a_n \sin \pi q_n - a_n' \sinh \pi p_n} \sum_m \frac{16 p_0}{N\pi^2 n \rho_{mn}} \frac{1-(-1)^m}{2} \left\{ m^2 + (2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2 \right\}$$

$$\times \sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1$$

$$F_n = \frac{1}{a_n \sin \pi q_n - a_n' \sinh \pi p_n} \sum_m \frac{16 p_0}{N\pi^2 n \rho_{mn}} \frac{1+(-1)^m}{2} \left\{ m^2 + (2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2 \right\}$$

$$\times \sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1$$

となる。之等の m の總和を (42) 式より先づ

$$\sum_m \frac{1}{\rho_{mn}} \left\{1-(-1)^m\right\} \left\{ m^2 + (2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2 \right\} \sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1$$

$$= \frac{a^4}{\pi} \frac{1}{4a^2\lambda^2 t_n} \left\{ \left(-1 + \frac{(2-\nu)\dfrac{a^2}{b^2}n^2}{\sqrt{\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}} \right) p_n R_{n,\xi} + \left(1 + \frac{(2-\nu)\dfrac{a^2}{b^2}n^2}{\sqrt{\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}} \right) q_n S_{n,\xi} \right\}$$

$$\sum_m \frac{1}{\rho_{mn}} \left\{1+(-1)^m\right\} \left\{ m^2 + (2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2 \right\} \sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1$$

$$= \frac{a^4}{\pi} \frac{1}{4a^2\lambda^2 t_n} \left\{ \left(-1 + \frac{(2-\nu)\dfrac{a^2}{b^2}n^2}{\sqrt{\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}} \right) p_n R_{n,\xi}' + \left(1 + \frac{(2-\nu)\dfrac{a^2}{b^2}n^2}{\sqrt{\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}} \right) q_n S'_{n,\xi} \right\}$$

等を得るから E_n, F_n は

$$\left.\begin{aligned} E_n = & \left[\frac{p_0 a^4}{N\pi^3 a^2\lambda^2 n t_n(-a_n \sin \pi q_n - a_n' \sinh \pi p_n)} \right. \\ & \left. \times \left\{ \left(-1 + \frac{(2-\nu)\dfrac{a^2}{b^2}n^2}{\sqrt{\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}} \right) p_n R_{n,\xi} + \left(1 + \frac{(2-\nu)\dfrac{a^2}{b^2}n^2}{\sqrt{\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}} \right) q_n S_{n,\xi} \right\} \right] \\ & \times \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(44)$$

$$E_n=\left[\frac{p_0a^4}{N\pi^3a^2\lambda^2nt_n(\alpha_n\sin\pi q_n-\alpha_n'\sinh\pi p_n)}\right.$$
$$\left.\times\left\{\left(-1+\frac{(2-\nu)\dfrac{a^2}{b^2}n^2}{\sqrt{\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}}\right)p_nR'_{n,\xi}+\left(1+\frac{(2-\nu)\dfrac{a^2}{b^2}n^2}{\sqrt{\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}}}\right)q_nS_n',_{\xi}\right\}\right]$$
$$\times\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1$$

茲に

$$R_{n,\xi}=\gamma_{n,\xi'}+\gamma_{n,1-\xi''}-\gamma_{n,\xi''}-\gamma_{n,1-\xi'}$$
$$S_{n,\xi}=s_{n,\xi'}+s_{n,1-\xi''}-s_{n,\xi''}-s_{n,1-\xi'}$$
$$R_n',_{\xi}=\gamma_{n,\xi'}-\gamma_{n,\xi''}-\gamma_{n,1-\xi''}+\gamma_{n,1-\xi'}$$
$$S'_{n,\xi}=s_{n,\xi'}-s_{n,\xi''}-s_{n,1-\xi''}+s_{n,1-\xi'}$$
$$\xi'=\xi_0-\xi_1,\qquad \xi''=\xi_0+\xi_1$$

の結果となる。よつて以上を綜合すると w は

$$w=\sum_n\left[E_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)\right\}+F_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f_1(x)+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi_1(x)\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{2p_0a^4}{N\pi^3a^2\lambda^2n\left(\dfrac{a^4n^4}{b^4}+\dfrac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)t_n}\left\{\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}V_{n,\xi}+\frac{a^2}{b^2}n^2U_{n,\xi}\right\}\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1\right]\sin n\pi\eta\quad\cdots\cdots(45)$$
$$n=1,2,3,4,\cdots\cdots\infty$$

茲に

$$V_{n,\xi}=v_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}-v_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}-v_{n,\xi_0+\xi_1-\xi}+v_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}$$
$$U_{n,\xi}=U_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}-u_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}-u_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}+u_{n,\xi_0+\xi_1-\xi}$$

E_n, F_n は (44) 式

を得る。

この (45) 式は $(35)_2$ 式を n のみに關する單式級數に變形したものに外ならない。

以上によりて撓度 w を得たのであるが, 版の曲げモーメント (M), 剪斷力 (S) 及び反力 (Q) は一般に

$$M_x=-N\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right),\quad S_x=-N\left(\frac{\partial^3w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3w}{\partial x\partial y^2}\right),\quad Q_x=-N\left(\frac{\partial^3w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3w}{\partial x\partial y^2}\right)$$
$$M_y=-N\left(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right),\quad S_y=-N\left(\frac{\partial^3w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3w}{\partial x^2\partial y}\right),\quad Q_y=-N\left(\frac{\partial^3w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3w}{\partial x^2\partial y}\right)$$

なる關係式にて示される。依つて $(35)_1$ 式より之等を作ると次の諸式を得る。

$$M_x=-\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\left[E_n\left\{(1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}f(x)+F_n\left\{(1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}f_1(x)\right.$$
$$\left.-\sum_m A_{mn}\left\{m^2+\nu\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta$$
$$M_y=-\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\left[E_n\left\{\left(\nu\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}-(1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4\right)f(x)-(1-\nu^2)\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2\phi(x)\right\}\right.\quad\cdots\cdots(46)$$

$$+F_n\left\{\left(\nu\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}-(1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4\right)f_1(x)-(1-\nu^2)\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2\phi_1(x)\right\}$$

$$\left.-\sum_m A_{mn}\left\{\nu m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta$$

$$\left.\begin{aligned}S_x=&-\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\Bigg[E_n\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\left\{\left((1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2p_n+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n\right)\varphi(x)\right.\\&\left.+\left((1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2q_n-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_n\right)\psi(x)\right\}+F_n\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\left\{\left((1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2p_n+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n\right)\varphi_1(x)\right.\\&\left.+\left((1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2q_n-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_n\right)\psi_1(x)\right\}-\sum_m A_{mn}m\left\{m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\cos m\pi\xi\Bigg]\sin n\pi\eta\\S_y=&-\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_n n\Bigg[E_n\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\left\{\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}f(x)-(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\phi(x)\right\}\\&+F_n\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\left\{\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}f_1(x)-(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\phi_1(x)\right\}-\sum_m A_{mn}\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)\sin m\pi\xi\Bigg]\cos n\pi\eta\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(47)_1$$

但し

$$\varphi(x)=\sinh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n\xi-\sinh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(1-\xi)$$

$$\varphi_1(x)=\sinh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n\xi+\sinh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(1-\xi)$$

$$\psi(x)=\cosh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n\xi-\cosh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(1-\xi)$$

$$\psi_1(x)=\cosh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n\xi+\cosh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(1-\xi)$$

$$Q_y=-\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_n n\Bigg[E_n\left\{\left((1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4+(2-\nu)\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)f(x)-(1-\nu)^2\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2\phi(y)\right\}$$

$$+F_n\left\{\left((1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4+(2-\nu)\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)f_1(x)-(1-\nu)^2\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2\phi_1(x)\right\}$$

$$\left.-\sum_m A_{mn}\left\{(2-\nu)m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\sin m\pi\xi\right]\cos n\pi\eta\quad\cdots\cdots(47)_2$$

上式中の A_{mn} は荷重の狀況により第 2 章に示す如き種々の値を採る。

以上により w, M, S 及び Q を決定し得たものである。

第 4 章　彈性基礎上に於て相對二邊支承され他の二邊が固定せられたる矩形版

圖-25 は彈性基礎上に於て矩形版 OACB がその相對二邊 OA, BC は單に支承せられ，殘りの相對二邊 OB, AC が固定せられたるとき，單位面積當り p_0 なる等分布荷重が任意の面積 $4uv$ に荷せられたとすると，この場合の撓度 w は前章同樣に (32) 式より求める事が出來る。即ち

$$w=\sum_n\left[A_n\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+A_n'\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+B_n\sinh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\right.$$

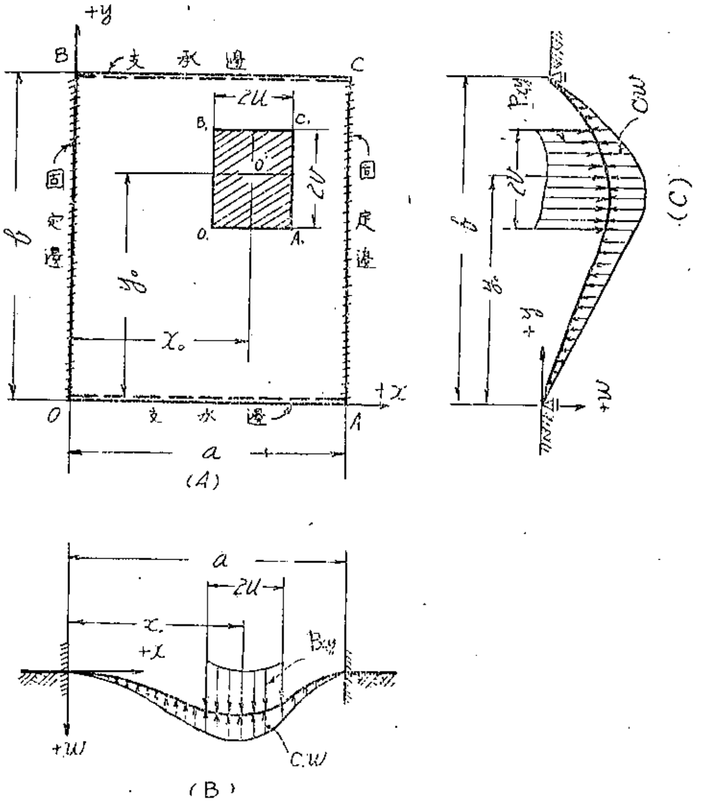
$$\left.+B_n'\sinh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta\quad\cdots\cdots(32)$$

であるが，本問題の境界條件として

1.　$w=0$　　　$\xi=0,\ \xi=1$　に對して

2.　$\dfrac{\partial w}{\partial x}=0$　　　$\xi=0,\ \xi=1$　に對して

圖-25.



が擧げられる。

第 1 の條件より

$$w=\sum_n\left[E_n'\left\{\frac{\cosh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\mathrm{cesh}\frac{\pi K_n}{2}}-\frac{\cosh \pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi K_n'}{2}}\right\}\right.$$

$$\left.+F_n'\left\{\frac{\sinh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi K_n}{2}}-\frac{\sinh \pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi K_n'}{2}}\right\}+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta \cdots\cdots(48)$$

を得る。第 2 の條件より E_n', F_n' は次の如く決定される。

$$E_n'=\frac{\sum_m A_{mn}\frac{1-(-1)^m}{2}m}{K_n\tanh\frac{\pi K_n}{2}-K_n'\tanh\frac{\pi K_n'}{2}}\,,\qquad F_n'=\frac{\sum_m A_{mn}\frac{1+(-1)^m}{2}m}{K_n\coth\frac{\pi K_n}{2}-K_n'\coth\frac{\pi K_n'}{2}}$$

これらは i を含むためこれを消去し簡單にすると次式を得る。

$$w=\sum_n[E_n f(x)+F_n f_1(x)+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi]\sin n\pi\eta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

$m, n=1, 2, 3, 4, \cdots\cdot\infty$

式中

$$E_n=\frac{\sum_m A_{mn}\dfrac{1-(-1)^m}{2}m}{-p_n\sin\pi q_n-q_n\sinh\pi p_n}$$

$$F_n=\frac{\sum_m A_{mn}\dfrac{1+(-1)^m}{2}m}{p_n\sin\pi q_n-q_n\sinh\pi p_n}$$

$$f(x)=\sinh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n\xi+\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(1-\xi)$$

$$f_1(x)=\sinh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n\xi-\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(1-\xi)$$

従つて M, S 等の諸公式を求めると次の諸式となる。

$$\left.\begin{aligned}
M_x=&-\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\Big[E_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f(x)-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)\Big\}+F_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f_1(x)-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi_1(x)\Big\}\\
&-\sum_m A_{mn}\Big(m^2+\nu\frac{a^2}{b^2}n^2\Big)\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
M_y=&\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\Big[E_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f(x)+\nu\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)\Big\}+F_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2f_1(x)+\nu\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi_1(x)\Big\}\\
&+\sum_m A_{mn}\Big(\nu m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\Big)\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(50)$$

$$\left.\begin{aligned}
S_x=&-\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\Big[E_n\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\{q_n\psi(x)+p_n\varphi(x)\}+F_n\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\{q_n\psi_1(x)+p_n\varphi_1(x)\}\\
&-\sum_m A_{mn}m\Big(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\Big)\cos m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
S_y=&\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_n n\Big[E_n\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)+F_n\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi_1(x)+\sum_m A_{mn}\Big(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\Big)\sin m\pi\xi\Big]\cos n\pi\eta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(51)_1$$

$$\left.\begin{aligned}
Q_x=&-\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\Big[E_n\Big\{\Big((1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2p_n+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n\Big)\psi(x)-\Big((1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2q_n-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_n\Big)\varphi(x)\Big\}\\
&+F_n\Big\{\Big((1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2p_n+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n\Big)\psi_1(x)-\Big((1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2q_n-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_n\Big)\varphi_1(x)\Big\}\\
&-\sum_m A_{mn}m\Big\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big\}\cos m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
Q_y=&-\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_n n\Big[E_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}f(x)-(2-\nu)\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi(x)\Big\}\\
&+F_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}f_1(x)-(2-\nu)\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\phi_1(x)-\sum_m A_{mn}\Big\{(2-\nu)m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\Big\}\sin m\pi\xi\Big]\\
&\times\cos n\pi\eta
\end{aligned}\right\}\cdots(51)_2$$

但し

$$\phi(x)=\cosh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n\xi+\cosh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(1-\xi)$$

$$\phi_1(x)=\cosh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n\xi-\cosh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(1-\xi)$$

$$\varphi(x)=\sinh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n\xi-\sinh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(1-\xi)$$

$$\varphi_1(x)=\sinh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n\xi+\sinh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(1-\xi)$$

$$\psi(x)=\cosh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n\xi-\cosh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(1-\xi)$$

$$\psi_1(x)=\cosh \pi pn(1-\xi)\sin \pi qn\xi+\cosh \pi pn\xi \sin \pi qn(1-\xi)$$

第 5 章　彈性基礎上に於て三邊支承され殘りの一邊固定されたる矩形版

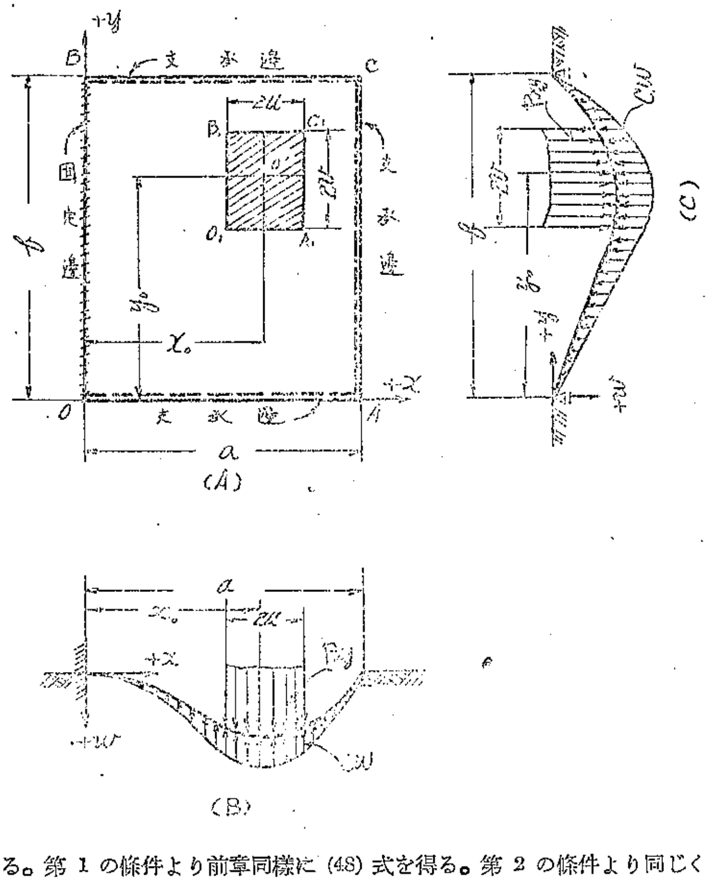
本問題の境界條件としては

1. $w=0$　　　$\xi=0,\ \xi=1$　　に對して

2. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=0$　　　$\xi=0$　　に對して

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$　　　$\xi=1$　　に對して

圖-26.



の 4 つが擧げられる。第 1 の條件より前章同樣に (48) 式を得る。第 2 の條件より同じく

$$E_n'\left(K_n\tanh\frac{\pi}{2}K_n-K_n'\tanh\frac{\pi}{2}K_n'\right)+F_n'\left(K_n\coth\frac{\pi}{2}K_n-K_n'\coth\frac{\pi}{2}K_n'\right)$$

$$-\sum_m A_{mn}m=0$$

を得る。第 3 の條件式を作つて $\xi=1$ と置けば

$$E_n'=F_n'$$

の結果を得るから

$$E_n'=\frac{\sum_m A_{mn}m}{K_n\left(\tanh\frac{\pi}{2}K_n+\coth\frac{\pi}{2}K_n\right)-K_n'\left(\tanh\frac{\pi}{2}K_n'+\coth\frac{\pi}{2}K_n'\right)}$$

となる。よつて w は

$$w=\sum_n\left[E_n'\left\{\frac{\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\frac{\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}+\frac{\sinh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{\sinh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n'}+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta$$

となるが，これより i を消去して整理すると w は

$$w=\sum_n[E_n\{\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(2-\xi)-\sinh\pi p_n(2-\xi)\sin\pi q_n\xi\}+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi]\sin n\pi\eta\cdots\cdots(52)$$

$$m,n=1\ 2,3,4,\cdots\cdots\infty$$

但し

$$E_n=\frac{\sum_m A_{mn}m}{q_n\sinh 2\pi p_n-p_n\sin 2\pi q_n}$$

を得る。これより次の曲げモーメント其他の諸式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
M_x=&-\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\Big[E_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}(\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(2-\xi)-\sinh\pi p_n(2-\xi)\sin\pi q_n\xi)\\
&-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\Big(\cosh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(2-\xi)-\cosh\pi p_n(2-\xi)\cos\pi q_n\xi\Big)\Big\}\\
&-\sum_m A_{mn}\Big(m^2+\nu\frac{a^2n^2}{b^2}\Big)\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
M_y=&\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\Big[E_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2(\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(2-\xi)-\sinh\pi p_n(2-\xi)\sin\pi q_n\xi)\\
&+\nu\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\Big(\cosh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(2-\xi)-\cosh\pi p_n(2-\xi)\cos\pi q_n\xi\Big)\Big\}\\
&+\sum_m A_{mn}\Big(\nu m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\Big)\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(53)$$

$$\left.\begin{aligned}
Q_x=&\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\Big[E_n\Big\{\Big(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n+(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2p_n\Big)\Big(\cosh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(2-\xi)\\
&+\cosh\pi p_n(2-\xi)\sin\pi q_n\xi\Big)+\Big(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_n-(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2q_n\Big)\\
&\times\Big(\sinh\pi p_n\xi\cos\pi q_n(2-\xi)+\sinh\pi p_n(2-\xi)\cos\pi q_n\xi\Big)\Big\}\\
&+\sum_m A_{mn}m\Big\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big\}\cos m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
Q_y=&-\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_n n\Big[E_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big(\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n(2-\xi)-\sinh\pi p_n(2-\xi)\sin\pi q_n\xi\Big)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(54)_1$$

$$+F_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh \pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}$$

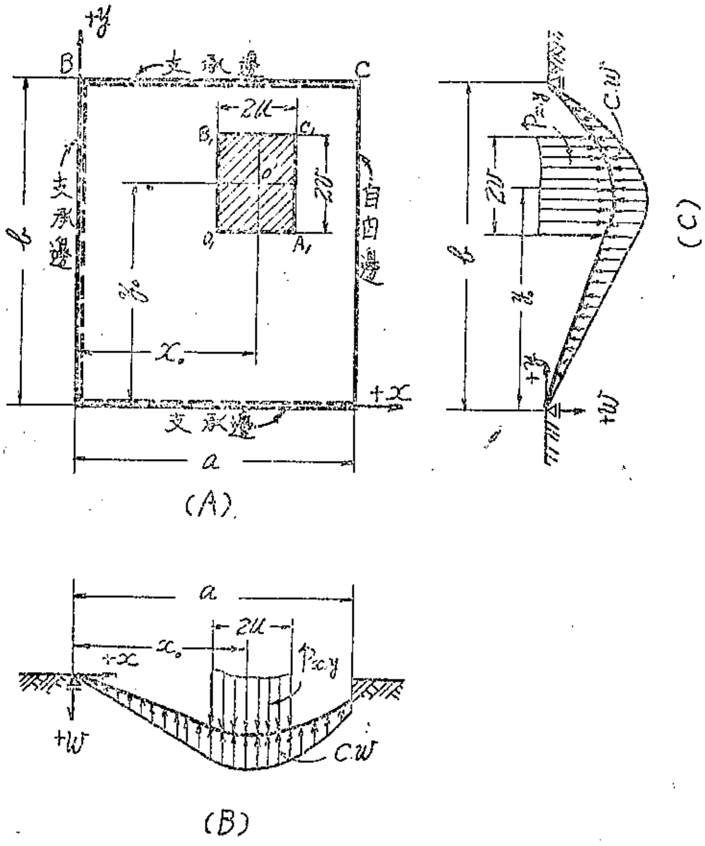
$$\left.+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

$$m, n=1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\infty$$

であるが，これに第 2 の條件を入れると

$$E_n'=-F_n'$$

圖-28



を得る。よつて

$$w=\sum_n\left[2E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh \pi K_n\xi}{\sinh \pi K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh \pi K_n'\xi}{\sin \pi K_n'}\right\}+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin m\pi\eta$$

を得る。第 3 の條件より

$$2E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2 K_n\coth \pi K_n-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2 K_n'\coth \pi K_n'\right\}$$

1. $w=0$ $\qquad \xi=0,\ \xi=1$ に對して

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ $\qquad \xi=0,\ \xi=1$ に對して

にして第 1 の條件より此の場合も (48) 式が適用出來る。第 2 の條件式を作つて，$\xi=0$, $\xi=1$ を入れると結局

$$E_n'=F_n'=0$$

となる。依つて w は

$$w=\sum_m\sum_n A_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \qquad \cdots\cdots(55)$$

$$m,n=1,2,3,4,\cdots\cdots\infty$$

を得る。曲げモーメント M は

$$\left.\begin{aligned} M_x&=\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_m\sum_n A_{mn}\left(m^2+\nu\frac{a^2n^2}{b^2}\right)\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \\ M_y&=\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_m\sum_n A_{mn}\left(\nu m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\right)\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(56)$$

を得る。

又反力 Q は

$$\left.\begin{aligned} Q_x&=\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_m\sum_n A_{mn}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\cos m\pi\xi\sin n\pi\eta \\ Q_y&=\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_m\sum_n A_{mn}n\left\{(2-\nu)m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\sin m\pi\xi\cos n\pi\eta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(57)_1$$

を得る。

又剪斷力は

$$\left.\begin{aligned} S_x&=\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_m\sum_n A_{mn}m\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)\cos m\pi\xi\sin n\pi\eta \\ S_y&=\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_m\sum_n A_{mn}n\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)\sin m\pi\xi\cos n\pi\eta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(57)_2$$

を得る。

第 7 章　彈性基礎上に於て三邊支承され殘りの一邊自由なる矩形版

この場合の境界條件は

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ $\qquad \xi=0,\ \xi=1$ に對して

2. $w=0$ $\qquad \xi=0$ に對して

3. $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=0$ $\qquad \xi=1$ に對して

の 4 つであるが，第 1 の條件より (33) 式が得られる。即ち

$$w=\sum_n\left[E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\right.$$

$$+\sum_m A_{mn}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}(-1)^m=0$$

となるから

$$E_n'=\frac{-\sum_m A_{mn}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}(-1)^m}{2\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2K_n\coth\pi K_n-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2K_n'\coth\pi K_n'\right\}}$$

を得る。是等は i を含むためそれを消去しその計算を省略して

$$\left.\begin{aligned}
w=\sum_n\Big[&E_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\Big(\sinh\pi p_n(1+\xi)\sin\pi q_n(1-\xi)-\sinh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n(1+\xi)\Big)\right.\\
&\left.+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\Big(\cosh\pi p_n(1+\xi)\cos\pi q_n(1-\xi)-\cosh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n(1+\xi)\Big)\right\}\\
&+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
&m,n=1,2,3,4,\cdots\infty\\
\text{但し}\quad
E_n&=\frac{\sum_m A_{mn}m\left\{m_2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}(-1)^m}{a_n'\sinh 2\pi p_n-a_n\sin 2\pi q_n}\\
a_n&=\left\{(1-\nu)^2\frac{a^4n^4}{b^4}-\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}p_n+2(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2n^2}{\pi^2b^2}q_n\\
a_n'&=\left\{(1-\nu)^2\frac{a^4n^4}{b^4}-\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right\}q_n-2(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2n^2}{\pi^2b^2}p_n
\end{aligned}\right\}\quad\cdots(58)$$

を得る。曲げモーメントは

$$\left.\begin{aligned}
M_x=-\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\Big\{&E_n\left\{\left((1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)\Big(\sinh\pi p_n(1+\xi)\sin\pi q_n(1-\xi)\right.\\
&\left.-\sinh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n(1+\xi)\Big)\right\}-\sum_m A_{mn}\left(m^2+\nu\frac{a^2}{b^2}n^2\right)\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
M_y=\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\Big[&E_n\left\{\left((1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4-\nu\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)\Big(\sinh\pi p_n(1+\xi)\sin\pi q_n(1-\xi)\right.\\
&-\sinh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n(1+\xi)\Big)+(1-\nu^2)\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2\Big(\cosh\pi p_n(1+\xi)\cos\pi q_n(1-\xi)\\
&\left.-\cosh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n(1+\xi)\Big)\right\}+\sum_m A_{mn}\left(\nu m^2+\frac{h^2n^2}{b^2}\right)\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta
\end{aligned}\right\}\quad\cdots(59)$$

を得る。更に反力 Q は

$$\left.\begin{aligned}
Q_x=\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\Big[&E_n\Big\{a_n\Big(\cosh\pi p_n(1+\xi)\sin\pi q_n(1-\xi)+\cosh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n(1+\xi)\Big)\\
&-a_n'(\sinh\pi p_n(1+\xi)\cos\pi q_n(1-\xi)+\sinh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n(1+\xi)\Big)\Big\}\\
&+\sum_m A_{mn}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\cos m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
Q_y=-\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_n n\Big[&E_n\left\{\left((1-\nu)^2\frac{a^4}{b^4}n^4+(2-\nu)\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\right)\Big(\sinh\pi p_n(1+\xi)\sin\pi q_n(1-\xi)\right.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots(60)_1$$

$$-\sinh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n(1+\xi)\Big)-(1-\nu)^2\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2\Big(\cosh\pi p_n(1+\xi)\cos\pi q_n(1-\xi)$$
$$-\cosh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n(1+\xi)\Big)\Big\}-\sum_m A_{mn}\Big\{(2-\nu)m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\Big\}\sin m\pi\xi\Big]\cos n\pi\eta$$

を得る。

$$S_x=-\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\Big[E_n\Big\{\Big(\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}p_n-(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2q_n\Big)\Big(\cosh\pi p_n(1+\xi)\sin\pi q_n(1-\xi)$$
$$+\cosh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n(1+\xi)\Big)-\Big(\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}q_n+(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2p_n\Big)$$
$$\times\Big(\sinh\pi p_n(1+\xi)\cos\pi q_n(1-\xi)+\sinh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n(1+\xi)\Big)\Big\}$$
$$-\sum_m A_{mn}m\Big(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\Big)\cos m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta$$
$$S_y=-\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_n n\Big[E_n\Big\{\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\Big(\sinh\pi p_n(1+\xi)\sin\pi q_n(1-\xi)-\sinh\pi p_n(1-\xi)\sin\pi q_n(1+\xi)\Big)$$
$$-(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2\Big(\cosh\pi p_n(1+\xi)\cos\pi q_n(1-\xi)-\cosh\pi p_n(1-\xi)\cos\pi q_n(1+\xi)\Big)\Big\}$$
$$-\sum_m A_{mn}\Big(m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\Big)\sin m\pi\xi\Big]\cos n\pi\eta \qquad \cdots\cdots(60)_2$$

第 8 章 彈性基礎上に於て相對二邊支承され他の一邊固定され殘りの一邊自由なる矩形版

本問題の境界條件としては

1. $w=0$ 　　$\xi=0$ に對して

1. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=0$ 　　$\xi=0$ に對して

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ 　　$\xi=1$ に對して

4. $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}$ 　　$\xi=1$ に對して

の 4 つを擧げる事が出來る。撓度 w は (32) 式より

$$w=\sum_n\Big[A_n\cosh\pi K_n\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big)+A_n'\cosh\pi K_n'\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big)+B_n\sinh\pi K_n\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big)$$
$$+B_n'\sinh\pi K_n'\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big)+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\Big\}\sin n\pi\eta\cdots\cdots(32)$$
$$m,n=1,2,3,4,\cdots\cdots\infty$$

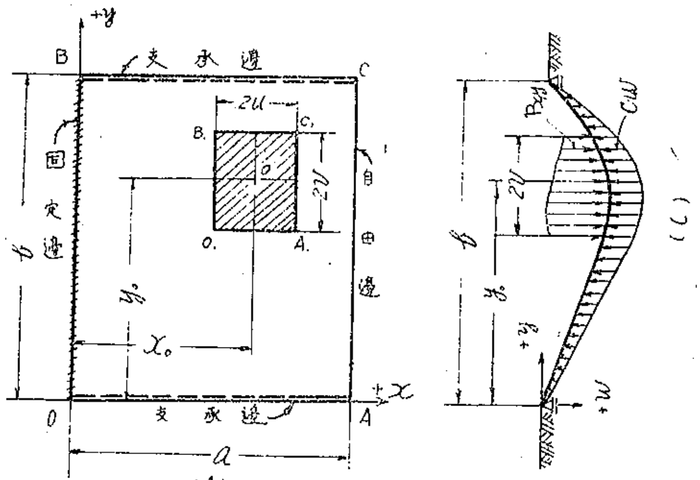
を知るのであるが，この方程式をそのまゝ今迄の如く取扱つても仲々面倒となるから，これを少し變形すると，

$$w=\sum_n\{X_n(\xi)+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\}\sin n\pi\eta$$

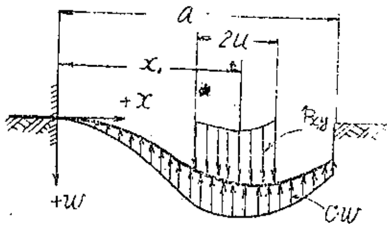
$$X_n(\xi)=A_n\cosh\pi K_n\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big)+A_n'\cosh\pi K_n'\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big)+B_n\sinh\pi K_n\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big)+B_n'\sinh K_n'\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big)$$
$$=a_n\cosh\pi K_n\xi+a_n'\sinh\pi K_n\xi+b_n\cosh\pi K_n'\xi+b_n'\sinh\pi K_n'\xi$$

となる。玆に於て　$K_n=p_n+iq_n$,　$K_n'=p_n-iq_n$　を入れると

圖-29.



(A)



(B)

$$X_n(\xi)=(A_n\cos\pi q_n\xi+A_n'\sin\pi q_n\xi)\,e^{\pi p_n\xi}+(B_n\cos\pi q_n\xi+B_n'\sin\pi q_n\xi)\,e^{-\pi p_n\xi}$$

となる。仍つて w として

$$w=\sum_n[A_n\cos\pi q_n\xi+A_n'\sin\pi q_n\xi)\,e^{\pi p_n\xi}+(B_n\cos\pi q_n\xi+B_n'\sin\pi q_n\xi)\,c^{-\pi p_n\xi}$$
$$+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi]\sin n\pi\eta\cdots\cdots\cdots\cdots(61)_1$$

$$m,n=1,2,3,4\cdots\cdots\infty$$

を採用する事とする。$(61)_1$ 式の A_n, A_n', B_n, B_n' は境界條件より決定すべきものである。第 1 の條件より

$$A_n=-B_n$$

を得るから w は

$$w=\sum_n[A_n\sinh\pi p_n\xi\cos\pi q_n\xi+(A_n'e^{\pi p_n\xi}+B_n'c^{-\pi p_n\xi})\sin\pi q_n\xi+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi]\sin n\pi\eta\quad\cdots\cdots(61)_2$$

となる。第 2 の條件より

$$A_np_n+q_n(A_n'+B_n')=-\sum_m A_{mn}m$$

を得る。第 3 の條件より

$$A_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\sinh\pi p_n\cos\pi q_n-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cosh\pi p_n\sin\pi q_n\right\}+A_n'\left\{\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n+(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\sin\pi q_n\right\}e^{\pi p_n}$$

$$+B_n'\left\{(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\sin\pi q_n-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n\right\}e^{-\pi p_n}=0$$

を得る。第 4 の條件より

$$\begin{aligned}
&-A_n\left\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}(p_n\cosh\pi p_n\cos\pi q_n-q_n\sinh\pi p_n\sin\pi q_n)\right.\\
&\left.+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}(p_n\sinh\pi p_n\sin\pi q_n+q_n\cosh\pi p_n\cos\pi q_n)\right\}\\
&+A_n'\left\{\left(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n-(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\cos\pi q_n\right)p_n-\left(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\sin\pi q_n+(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\cos\pi q_n\right)q_n\right\}e^{\pi p_n}\\
&+B_n'\left\{\left(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n+(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sin\pi q_n\right)p_n+\left(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\sin\pi q_n-(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\cos\pi q_n\right)q_n\right\}e^{-\pi p_n}\\
&=\sum_m A_{mn}m\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\right\}(-1)^m
\end{aligned}$$

を得る。據つて以上 3 式より A_n, A_n', B_n' を見出すと

$$A_n=\frac{a_n}{c_n},\qquad A_n'=\frac{a_n'}{c_n},\qquad B_n'=\frac{b_n'}{c_n}$$

但し

$$\left.\begin{aligned}
c_n&=\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\left\{2p_n^2-(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\cos^2\pi q_n+(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\left\{\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}+2(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}p_n^2\right\}\sin^2\pi q_n\\
&\quad+\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\left\{2q_n^2+(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}n^2\right\}\cosh^2\pi p_n+(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\left\{\frac{a^4\lambda^4}{b^4}-2(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}q_n^2\right\}\sinh^2\pi p_n\\
a_n&=-2\sum A_{mn}m\left[\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\left\{\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_n-(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}q_n\right\}\cos^2\pi q_n+(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\left\{\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n\right.\right.\\
&\quad\left.+(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}p_n\right\}\sin^2\pi q_n+q_n\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\right\}(-1)^m\left\{\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n\cosh\pi p_n\right.\\
&\quad\left.\left.+(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sin\pi q_n\sinh\pi p_n\right\}\right]\\
a_n'&=-\sum_m A_{mn}m\left[(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2p_ne^{-2\pi p_n}+\left(\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\cosh\pi p_n+(1-\nu)^2\frac{a^4n^4}{b^4}\sinh\pi p_n\right)q_ne^{-\pi p_n}\right.\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}-(1-\nu)^2\frac{a^4n^4}{b^4}\right)p_n-2(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2q_n\right\}\sin 2\pi q_n\\
&\quad-\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\right\}(-1)^m\left\{\left((1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}q_n\sinh\pi p_n+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_ne^{-\pi p_n}\right)\cos\pi q_n\right.\\
&\quad\left.\left.-\left((1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}p_ne^{-\pi p_n}+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n\cosh\pi p_n\right)\sin\pi q_n\right\}\right]\\
b_n'&=-\sum_m A_{mn}m\left[(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2p_ne^{2\pi p_n}+q_n\left\{\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}\cosh\pi p_n-(1-\nu)^2\frac{a^4n^4}{b^4}\sinh\pi p_n\right\}e^{\pi p_n}\right.\\
&\quad-\frac{1}{2}\left\{p_n\left(\frac{a^4\lambda^4}{\pi^4}-(1-\nu)^2\frac{a^4n^4}{b^4}\right)-2(1-\nu)\frac{a^4\lambda^2}{\pi^2b^2}n^2q_n\right\}\sin 2\pi q_n\\
&\quad+\left\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\right\}(-1)^m\left\{\left((1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}q_n\sinh\pi p_n-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_ne^{\pi p_n}\right)\cos\pi q_n\right.\\
&\quad\left.\left.-\left((1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}p_ne^{\pi p_n}+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n\cosh\pi p_n\right)\sin\pi q_n\right\}\right]
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(62)$$

を得る。卽ち (61) 式と (62) 式とにより w は決定し得たのである。これより曲げモーメントは

$$\left.\begin{aligned}
M_x=&-\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\Big[A_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sinh\pi p_n\xi\cos\pi q_n\xi-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cosh\pi p_n\xi\sin\pi q_n\xi\Big\}\\
&+A_n'\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sin\pi q_n\xi+\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n\xi\Big]e^{\pi p_n\xi}\\
&+B_n'\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sin\pi q_n\xi-\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n\xi\Big\}e^{-\pi p_n\xi}\\
&-\sum_m A_{mn}\Big(m^2+\nu\frac{a^2n^2}{b^2}\Big)\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
M_y=&\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\Big[A_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sinh\pi p_n\xi\cos\pi q_n\xi+\nu\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cosh\pi p_n\xi\sin\pi q_n\xi\Big\}\\
&+A_n'\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sin\pi q_n\xi-\nu\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n\xi\Big]e^{\pi p_n\xi}+B_n'\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sin\pi q_n\xi\\
&+\nu\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n\xi\Big\}e^{-\pi p_n\xi}+\sum_m A_{mn}\Big(\nu m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\Big)\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta
\end{aligned}\right\}\cdots(63)$$

を得る。又反力 Q は

$$\left.\begin{aligned}
Q_x=&\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\Big[A_n\Big\{\Big(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n+(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}p_n\Big)\cosh\pi p_n\xi\cos\pi q_n\xi\\
&+\Big(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_n-(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}q_n\Big)\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n\xi\Big\}\\
&+A_n'\Big\{\Big(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n+(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}p_n\Big)\sin\pi q_n\xi-\Big(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_n-(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}q_n\Big)\cos\pi q_n\xi\Big\}e^{\pi p_n\xi}\\
&-B_n'\Big\{\Big(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}q_n+(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}p_n\Big)\sin\pi q_n\xi+\Big(\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}p_n-(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}q_n\Big)\cos\pi q_n\xi\Big\}e^{-\pi p_n\xi}\\
&+\sum_m A_{mn}m\Big\{m^2+(2-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\Big\}\cos m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
Q_y=&-\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_n n\Big[A_n\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sinh\pi p_n\xi\cos\pi q_n\xi-(2-\nu)\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cosh\pi p_n\xi\sin\pi q_n\xi\Big\}\\
&+A_n'\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sin\pi q_n\xi+(2-\nu)\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n\xi\Big\}e^{\pi p_n\xi}\\
&+B_n'\Big\{(1-\nu)\frac{a^2n^2}{b^2}\sin\pi q_n\xi-(2-\nu)\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\cos\pi q_n\xi\Big\}e^{-\pi p_n\xi}\\
&-\sum_m A_{mn}\Big\{(2-\nu)m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\Big\}\sin m\pi\xi\Big]\cos n\pi\eta
\end{aligned}\right\}\cdots(64)_1$$

$$\left.\begin{aligned}
S_x=&\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\Big[\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\{A_n(p_n\sinh\pi p_n\xi\sin\pi q_n\xi+q_n\cosh\pi p_n\xi\cos\pi q_n\xi)\\
&-A_n'(p_n\cos\pi q_n\xi-q_n\sin\pi q_n\xi)e^{\pi p_n\xi}-B_n'(p_n\cos\pi q_n\xi+q_n\sin\pi q_n\xi)e^{-\pi p_n\xi}\}\\
&+\sum_m A_{mn}m\Big(m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\Big)\cos m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\
S_y=&\frac{N\pi^3}{a^2b}\sum_n n\Big[\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}\{A_n\cosh\pi p_n\xi\sin\pi q_n\xi-A_n'\cos\pi q_n\xi e^{\pi p_n\xi}+B_n'\cos\pi q_n\xi e^{-\pi p_n\xi}\}\\
&+\sum_m A_{mn}\Big(m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\Big)\sin m\pi\xi\Big]\cos n\pi\eta
\end{aligned}\right\}\cdots(64)_2$$

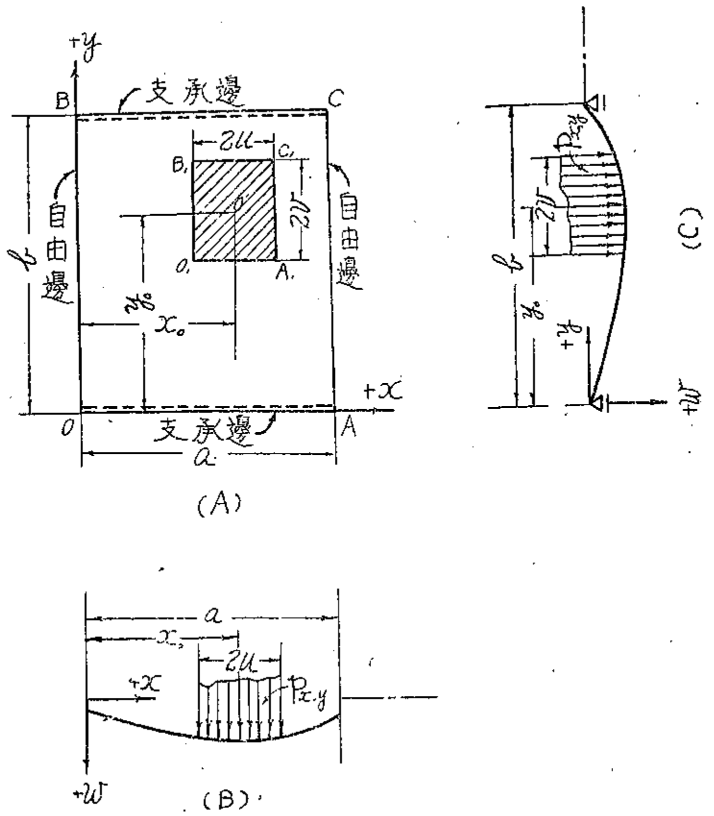
等を得る。

第 9 章 本問題と，彈性基礎上に在らざる矩形版（平版橋）との關聯性に就て

彈性基礎上にあらざる相對二邊支承せられその他の二邊自由なる矩形版が，その版上の任意の點に任意の荷重を負ふ場合の彎曲の式は，彈性基礎上の版の公式より比較的容易に誘導する事が出來る。

彈性基礎上の版の撓度の式は (33) 式にて

圖-30.



$$w=\sum_n\left[E_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}\right.$$

$$+F_n'\left\{\left(K_n'^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh\pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n}-\left(K_n^2-\frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh\pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}$$

$$\left.+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta \quad\cdots\cdots\cdots(33)$$

$$m, n=1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\infty$$

なる事を知るのであるが，本章に於ては彈性基礎上の版でないから $C=0$ 從つて $\lambda=0$ となる。よつて

$$\left.\begin{matrix} K_n^2 \\ K_n'^2 \end{matrix}\right\} = \frac{a^2}{b^2}n^2 \pm i\frac{a^2\lambda^2}{\pi^2}$$

の λ の項は消失して

$$\lim_{\lambda\to 0} K_n' - K_n = 0$$

となる。

$$u(\xi) = \left(K_n'^2 - \frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n} - \left(K_n^2 - \frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\cosh \pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}$$

$$v(\xi) = \left(K_n'^2 - \frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n} - \left(K_n^2 - \frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\frac{\sinh \pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}K_n'}$$

と置くと，

$$u(\xi) = (K_n'^2 - K_n^2)\frac{\cosh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n} + \left(K_n^2 - \frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\left\{\frac{\cosh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n} - \frac{\cosh \pi K_n'\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\right\}$$

$$= (K_n' - K_n)\left[(K_n' + K_n)\frac{\cosh \pi K_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n}\right.$$

$$+\left(K_n^2 - \frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)\left\{\frac{\sinh \pi K_n\xi}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\cdot\frac{\sinh\frac{\pi}{2}(K_n'-K_n)}{K_n'-K_n}\right.$$

$$\left.\left.+2\frac{\sinh\frac{\pi}{2}\{K_n' - (K_n'+K_n)\xi\}}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\cdot\frac{\sinh\frac{\pi}{2}(K_n'-K_n)\xi}{K_n'-K_n}\right\}\right]$$

と誘導し得る。又 E_n' の分母は (34) 式にて

$$K_n\left(K_n'^2 - \frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n - K_n'\left(K_n^2 - \frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2\tanh\frac{\pi}{2}K_n'$$

$$= (K_n' - K_n)\left[\left\{K_nK_n'(K_n'^2 + K_nK_n' + K_n^2) - \frac{2\nu a^2}{b^2}n^2K_nK_n' - \frac{\nu^2a^4}{b^4}n^4\right\}\tanh\frac{\pi}{2}K_n\right.$$

$$\left. - \frac{K_n'\left(K_n^2 - \frac{\nu a^2}{b^2}n^2\right)^2}{\cosh\frac{\pi}{2}K_n\cosh\frac{\pi}{2}K_n'}\cdot\frac{\sinh\frac{\pi}{2}(K_n'-K_n)}{K_n'-K_n}\right]$$

と誘導し得る。據つて $K_n' - K_n$ が無限小に近づくときの極限値は

$$\lim_{(K_{n'}-K_n)\to 0} E_n' u(\xi) = \sum_m A_{mn} \frac{1-(-1)^m}{2} m \left\{ m^2 + (2-\nu) \frac{a^2}{b^2} n^2 \right\}$$

$$\times \frac{2\alpha_n \dfrac{\cosh \pi\alpha_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}\alpha_n} + (1-\nu)\alpha_n^2 \left\{ \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\sinh \pi\alpha_n\xi}{\cosh^2 \frac{\pi}{2}\alpha_n} + \dfrac{\sinh \frac{\pi}{2}\alpha_n(1-2\xi)}{\cosh \frac{\pi}{2}\alpha_n}\pi\xi \right\}}{(3\alpha_n^4 - 2\nu\alpha_n^4 - \nu^2\alpha_n^4)\tanh \frac{\pi}{2}\alpha_n - \dfrac{(1-\nu)^2}{\cosh^2 \frac{\pi}{2}\alpha_n}\dfrac{\pi}{2}\alpha_n^5}$$

$$= \frac{\dfrac{4}{1-\nu}\cosh \frac{\pi}{2}\alpha_n \cosh \pi\alpha_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right) + \pi\alpha_n \{(1-\xi)\sinh \pi\alpha_n\xi + \xi \sinh \pi\alpha_n(1-\xi)\}}{\alpha_n^3\{(3+\nu)\sinh \pi\alpha_n - (1-\nu)\pi\alpha_n\}}$$

$$\times \sum_m A_{mn} \frac{1-(-1)^m}{2} m \{m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2\}$$

但し

$$\alpha_n = \frac{a}{b} n$$

$$A_{mn} = \frac{p_0 a^4}{N\pi^4} \frac{a_{mn}}{(m^2+\alpha_n^2)^2}$$

と誘導し得る。同様にして $v(\xi)$ は

$$\lim_{(K_{n'}-K_n)\to 0} F_n' v(\xi) =$$

$$\frac{\dfrac{4}{1-\nu}\sinh \frac{\pi}{2}\alpha_n \sinh \pi\alpha_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right) - \pi\alpha_n \{(1-\xi)\sinh \pi\alpha_n\xi - \xi \sinh \pi\alpha_n(1-\xi)\}}{\alpha_n^3\{(3-\nu)\sinh \pi\alpha_n + (1-\nu)\pi\alpha_n\}}$$

$$\times \sum_m A_{mn} \frac{1+(-1)^m}{2} m \{m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2\}$$

を得る。據つて w は

$$w = \sum_n \left[\frac{\dfrac{4}{1-\nu}\cosh \frac{\pi}{2}\alpha_n \cosh \pi\alpha_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right) + \pi\alpha_n \{(1-\xi)\sinh \pi\alpha_n\xi + \xi \sinh \pi\alpha_n(1-\xi)\}}{\alpha_n^3\{(3+\nu)\sinh \pi\alpha_n - (1-\nu)\pi\alpha_n\}} \right.$$

$$\times \sum_m A_{mn} \frac{1-(-1)^m}{2} m \{m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2\}$$

$$+ \frac{\dfrac{4}{1-\nu}\sinh \frac{\pi}{2}\alpha_n \sinh \pi\alpha_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right) - \pi\alpha_n \{(1-\xi)\sinh \pi\alpha_n\xi - \xi \sinh \pi\alpha_n(1-\xi)\}}{\alpha_n^3\{(3+\nu)\sinh \pi\alpha_n + (1-\nu)\pi\alpha_n\}}$$

$$\left. \times \sum_m A_{mn} \frac{1+(-1)^m}{2} m \{m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2\} + \sum_m A_{mn} \sin m\pi\xi \right] \sin n\pi\eta \quad \cdots\cdots (65)$$

$$m, n = 1, 2, 3, 4, \cdots\infty$$

となる。この w の式を更に (35) 式の形に變形すると，任意の點に等分布荷重が在る場合は，

$$w = \sum_n \left[E_n \left\{ \frac{\pi a n}{b} f(x) + \frac{2}{1-\nu}\phi(x) \right\} + F_n \left\{ \frac{\pi a n}{b} f_1(x) + \frac{2}{1-\nu}\phi_1(x) \right\} + \sum_m A_{mn} \sin m\pi\xi \right] \sin n\pi\eta$$

$$m, n = 1, 2, 3, 4, \cdots\infty$$

$$\left.\begin{aligned}
E_n&=\frac{\sum\limits_m A_{mn}\dfrac{1-(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\dfrac{a^2}{b^2}n^2\right\}}{\dfrac{a^3n^3}{b^3}\left\{(3+\nu)\sinh\dfrac{an\pi}{b}-(1-\nu)\dfrac{\pi an}{b}\right\}}\\
F_n&=\frac{\sum\limits_m A_{mn}\dfrac{1+(-1)^m}{2}m\left\{m^2+(2-\nu)\dfrac{a^2}{b^2}n^2\right\}}{\dfrac{a^3n^3}{b^3}\left\{(3+\nu)\sinh\dfrac{an\pi}{b}+(1-\nu)\dfrac{\pi an}{b}\right\}}\\
A_{mn}&=\frac{16p_0a^4}{N\pi^6mn}\frac{1}{\left(m^2+\dfrac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi_1\sin n\pi\eta_0\sin n\pi\eta_1\\
f(x)&=\xi\cdot\sinh\frac{an\pi}{b}(1-\xi)+(1-\xi)\sinh\frac{an\pi}{b}\xi\\
f_1(x)&=\xi\cdot\sinh\frac{an\pi}{b}(1-\xi)-(1-\xi)\sinh\frac{an\pi}{b}\xi\\
\phi(x)&=\cosh\frac{an\pi}{b}(1-\xi)+\cosh\frac{an\pi}{b}\xi\\
\phi_1(x)&=\cosh\frac{an\pi}{b}(1-\xi)-\cosh\frac{an\pi}{b}\xi
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(66)$$

を得る。

集中荷重が平版の中心點に在る場合の w は

$$\left.\begin{aligned}
w&=\sum_n\left[E_n\left\{\frac{\pi an}{b}f(x)+\frac{2}{1-\nu}\phi(x)\right\}+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta\\
&\quad m,n=1,3,5,\cdots\infty\\
A_{mn}&=\frac{4Pa^4(-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{N\pi^4ab\left(m^2+\dfrac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(67)_1$$

となる。

平版の全面に等分布荷重がある場合は,

$$w=\sum_n\left[E_n\left\{\frac{\pi an}{b}f(x)+\frac{2}{1-\nu}\phi(x)\right\}+\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta\cdots\cdots(67)_2$$

$$m,n=1,3.5,\cdots\infty$$

$$A_{mn}=\frac{16p_0a^4}{N\pi^6mn\left(m^2+\dfrac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}$$

を得る。この $(67)_2$ 式中の m に關する級數の總和を求める。

$$[E_n\text{ の分子}]=\sum_m\frac{16p_0a^4m\{m^2+(2-\nu)\alpha n^2\}}{N\pi^6mn(m^2+\alpha n^2)^2}=\frac{16p_0a^4}{N\pi^6n}\sum_m\frac{m^2+(2-\nu)\alpha n^2}{(m^2+\alpha n^2)^2}$$

となるが,これに (38) 式乃至 (42) 式を利用すれば途中の計算を省略して

$$[E_n\text{ の分子}]=\frac{p_0a^4}{N\pi^5n\alpha_n\cosh^2\dfrac{\pi}{2}\alpha_n}\{(3-\nu)\sinh\pi\alpha_n-(1-\nu)\pi\alpha_n\}$$

を得る。又同樣に

$$[\sum_m A_{mn}\sin m\pi\xi]=\sum_m \frac{16p_0a^4}{N\pi^6mn(m^2+\alpha n^2)^2}\sin m\pi\xi=\frac{16p_0a^4}{N\pi^6n}\sum_m\frac{1}{m(m^2+\alpha n^2)^2}\sin m\pi\xi$$

$$=\frac{2p_0a^4}{N\pi^5n\alpha n^4}\left[2-\frac{4\cosh\frac{\pi}{2}\alpha n\cosh\pi\alpha n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\pi\alpha n\{(1-\xi)\sinh\pi\alpha n\xi+\xi\sinh\pi\alpha n(1-\xi)\}}{2\cosh^2\frac{\pi}{2}\alpha n}\right]$$

據つて，結局 w は

$$w=\frac{p_0b^4}{N}\sum_n\left[\frac{4}{\pi^5n^5}\sin n\pi\eta-\frac{4\nu}{\pi^5n^5\left\{(3+\nu)\frac{\sinh\pi\alpha n}{\pi\alpha n}-(1-\nu)\right\}}\right.$$

$$\left.\left\{\tanh\frac{\pi}{2}\alpha n\Big((1-\xi)\sinh\pi\alpha n\xi+\xi\sinh\pi\alpha n(1-\xi)\Big)-\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\sinh\pi\alpha n}{\pi\alpha n}-1\right)\frac{\cosh\pi\alpha n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}\alpha n}\right\}\sin n\pi\eta\right]$$

然るに

$$\sum_n\frac{1}{\pi^6n^5}\sin n\pi\eta=\frac{1}{96}(\eta^4-2\eta^3+\eta)$$

であるから

$$w=\frac{p_0b^4}{N}\left[\frac{\eta^4-2\eta^3+\eta}{24}-4\nu\sum_n\frac{\tanh\frac{\pi}{2}\alpha n}{\pi^5n^5\left\{(3+\nu)\frac{\sinh\pi\alpha n}{\pi\alpha n}-(1-\nu)\right\}}\left\{(1-\xi)\sinh\pi\alpha n\xi+\xi\sinh\pi\alpha n(1-\xi)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\sinh\pi\alpha n}{\pi\alpha n}-1\right)\frac{\cosh\pi\alpha n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\sinh\frac{\pi}{2}\alpha n}\right\}\sin n\pi\eta\right]\cdots\cdots(68)$$

$$n=1,3,5,\cdots\infty$$

を得る。これは (67) 式より急速なる收斂級數である。尙本式に於て $\nu=0$ とすれば桁の撓度の式を得る。

以上によつて部分的分布荷重，集中荷重並に版全面に等分布荷重のある場合の撓度の式を得たのである。一般式 (66) 式より M_x, M_y 等は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}M_x&=-\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\Big[(1-\nu)\frac{\pi a^3n^3}{b^3}\{E_nf(x)+F_nf_1(x)\}\\&\quad-\sum_m A_{mn}\left\{m^2+\nu\frac{a^2n^2}{b^2}\right\}\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\\M_y&=\frac{N\pi^2}{a^2}\sum_n\Big[E_n\frac{a^2n^2}{b^2}\left\{(1-\nu)\frac{\pi an}{b}f(x)+2(1+\nu)\phi(x)\right\}\\&\quad+F_n\frac{a^2n^2}{b^2}\left\{(1-\nu)\frac{\pi an}{b}f_1(x)+2(1+\nu)\phi_1(x)\right\}\\&\quad+\sum_m A_{mn}\left\{\nu m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\right\}\sin m\pi\xi\Big]\sin n\pi\eta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(69)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
S_x &= -\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\left[\frac{2a^3n^3}{b^3}\Big(E_n\varphi(x)+F_n\varphi_1(x)\Big)-\sum_m A_{mn}m\left(m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\right)\cos m\pi\xi\right]\sin n\pi\eta \\
S_y &= \frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\left[\frac{2a^3n^3}{b^3}\Big(E_n\phi(x)+F_n\phi_1(x)\Big)+\sum_m A_{mn}\frac{an}{b}\left(m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\right)\sin m\pi\xi\right]\cos n\pi\eta \\
Q_y &= -\frac{N\pi^3}{a^3}\sum_n\Big[E_n\frac{a^3n^3}{b^3}\left\{(1-\nu)\frac{\pi an}{b}f(x)-2(1-\nu)\,\phi(x)\right\} \\
&\quad +F_n\frac{a^3n^3}{b^3}\left\{(1-\nu)\frac{\pi an}{b}f_1(x)-2(1-\nu)\phi_1(x)\right\} \\
&\quad -\sum_m A_{mn}\frac{an}{b}\left\{(2-\nu)m^2+\frac{a^2n^2}{b^2}\right\}\sin m\pi\xi\Big]\cos n\pi\eta
\end{aligned}
\right\}\quad\cdots\cdots(70)
$$

但し，

$$\phi(x)=\xi\cosh\frac{an\pi}{b}(1-\xi)-(1-\xi)\cosh\frac{an\pi}{b}\xi$$

$$\phi_1(x)=\xi\cosh\frac{an\pi}{b}(1-\xi)+(1-\xi)\cosh\frac{an\pi}{b}\xi$$

$$\varphi(x)=\sinh\frac{an\pi}{b}(1-\xi)-\sinh\frac{an\pi}{b}\xi$$

$$\varphi_1(x)=\sinh\frac{an\pi}{b}(1-\xi)+\sinh\frac{an\pi}{b}\xi$$

（昭．18．8．26 受付）