論 說 報 告

第29卷第10號 昭和18年10月

乾燥砂の運動機構に就て (IV)

(乾燥砂の運動理論と古典的土壓論)

正會員 最 上 武 雄*

內容梗概 粒狀體に於ける力と變形との關係を，今迄の實驗事實を基礎として，假定し，其れを用ひて，乾燥砂の運動を論じた。前文に得た定理は，(其の導出に於て，力と變形との關係を考へなかつた點誤りを犯してゐた) 正しい事を認め，しかも單に剪斷層の砂の運動以外の一般的の定常運動に對しても，此定理が正しい事が分つた。此定理の內容を檢討すると，定常運動に於て，內部摩擦角が存在する事を示す事が出來る。尙ほ，筆者の用ひた力と變形との關係は，Boussinesq の用ひたものを運動學的見地より，改良を行つたものである。最後に，現在迄に得た筆者の研究結果を總括し，其れに依つて，古典的土壓論に對する運動學的考察を行つた。

目 次

第1章 緒 言

本誌6月號に發表した論文中に，校了後，明白な誤りを發見したので，訂正を後日行ふ旨書き添へたが，實に不明の致す所であつた。其後多少考へ及んだ處を加へて，此處に訂正文を發表する事にした。先づ，誤りの根本に就て記す必要があらうかと思はれる。彈性體の力學に於ける最小仕事定理の如きを見ても，力と變形との關係を基礎としてゐる事は，今更事新らしく述べる迄もない事である。粒狀體の場合に，此等に類似した定理を導き出さうとする場合にも，實は，力と變形との關係に，其の本を置かなくてはならなかつたのである。しかし，筆者は，粒狀體の理論を作り上げて了ふ迄は，出來る丈け，力と變形との關係に觸れる事を回避しやうと努めて來，却つて，其の爲めに多少明瞭を缺く事があつても，已むを得ない事として來た。其の理由は，實驗的に明瞭な根據を持たずに，單なる彈性體の力學や流體力學との類似性丈けから，力と變形との關係を導入する事を避けたかつたからに他ならない。其努力が，と言ふよりは，其意慾が，餘りに强かつた爲めに，遂ひに根本的な誤りを犯して了つたと思はれる。依つて，前文の誤りを訂正する爲めには，今迄觸れずに居た，力と變形との關係を，先づ，取上げなければならないのである。

第2章 乾燥砂の運動理論

* 工學士 東京帝國大學助教授

第 1 節　定常運動をなす乾燥砂に於ける力と變形速度との關係

力と變形との關係が，粒狀體の場合に，どの樣になるであらうか。此問題は最も根本的なもので，さう簡單には片付けられない。しかし，今迄行つた粒狀體に關する考察は，此問題に關して，全然手懸りを與へないと言ふ譯ではない。初めの中，筆者が强調した Reynolds の dilatancy，即ち，粒狀體に於ける剪斷變形と體積變化とは，獨立には行はれ得ないと言ふ法則は，粒狀體の運動が，定常狀態にならない時にこそ，重大な意味を持つてゐるけれども，運動が定常狀態になると，大した意味はなく，定常狀態に於ける運動では，體積變化がないと考へても良いと言ふ事を前論文で述べて置いた。果してさうであるならば，觀念的ではあるが，非常に綿密な論理的考察を經て，Boussinesq が導き出した，砂に於ける力と變形との關係を採り上げる事が，單純に，安易な，彈性體の力學や流體力學との類似を追ふよりは，遙かに論理的ではなからうか。唯だ，Boussinesq が靜力學的な場合に用ひてゐる關係を動力學的に用ひなければならないのである。運動が定常でなければ，Boussinesq が採用した，體積不變の關係が成立たないのであるから，定常運動の場合に，Boussinesq の基礎式を改めて採用する方が，Boussinesq 自身の取扱方よりも，より合理的であると思はれる。前論文に述べた $\nu\overline{X}_x$ 等の力成分と應力との關係を考慮した上，粒狀體の場合の力と變形速度との關係を，次の如くであると考へる。此關係を採用すると，變形速度が 0 の時に，$\nu\overline{X}_x$ 等が全部 0 になるから，如何にも不合理の樣に思へるが，一面から考へると，我々が論じ樣としてゐるのは，定常運動の場合なのであるから，さうでない場合に，定常運動の場合に正しい事が，不合理となつても，仕方がない事と思はれる。扨て，力と變形速度との關係は，$\nu\overline{X}_x$ 等は壓縮を正としてゐるから

$$\left.\begin{aligned}&-\nu\overline{X}_x=-p+2mp\frac{\partial u_0}{\partial x},\quad -\nu\overline{Y}_y=-p+2mp\frac{\partial v_0}{\partial y},\quad -\nu\overline{Z}_z=-p+2mp\frac{\partial w_0}{\partial z}\\&-\nu\overline{Y}_z=mp\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right),\quad -\nu\overline{Z}_x=mp\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right),\quad -\nu\overline{X}_y=mp\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

とする。$\nu\overline{X}_x$，$\nu\overline{Y}_y$ 等，u_0，v_0，w_0 は前論文で屢々說明した通りであり，$-p$ は平均の壓力，即ち

$$p=\frac{1}{3}(\nu\overline{X}_x+\nu\overline{Y}_y+\nu\overline{Z}_z)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

で，m は常數である。但し，前論文では，一つの粒の平均質量として，m を用ひたが，本文では，m は別の意味，即ち，一つの物質常數として用ひる。此場合には，體積が變らない樣に運動が生ずるから

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

が成立する。さうすれば，此場合の粒狀體の運動基礎方程式は（物體力 X，Y，Z をも考へて）

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial p}{\partial x}+2m\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+m\frac{\partial}{\partial y}\left\{p\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right\}+m\frac{\partial}{\partial z}\left\{p\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\right\}+\rho X=0\\&-\frac{\partial p}{\partial y}+2m\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+m\frac{\partial}{\partial x}\left\{p\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right\}+m\frac{\partial}{\partial z}\left\{p\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)\right\}+\rho Y=0\\&-\frac{\partial p}{\partial z}+2m\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)+m\frac{\partial}{\partial x}\left\{p\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right\}+m\frac{\partial}{\partial y}\left\{p\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)\right\}+\rho Z=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

及び

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)'$$

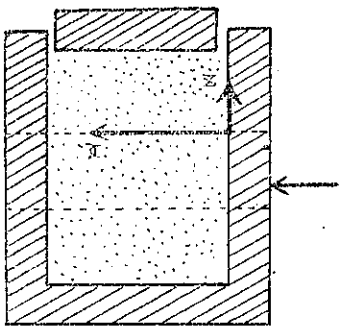
となる。(4) 式で右邊が 0 になつたのは，定常狀態を考へてゐるからである。

第 2 節　再び剪斷層の理論に就て

前論文に於て，剪斷層に就ての理論的考察を行つたが，其際に λ, μ なる二函數を取入れた事は，稍や人工的の觀があつた。しかし，今，力と變形速度との關係を導入して，基礎方程式 (4), (3) 式から出發すれば，其難點を除く事が出來る。座標軸は前の如く取り（圖-1）

$$\frac{\partial}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial y}=0$$

圖-1.



なる假定を許す事前論文に於ける如くする。さうすれば，先づ (3)′ 式より

$$\frac{\partial w_0}{\partial z}=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

(4) の第 3 式より

$$\frac{\partial p}{\partial z}=0,\qquad \therefore\ p=-c_2,\ c_2>0 \quad\cdots\cdots(6)$$

(4) の第 1 式，第 2 式より，(6) 式を考へに入れて

$$u_0=c_0z+c_0',\ v_0=c_1z+c_1' \quad\cdots\cdots(7)$$

$$\left.\begin{aligned}&\therefore\ \nu\overline{X_x}=C_2,\ \nu\overline{Y_y}=C_2,\ \nu\overline{Z_z}=C_2\\&\nu\overline{Y_z}=-mC_1C_2,\ \nu\overline{Z_x}=-mC_0C_2,\ \nu\overline{X_y}=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(8)$$

故に，前論文に於ける λ, μ は

$$\lambda=\frac{\overline{Z_z}}{\overline{X_z}}=\frac{-1}{mC_0},\ \mu=\frac{\overline{Y_z}}{\overline{X_z}}=\frac{C_1}{C_0} \quad\cdots\cdots(9)$$

となり，之れが z に依らない常數となり，前文の結果と一致する。依つて，最初に述べた，粒狀體の運動に關して掲げた二樣の假說が，同一內容を別の言葉で表したに過ぎないと言ふ事の證明にあつた人工的な所が，解消した事になる。（尤も此理論は第一近似的なものである事は當然である。）

第 3 節　粒狀體の運動に關する一定理（前論文に於ける誤りの訂正）

力と變形速度との關係が定まつたから，此等をエネルギー損失の式に代入して見る。前論文第 1 章第 3 節の (11) 式に依り，單位時間に粒狀體內で失はれるエネルギーは，定常狀態を考へて

$$\frac{dI_0}{dt}=-\sigma\int\Big[\nu\overline{X_x}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\overline{Y_y}\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\overline{Z_z}\frac{\partial w_0}{\partial z}+\nu\overline{Y_z}\Big(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\Big)$$
$$+\nu\overline{Z_x}\Big(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\Big)+\nu\overline{X_y}\Big(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\Big)\Big]dv \quad\cdots\cdots(10)$$

である。これに (1) 式を代入すると

$$\frac{dI_0}{dt}=-\sigma\int\Big[\Big(-p+2mp\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big)\frac{\partial u_0}{\partial x}+\Big(-p+2mp\frac{\partial v_0}{\partial y}\Big)\frac{\partial v_0}{\partial y}+\Big(-p+2mp\frac{\partial w_0}{\partial z}\Big)\frac{\partial w_0}{\partial z}$$
$$+mp\Big(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\Big)^2+mp\Big(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\Big)^2+mp\Big(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\Big)^2\Big]dv \quad\cdots\cdots(11)$$

(11) 式の兩邊の變分を取ると

$$\delta\frac{dI_0}{dt}=-\sigma\int\delta p\Big[\Big(-1+2m\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big)\frac{\partial u_0}{\partial x}+\Big(-1+2m\frac{\partial v_0}{\partial y}\Big)\frac{\partial v_0}{\partial y}+\Big(-1+2m\frac{\partial w_0}{\partial z}\Big)\frac{\partial w_0}{\partial z}$$
$$+m\Big(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\Big)^2+m\Big(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\Big)^2+m\Big(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\Big)^2\Big]dv$$

$$-\sigma\int p\Big[-\frac{\partial\delta u_0}{\partial x}+4m\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial\delta u_0}{\partial x}-\frac{\partial\delta v_0}{\partial y}+4m\frac{\partial v_0}{\partial y}\frac{\partial\delta v_0}{\partial y}-\frac{\partial\delta w_0}{\partial z}+4m\frac{\partial w_0}{\partial z}\frac{\partial\delta w_0}{\partial z}$$

$$+2m\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\delta w_0}{\partial y}+\frac{\partial\delta v_0}{\partial z}\right)+2m\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\delta u_0}{\partial z}+\frac{\partial\delta w_0}{\partial x}\right)$$

$$+2m\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\delta v_0}{\partial x}+\frac{\partial\delta u_0}{\partial y}\right)\Big]dv$$

$$=-\sigma\int\delta p\Big[\left(-1+2m\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x}+\left(-1+2m\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\frac{\partial v_0}{\partial y}+\left(-1+2m\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\frac{\partial w_0}{\partial z}$$

$$+m\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)^2+m\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+m\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\Big]dv$$

$$-\sigma\int\Big[\left\{\frac{\partial p}{\partial x}-4m\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)-2m\frac{\partial}{\partial y}\left\{p\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right\}-2m\frac{\partial}{\partial z}\left\{p\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\right\}\right\}\delta u_0$$

$$+\left\{\frac{\partial p}{\partial y}-4m\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-2m\frac{\partial}{\partial z}\left\{p\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)\right\}-2m\frac{\partial}{\partial x}\left\{p\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right\}\right\}\delta v_0$$

$$+\left\{\frac{\partial p}{\partial z}-4m\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)-2m\frac{\partial}{\partial x}\left\{p\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\right\}-2m\frac{\partial}{\partial y}\left\{p\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)\right\}\right\}\delta w_0\Big]dv\cdots\cdots(12)$$

處が (3) 式より

$$\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)=0$$

$$\therefore\quad\int p\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)dv$$

$$=-\int\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta u_0+\frac{\partial p}{\partial y}\delta v_0+\frac{\partial p}{\partial z}\delta w_0\right)dv$$

$$=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

(12), (13) 式を組合せて

$$\delta\frac{dJ_0}{dt}=-\sigma\int\delta p\Big[\left(-1+2m\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x}+\left(-1+2m\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\frac{\partial v_0}{\partial y}+\left(-1+2m\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\frac{\partial w_0}{\partial z}$$

$$+m\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)^2+m\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+m\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\Big]dv$$

$$+2\sigma\int\Big[\left\{-\frac{\partial p}{\partial x}+2m\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+m\frac{\partial}{\partial y}\left\{p\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right\}+m\frac{\partial}{\partial z}\left\{p\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\right\}\right\}\delta u_0$$

$$+\left\{-\frac{\partial p}{\partial y}+2m\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+m\frac{\partial}{\partial z}\left\{p\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)\right\}+m\frac{\partial}{\partial x}\left\{p\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right\}\right\}\delta v_0$$

$$+\left\{-\frac{\partial p}{\partial z}+2m\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)+m\frac{\partial}{\partial x}\left\{p\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)\right\}+m\frac{\partial}{\partial y}\left\{p\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)\right\}\right\}\delta w_0\Big]dv$$

(4) 式を考へに入れると，此の第 2 の積分は

$$I'=-2\sigma\int\rho(X\delta u_0+Y\delta v_0+Z\delta w_0)dv$$

となるが，物體力がポテンシアルを持つてゐるならば，即ち

$$X=-\frac{\partial\Omega}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial\Omega}{\partial y},\quad Z=-\frac{\partial\Omega}{\partial z}$$

ならば

$$I'=2\sigma\int\rho\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\delta u_0+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\delta v_0+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\delta w_0\right)dv$$

$$=-2\sigma\int\rho\Omega\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)dv$$

$$=0$$

となり消えるから，

$$\delta\frac{dI_0}{dt}=-\sigma\int\delta p\Big[\left(-1+2m\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x}+\left(-1+2m\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\frac{\partial v_0}{\partial y}+\left(-1+2m\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\frac{\partial w_0}{\partial z}$$

$$+m\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)^2+m\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+m\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\Big]dv \quad\cdots\cdots(14)$$

故に，今假りに

$$\delta p=0 \quad\cdots\cdots(15)$$

とすれば

$$\delta\frac{dI_0}{dt}=0 \quad\cdots\cdots(16)$$

を得る。依つて，エネルギー損失の割合ひが極大又は極小である爲めには，(1) なる力と變形速度との關係が成立する場合には，$\delta p=0$ が成立する事が必要且つ充分な條件である。即ち p が等しい値を持つ數多の運動を比較する時，實際に起り得る粒狀體の運動は，エネルギー損失の割合ひが，極大又は極小値を取るが如きものである。尙ほ，(15) 式の條件は，不壓縮性運動の場合の p の値は

$$p=\lim_{\substack{k\to\infty\\ \Delta\to 0}}k\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)$$

但し $\Delta=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}$, $k=$ 常數

の如きものなのであるから，差程無理な條件ではないのである。又，本節の定理の極小，極大の中のいづれを取る可きであるかは，多少の考察の後極小なる事が分かるのであるが，便宜上，此れは後節に廻す事にする。

第 4 節 前節の定理の土壓論的意義

今，2 次元的の場合を考へる。即ち

$$\frac{\partial}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial w_0}{\partial x}=\frac{\partial w_0}{\partial y}=0 \quad\cdots\cdots(17)$$

とする。これは，剪斷耐理論の場合より稍や一般的である。さうすれば

$$\frac{dI_0}{dt}=-\sigma\int\left[\nu\overline{X}_x\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\overline{Y}_y\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\overline{X}_y\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right]dv \quad\cdots\cdots(18)$$

となる。

$$T=\nu\overline{X}_x\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\overline{Y}_y\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\overline{X}_y\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \quad\cdots\cdots(19)$$

と置き，(1), (3) 式を代入すれば，

$$T=\left(-p+2mp\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x}+\left(-p+2mp\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\frac{\partial v_0}{\partial y}+mp\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2$$

$$=mp\left\{2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right\} \quad\cdots\cdots(20)$$

處で，前論文第 1 章，第 3 節，(5) 式を見れば，定常運動では，

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}_\nu&=l_1\overline{X}_x+m_1\overline{X}_y+n_1\overline{X}_z\\ \overline{Y}_\nu&=l_1\overline{Y}_x+m_1\overline{Y}_y+n_1\overline{Y}_z\\ \overline{Z}_\nu&=l_1\overline{Z}_x+m_1\overline{Z}_y+n_1\overline{Z}_z\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(21)$$

なる關係が成立つから $\overline{X}_x$, $\overline{Y}_y$, $\cdots\overline{Y}_z$, $\cdots$ 等の Mohr 圖に依る表示が可能である事が分かる。又 (1) 式の關係より，2 次元の場合には，

$$\left.\begin{aligned}&-\nu\overline{X}_x=-p+2mp\frac{\partial u_0}{\partial x},\quad -\nu\overline{Y}_y=-p+2mp\frac{\partial v_0}{\partial y},\quad -\nu\overline{Z}_z=-p\\ &-\nu\overline{Y}_z=0,\quad -\nu\overline{Z}_x=0,\quad -\nu\overline{X}_y=mp\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(22)$$

又

$$p=\frac{\nu\overline{X}_x+\nu\overline{Y}_y}{2}\cdots\cdots(23)$$

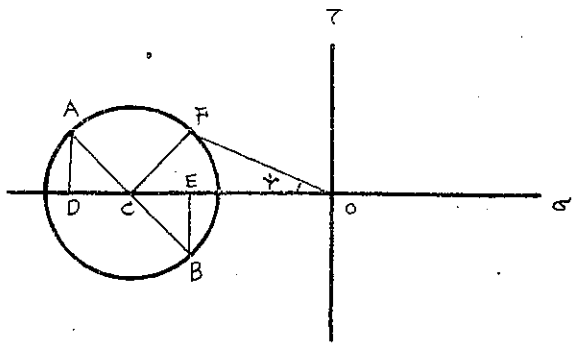
$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad 2mp\frac{\partial u_0}{\partial x}&=-\nu\overline{X}_x+p=\frac{-\nu\overline{X}_x+\nu\overline{Y}_y}{2}\\ 2mp\frac{\partial v_0}{\partial y}&=\nu\overline{Y}_y+p=\frac{\nu\overline{X}_x-\nu\overline{Y}_y}{2}\\ mp\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)&=-\nu\overline{X}_y\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(24)$$

依つて，圖-2 を Mohr の圖表示とすれば

$$\mathrm{OC}=p,\quad \mathrm{OE}=\nu\overline{X}_x,\quad \mathrm{OD}=\nu\overline{Y}_y$$

$$\mathrm{AD}=\mathrm{BE}=\nu\overline{X}_y$$

圖-2.



なる故 (20) 式より

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2mp}[\mathrm{CE}^2+\mathrm{CD}^2+\mathrm{AD}^2+\mathrm{BE}^2]\\ &=\frac{1}{mp}\mathrm{AC}^2\\ &=\frac{p}{m}\left(\frac{\mathrm{CE}}{p}\right)^2\\ &=\frac{p}{m}\sin^2\psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{dI_0}{dt}&=-\sigma\int T dv\\ &=-\frac{\sigma}{m}\int p\sin^2\psi\, dv\cdots\cdots(25)\end{aligned}$$

依つて，(dI_0/dt) が極大又は極小になると言ふ事は，p を重率にした $\sin\psi$ の平均値が極大又は極小になると言ふ事である。今考へてゐる粒狀體の部分を適當に小さくとれば，

$$\frac{dI_0}{dt}=-\frac{\sigma}{m}p\sin^2\psi\, dv\cdots\cdots(26)$$

であるから，其部分で生ずる粒狀體の運動は，p が等しい數多の運動の中 ψ の極大又は極小になる樣なものである。

ψ は應力（實は應力でなく $\nu\overline{X}_x$ の樣な力ではあるが，便宜上應力と言つて置く事にする）と其れの働く面の法線の間の角の最大値である。依つて起り得る實際の運動では，この最大の角が極大又は極小になる譯である。これは古典的土壓論の要請と一致する。即ち，古典的土壓論では，今問題になつてゐる角が，其材料に對して生じ得る最大値たる內部摩擦角 φ に等しい事を要求してゐるからである。

但し，我々の得た結論は，運動が定常である事を前提としてゐるのだから，前論文第 3 章に述べた所と矛盾しないし，又逆に，其所論を支持すると考へられる。

(6), (7), (11) 式により，剪斷層の場合には

$$T=-mc_2cc_0^2+c_1^2$$
$$=\frac{-c_0}{m}\sin^2\psi$$
$$\therefore\quad \sin\psi=m\sqrt{c_0^2+c_1^2}$$
$$=\text{一定}\qquad\cdots\cdots(27)$$

となり，ψ=一定となる。

處が簡單な考察から

$$\sin\psi=\frac{\sqrt{\dfrac{(\nu\overline{X}_x-\nu\overline{Y}_y)^2}{4}+(\nu\overline{X}_y)^2}}{\dfrac{\nu\overline{X}_x+\nu\overline{Y}_y}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{(\nu\overline{X}_x-\nu\overline{Y}_y)^2+4(\nu\overline{X}_y)^2}}{\nu\overline{X}_x+\nu\overline{Y}_y}\qquad\cdots\cdots(28)$$

(21) 式から考へると，應力の場合の主應力に對應する $\nu\overline{S}_1$、$\nu\overline{S}_2$ を求める事が出來る事が分かり

$$\left.\begin{aligned}\nu\overline{S}_1&=\frac{\nu\overline{X}_x+\nu\overline{Y}_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\nu\overline{X}_x-\nu\overline{Y}_y}{2}\right)^2+(\nu\overline{X}_y)^2}\\ \nu\overline{S}_2&=\frac{\nu\overline{X}_x+\nu\overline{Y}_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\nu\overline{X}_x-\nu\overline{Y}_y}{2}\right)^2+(\nu\overline{X}_y)^2}\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(29)$$

である。そうすれば，(26) 式は

$$\sin\psi=\frac{\nu\overline{S}_1-\nu\overline{S}_2}{\nu\overline{S}_1+\nu\overline{S}_2}\qquad\cdots\cdots(30)$$

ψ の極大値又は極小値を ϕ_0 とすれば（この ϕ_0 に對應する樣な運動が實際に生じ得る）

$$\nu\overline{S}_1=\frac{1+\sin\phi_0}{1-\sin\phi_0}\nu\overline{S}_2\qquad\cdots\cdots(31)$$

なる關係も出て來る。

第 5 節　第 3 節の定理に於ける極大，極小の判定と其意義

第 3 節で，粒狀體の定常運動に於て，單位時間のエネルギー損失が極大又は極小であると言ふ定理を述べたが，果してそれは極大であらうか，極小であらうかと言ふ問題がある。流體力學の場合の樣な方法に依つて，極小の方である事は容易に分かる。念の爲めに，其計算をやつて見る。簡單の爲めに

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_0}{\partial x}=a,\quad \frac{\partial v_0}{\partial y}=b,\quad \frac{\partial w_0}{\partial z}=c\\ &\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}=f,\quad \frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial u_0}{\partial x}=g,\quad \frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}=h\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(32)$$

と置く

$$a=a,\ b=b,\ c=c,\ f=f,\ g=g,\ h=h$$

が實際に起る運動であるとし

$$a=a+a',\ b=b+b',\ c=c+c',\ f=f+f',\ g=g+g',\ h=h+h' \cdots\cdots (33)$$

が假想的な運動であるとする。そして境界では $u_0'=0,\ v_0'=0,\ w_0'=0$ であるとする。その時の $\nu\overline{X}_x$ 等の力は

$$\nu\overline{X}_x=\nu\overline{X}_x+\nu\overline{X}_x'\cdots,\quad \nu\overline{Y}_z=\nu\overline{Y}_z+\nu\overline{Y}_z'\cdots$$

であるとする。$p=p'$ とすれば，(1) 式より

$$\nu\overline{X}_x a'+\nu\overline{Y}_y b'+\nu\overline{Z}_z c'+\nu\overline{Y}_z f'+\nu\overline{Z}_x g'+\nu\overline{X}_y h'$$
$$=\nu\overline{X}_x' a+\nu\overline{Y}_y' b+\nu\overline{Z}_z' c+\nu\overline{Y}_z' f+\nu\overline{Z}_x' g+\nu\overline{X}_y' h \cdots\cdots (34)$$

なる關係を證明する事は容易である。(33), (34) 式なる假想的な運動の場合の，單位時間についてのエネルギー損失は，(33), (34) 式の關係を用ひて

$$\frac{dI_0}{dt}=\sigma\int(\nu\overline{X}_x a+\nu\overline{Y}_y b+\nu\overline{Z}_z c+\nu\overline{Y}_z f+\nu\overline{Z}_x g+\nu\overline{X}_y h)dv$$
$$-\sigma\int(\nu\overline{X}_x' a'+\nu\overline{Y}_y' b'+\nu\overline{Z}_z' c'+\nu\overline{Y}_z' f'+\nu\overline{Z}_x' g'+\nu\overline{X}_y' h')dv \cdots\cdots (35)$$

となる。各項は，夫々に ′ のつかぬ運動と ′ の付いた運動が別々に生じた時の分單位時間當りのエネルギー損失であるから，夫々は正の量である。依つて，實際生ずる運動に於て，單位時間に失はれるエネルギーの値は，p が不變なる時は他のいかなる假想的な運動の場合よりも小さい。

それでは，此の意味は如何なるものかと言へば，前節で述べた如く (dI_0/dt) は $\sin^2\psi$ に比例する。若し不安定であつて，ψ が極小な運動に移らうとする。即ち，ψ が實際に生ずる運動の場合の値 ϕ_0 よりも大きくなれば，運動は不安定である。內部摩擦角 ψ の意味は正に此樣なものであるから，前述の定理は，古典的土壓論に於ける內部摩擦角を運動學的に說明するものである。尙ほ，ψ が ϕ_0 よりも小さい事は，定常運動としては有り得ないのであつて，若し運動してゐるとすれば不安定である。不定常運動の領域を含んでゐるから，明確には言ひ切れないが剪斷試驗の際に

$$q=\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}p$$

なる關係から逆算した ϕ の値が，試驗が進むにつれて，段々小さくなり，最後に息角附近迄下がつて行つた事は多少此事實と關係がありそうである。又堀君の實驗で，剪斷の速さを早くすると，內部摩擦角が小さくなつた事實も，同じ定常運動でも，剪斷速度の大きい場合の方が，より安定なものであるとすれば，說明が付くのである。

第 3 章　古典的土壓論と乾燥砂の運動理論

第 1 節　古典的土壓論と乾燥砂の運動理論との關係

現在迄行つて來た，粒狀體に關する研究に依つて，古典的土壓論を運動學的に批判する事，運動學的に意味付ける事が出來る樣になつた。一應其等を纏めて置く事は無意味ではあるまいと思はれる。そこで，改めて章を變へた譯である。

古典的土壓論では，

1) 土の中に働く應力と其れの働く面の法線との間の角は，內部摩擦角 φ よりも小さく，限界狀態に於ては丁度 φ に等しくなる（coulomb の摩擦法則）。

2) Rankine, Boussinesq 系の土壓論では，考へてゐる土の中の何處の點も限界狀態にあり各點で畫いた應力楕圓が相似で相似の位置にある事を假定してゐる一方，Coulomb 系では，滑り面と壁面とに於てのみ限界狀態を假定してゐる。尙ほ，Coulomb 系では，其他に壓力が深さに比例する事を假定する。Rankine 系，Boussinesq 系では，全面が限界狀態にあり各點で畫いた應力楕圓が相似の位置にある事から，多少の理論的考察をして，此の Coulomb の後の假定は導き得る。

3) 尙ほ，Reynolds は dilatancy なる粒狀體の特質を强調して，其性質と Coulomb の摩擦法則とが密接な關係にあるだらう事を想像し，將來の土壓論の基礎は，此處にあると言つてゐる。

筆者の行つて來た研究結果の主なるものゝ大體を纏め直すと，次の如くになる。

1) 粒狀體運動には，定常運動と不定常運動とがある。

2) 不定常運動の特長は

i) 不連續運動がある。即ち，砂の各部分が不連續的に運動する。

ii) dilatancy が大きな役割りをする。即ち，剪斷變形と體積變形とは無關係ではない。

iii) Coulomb の內部摩擦法則が成立しない。

3) 從つて dilatancy と coulomb の摩擦法則とは，兩立しない。

4) 定常運動の特長は

i) 運動は，統計的に見て連續的である。

ii) dilatancy は，大して效かない。即ち，體積變化は，剪斷變形に拘らず 0 である。運動は不壓縮性である。

iii) 實際に生ずる運動をしてゐる同じ平均壓力 p を持つ他の假想的な數多の運動と比較すると，實際に生ずる運動の場合の，單位時間當りのエネルギー損失が最も少ない。

iv) iii) の內容は，應力と其れの働く面の法線との間の角が，實際に生ずる運動の場合の方が，他の假想的な運動の，如何なるものに比しても，小さいと言ふ事と同じである。

v) 從つて，其の最小角よりも大きな角に對應する運動は，不安定である（これが內部摩擦の運動學的意義）。

5) 以上から考へると，古典的土壓論では，生ずる運動が，定常的であることを豫想してゐる。

6) 運動の初期は，定常ではない。

7) 從つて Terzaghi，鷹部屋博士の實驗の示す如く，壁の仆し初めは，古典的土壓論は，實驗に依る壓力と異つた壓力の値を與へる。

8) 定常運動の場合に剪斷層中の應力と，其れの働く面の法線との間の角は一定である。

9) 砂の運動に關する假說（定常運動に關し）

i) 一つの粒の周圍にある，平均の間隙は一定である。

ii) 粒と粒との間に働く力の垂直線とのなす角は，殆ど一定である。

は，剪斷層に關し，理論的にも，實驗的にも，證明され，其等は，同じ內容を別の言葉で言つたに過ぎない事が分つた。

10) 定常運動の場合には

$$\nu\overline{X_x}=-p+2mp\frac{\partial u_0}{\partial x},\quad \nu\overline{Y_y}=p+2mp\frac{\partial v_0}{\partial y},\quad \nu\overline{Z_z}=p+2mp\frac{\partial w_0}{\partial z}$$

$$\nu\overline{Y_z}=mp\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right),\quad \nu\overline{Z_y}=mp\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right),\quad \nu\overline{X_y}=mp\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}=0$$

$$-p=\frac{1}{3}(\nu\overline{X_x}+\nu\overline{Y_y}+\nu\overline{Z_z})$$

なる關係が成立する

11) 一樣な粒狀體の運動基礎方程式を作つた。

以上 順序不同乍ら，主な結論を並べて見た。以上に依つて，古典的土壓論の運動學的批判が行はれたと共に古典的土壓論の限界も明らかになつた。

現在迄の研究で不明なのは，不定常運動である。古典的土壓論の持つてゐる不明瞭さも，結局，不定常運動の持つてゐる不明瞭である事を考へると，此方面の研究の重要な事が思はれる。僅かに，嘗つて，筆者が考へた k なる値の變化，剪斷試驗の場合の α の値の變化，浮上量，浮上力の變化，φ の値の變化が此方面の將來の研究に對する手懸りを與へてゐると考へられる。

第 2 節 Rendulic の研究に就て

全然運動學的根據からでなく，Rendulic はエネルギー損失極大と言ふ條件から，主働土壓，受働土壓の關係を求めてゐる。彼の立場は，運動の定常，不定常の區別をせず，內部摩擦角の存在を假定してゐるのであるから，一側面觀である。しかも，實驗に依つて φ なる角は段々小さくなる事が認められるのだから，彼の研究結果は不合理とさへ思はれるのであるが，彼に依つて，エネルギー損失と言ふ概念が取上げられてゐたと言ふ事は，面白い事なので敢へて附記した次第である。

（昭. 18. 8. 11. 受付）