

# 論 說 報 告

第 29 卷 第 9 號 昭和 13 年 9 月

## 流 砂 に 關 する 研 究 (第 2 編) (砂 粒 の 浮 游 理 論)

准會員 永 井 莊 七 郎\*

**要 旨** 河床にある土、砂、礫の粒子が渦流中へ浮き上る機構並びにそれ等の粒子が渦流中に浮游して存在する機構を理論的に説明したものである。尙ほ粒子の浮游に密接なる関係のある渦亂運動に於ける渦粘性係数、變動速度及び渦亂の度合の値及び分布を理論及び實驗により求めた。終りに移動床の渦流に於ける流速分布に就て附記した。

### 目 次

第 5 章 河床粒子の浮游	第 8 章 渦亂による擴散
第 1 節 緒 言	第 1 節 微粒子の擴散式
第 2 節 河床粒子の浮游機構	第 2 節 擴散係数の渦粘性係数
第 6 章 渦流中に於ける微小粒子の浮游機構	第 9 章 渦流の速度分布
第 1 節 膠質粒子の浮游及び沈澱	第 1 節 渦粘性係数及び混合距離の鉛直分布
第 2 節 砂粒の浮游	第 2 節 流速分布を對數曲線で表はす方法
第 7 章 渦流に於ける變動速度	第 3 節 流速分布を拋物線で表はす方法
第 1 節 渦粘性係数	
第 2 節 鉛直變動速度	

### 第 5 章 河床粒子の浮游

#### 第 1 節 緒 言

移動床河川或は水路に於ける渦流（亂流）中には、水より遙かに比重の大なる土砂礫が巻き上げられ浮游して流れる。此の土砂の浮游問題は、河床の洗掘、河川の流砂量、河口に於ける沈澱堆積等を考へるに當つて根本的な重要事項である。それにも拘らず、その機構が極めて複雑且不規則にして、而も未だ研究の途上にある水流の渦亂運動に關聯してゐる等のため、理論的にも又實驗的にも殆んど研究されずして放置されて來た。而して最近になつて、渦流中に浮游せる微細砂粒の鉛直分布を渦亂運動の理論によつて説明せんとする新しき試みが二、三人によつて行はれるに至つた<sup>29),30),31),32)</sup>。然し之等の試みは、渦流に於ける統計的理論が水理學上の此種の問題に關聯せしめ得ることを指示した程度にして、その理論を應用して水理學或は河川工學に於ける實際問題を解決す

\* 工學士 京城帝國大學助教授

29) 連水頌一郎：「流體の擾亂運動による細粒子傳搬の理論に就て」、上海自然科學研究所彙報、第 4 卷、1935 年 1 月。

30) H. Rouse: "Modern Conceptions of the Mechanics of Fluid Turbulence", Proc. A.S.C.E., Jan. 1937.

31) H. Rouse: "Experiments on the Mechanics of Sediment Suspension", Proc. 5th Intern. Congress of Appl. Mech., Sept. 1938.

32) A. Kalinske: "Relation of the Statistical Theory of Turbulence to Hydraulics", Proc. A.S.C.E., Oct. 1939.

ると言ふ點までには尙未だ遙かに遠いものであつた。

著者は現在までに明かにされた渦亂運動に關する理論及び既に解決されてゐる膠質粒子の浮游及び沈降に關する理論に基いて、實際の河川に於ける砂粒の浮游及び沈澱の問題を考究した、その結果、從來複雑にして理論的に取扱ひ難しと考へられてゐた此種の問題を或る程度まで理論的に説明することが出來た。

第2節 河床粒子の浮游機構

河床にある粒子が浮き上る原因に就ては、物部博士<sup>33)</sup>、H. Krey 等により、主流に垂直なる副流に基く上向速度に依るものであると考へられて來たやうである。然し斯る副流が實在の河川或は水路の凡ての流れに存するものとは考へられない。著者はガラス張水路<sup>34)</sup>に於て床面砂粒の浮游状態を觀察したるに、副流の存在を認めることは出來なかつた。恐らく副流は流路の彎曲部、又は種々なる障礙物の周圍に生ずる彎曲流、或はそれ等に類似した流れ等に存するものにして、一般の直流部の流れには存するとは考へられない。勿論、副流が存在する流れに於ては副流の上向速度によつて河床の粒子が浮き上ると考へられるが、副流の存在が實在の凡ての流れに普遍的なものでないから、此の副流の上向速度のみによつては、床面粒子の浮游機構を一般的に説明することは出來ない。

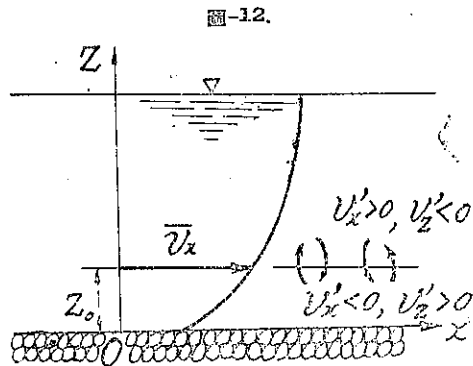
著者は實驗水路に於て床面砂粒の浮游状態を觀察し、且水理學的に考究したる結果、床面にある粒子が浮き上る原因は、一般に流れに於ける渦亂運動に基くものであると考へる。又床面から浮き上つた粒子が渦流中に浮游して存在するのもやはり此の渦亂運動によるものであると考へる。但し粒徑が  $0.1\mu\sim 1m\mu$ (ミリミクロン)の如く極めて微細なる所謂膠質粒子は後に述ぶる如く全く別の機構によるものである。

一般に渦流に於ては、水分子は複雑なる渦の運動をなしてゐる。又鉛直方向及び水平方向に於ける速度勾配のために、上下左右の水の層の間に著しい混合運動をなしてゐる。此の渦動及び混合運動は獨立して起るものではなくして、兩運動が互に入り交つて複雑なる運動をなしてゐる。之を總稱して渦亂運動と言つてゐる。移動床の水路或は河川の床面には、砂礫の存在によつて無数の小さい凹凸がある。又砂礫の移動によつて形成される砂漣のために大きな凹凸が出来る。之等大小無数の凹凸によつて床附近には主として水平軸を有する大小無数の渦が形成される。之等の渦は流速と共に増大し、渦亂運動を益々激成する。それ故、床面の粒子は、流速が増大し渦亂運動が激しくなるにつれて、小粒のものから次第に大粒のものが渦流中に浮き上る。

今2次元的な流れを考へ、主流(平均流)の方向にx軸を、之に鉛直上向にz軸をとる。主流の速度を  $v_x$  とすれば、等速流に於ては  $v_x$  はz方向のみに變化し、 $v_y = v_z = 0$  となる。故に

$$v_x = \bar{v}_x + v_x', \quad v_z = v_z' \dots \dots \dots (99)$$

となる。茲に  $\bar{v}_x$  は  $v_x$  の或る長い時間  $T$  に於ける平均値にして、 $v_x', v_z'$  は各瞬間に於ける變動の速度である。即ち



33) 物部長穂: 水理學, 昭. 11., 248~250 頁.

34) 永井: 「流砂に關する研究(第1編)」, 昭. 18. 4. 土木學會誌, 353 頁.

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_x &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} v_x dt, & \frac{1}{T} \int_{z-T/2}^{z+T/2} v_x' dz &= \bar{v}_x' = 0 \\ \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} v_x' dz &= \bar{v}_x' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (100)$$

$\bar{v}_x$  は  $z$  のみの函數にして、その鉛直方向の分布は圖-12 の如くである。今  $z = z_0$  なる層附近に於ける速度の變動を考ふるに、 $z > z_0$  なる領域に於ては  $\bar{v}_x(z)$  は  $\bar{v}_x(z_0)$  より大であるから、此の領域から  $z < z_0$ 、従つて  $\bar{v}_x(z)$  が  $\bar{v}_x(z_0)$  より小なる領域に動いた水の小塊は  $\bar{v}_x(z_0)$  より大なる  $\bar{v}_x$  を有することが多く、反對に  $z < z_0$  なる領域から  $z > z_0$  なる領域に動いた水の小塊は  $\bar{v}_x(z_0)$  より小なる  $\bar{v}_x$  を有することが多い。それ故負の  $v_x'$  は正の  $v_x'$  と、正の  $v_x'$  は負の  $v_x'$  と結ばれることが、その逆の場合よりも多いことになり、 $v_x'$  と  $v_x'$  との間には相關を生ずると考へられる。斯る運動に於ては見掛けの剪斷應力<sup>35)</sup>  $-\rho \overline{v_x' v_x'}$  が存在する。故に床附近に於ける剪斷應力  $\tau$  は次式で表はされる。

$$\tau = \eta \frac{d\bar{v}_x}{dz} - \rho \overline{v_x' v_x'} \dots\dots\dots (101)$$

$\eta$  は分子粘性係數である。右邊の第 1 項は整流 (層流) に於ける剪斷應力を表はす。床面に接して整流の限界層 (境界層) が存在する場合には、床面に於ては速度の變動は消失するから、第 2 項はなくなる。然し今考へてゐる如き場合には床面に整流の限界層が存するとは考へられないから、第 1 項は消失して

$$\tau = -\rho \overline{v_x' v_x'} \dots\dots\dots (102)$$

となる。次に (102) 式中の  $v_x', v_x'$  に就て考へてみる。今 Prandtl<sup>36)</sup> の考へに従へば、床面附近に於ては水の各層の間で輸送されるのは運動量であるから、 $v_x$  の變化は輸送運動量による。故に輸送が  $z = z_1$  から  $z = z_2$  に行はれたとすれば、

$$\rho |v_x' v_x'| = \rho \{ \bar{v}_x(z_2) - \bar{v}_x(z_1) \} = \rho (z_2 - z_1) \frac{d\bar{v}_x}{dz}$$

$z_2 - z_1$  は水分子が運動した距離にして、 $z_2 - z_1 = l'$  とをけば

$$|v_x' v_x'| = l' \left| \frac{d\bar{v}_x}{dz} \right| \dots\dots\dots (103)$$

又  $v_x'$  は  $v_x'$  を異にする 2 つの水の小塊が離合することによつて生ずる、平均流に垂直なる速度であると考へると、恐らく  $v_x'$  は  $v_x'$  よりは稍小なる値を持つであらうと考へられる<sup>37)</sup>。故に  $k_1 < 1$  とすれば

$$|v_x' v_x'| = k_1 |v_x' v_x'| = k_1 l' \left| \frac{d\bar{v}_x}{dz} \right| \dots\dots\dots (104)$$

(103), (104) 式より

$$\overline{v_x' v_x'} = -k_2 |v_x' v_x'| = -k_1 k_2 l'^2 \left( \frac{d\bar{v}_x}{dz} \right)^2$$

今  $k_1 k_2 l'^2 = l^2 \dots\dots\dots (105)$

とをけば、

$$\overline{v_x' v_x'} = -l^2 \left( \frac{d\bar{v}_x}{dz} \right)^2 \dots\dots\dots (106)$$

35) Reynolds の應力、見掛けの摩擦抵抗力とも言ふ。  
 36) Prandtl; Z. A. M. M., 5, 137, 1925.  
 37) W. F. Durand: Aerodynamic Theory, Vol. III, p. 129~130.

(106) 式を (102) 式に入れると

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{v}_w}{dz} \right)^2 \dots\dots\dots (107)$$

を得る。此の式は良く知られた渦流に於ける剪断應力を表はす式である。式中の  $l$  は混合距離である。(103), (104) 式に於ける  $l'$  に就ては現在では何等知られてゐないが唯  $l$  に相當近い値であらうと言ふことは想像される。今  $l' \doteq l$  と假定すると

$$|\overline{v_w'}| = l \left| \frac{d\bar{v}_w}{dz} \right| \dots\dots\dots (108)$$

$$|\overline{v_z'}| = k_1 l \left| \frac{d\bar{v}_w}{dz} \right| \dots\dots\dots (109)$$

となる。

又  $k_1$  の値は恐らく 1 より小さい値であらうと言はれてゐるが、未だ定つてゐない。今近似的に  $k_1 \doteq 1$  とをけば

$$|\overline{v_z'}| \doteq |\overline{v_w'}| = l \left| \frac{d\bar{v}_w}{dz} \right| \dots\dots\dots (110)$$

となる。我々がピトー管によつて測定し得る流速は厳密には  $\sqrt{\overline{v_w'^2}}$  であるが、普通の渦流に於ては  $v_w'$  が  $\bar{v}_w$  に比して極めて小なるため、 $\sqrt{\overline{v_w'^2}} = \bar{v}_w$  と考へて差支ない<sup>38)</sup>。故にピトー管によつて鉛直線に沿ふ流速の分布を測定し、河床に於ける  $d\bar{v}_w/dz$  及び  $l$  を求むれば、(110) 式より河床に於ける  $|\overline{v_z'}|$  の値を算出し得る。自然河川等に於て流速計を用ひて流速を測定する場合には、或る時間に於ける大體の平均流速を知り得るに過ぎないのであるから、 $\sqrt{\overline{v_w'^2}}$  と  $\bar{v}_w$  との誤差等は問題にならず、測定した流速を  $\bar{v}_w$  と考へてよい。斯くして (110) 式より得られる  $|\overline{v_z'}|$ 、即ち鉛直上向きの變動速度が河床の粒子を浮き上らせるのであると考へられる。

一般に粒子が静水中を沈降する時の抵抗  $W$  は次式で表はされる。

$$W = \xi v_0 \cdot l \frac{v^2}{g} = \xi \rho A v^2 \dots\dots\dots (111)$$

但し

$$\xi = c \Re^n, \quad \Re = \frac{v d}{\nu} \dots\dots\dots (112)$$

$n, c$  の値は粒徑及び水の温度により異り、鶴見一之博士<sup>39)</sup>に依れば、温度 25°C の時は (動粘性係數  $\nu = 0.00897$  cm<sup>2</sup>/sec),

- |  |                    |            |                         |
|--|--------------------|------------|-------------------------|
| (S) $d < 0.15$ mm の時,                  | $n = -1, c = 10.$  | Stokes の法則 | } \dots\dots\dots (113) |
| (A) $1.1 \text{ mm} > d > 0.15$ mm の時, | $n = -0.5, c = 5.$ | Allen の法則  |                         |
| (K) $5.8 \text{ mm} > d > 1.1$ mm の時,  | $n = -0.2, c = 1.$ | Kármán の法則 |                         |
| (N) $d > 5.8$ mm の時,                   | $n = 0, c = 0.2.$  | Newton の法則 |                         |

となる。然し渦流に於ては渦亂運動のために、粒子の受ける抵抗は静水中に於けるよりも大であると考へられるが、今近似的に同一であるとする、渦流中で水の小塊が  $v_z'$  なる速度を有する時は、粒子は  $\xi \rho A v_z'^2 = \xi \rho \frac{\alpha d^2}{4} \times v_z'^2$  なる低抗を受けることになる。従つて河床に於ける鉛直變動速度を  $v_z'$  とすれば、直徑  $d$  なる河床粒子に

38) 此の誤差は一般に 0.2 % 以下である。  
 39) 鶴見一之：「沈降速度の理論及實驗」, 土木學會誌第 18 卷第 10 號, 1059~1093 頁

は近似的に  $\zeta \rho \frac{\pi d^2}{4} v_z'^2$  なる力が鉛直方向に働くと考へてよい。

然る時は、河床の粒子が渦流中に將に浮き上らんとする限界に於て次の關係が成り立つ。

$$(\gamma_s - 1) v_0 \frac{\pi}{6} d^3 = \zeta \rho \frac{\pi}{4} d^2 v_{zg}'^2 \dots\dots\dots (114)$$

式中  $v_{zg}'$ : 河床粒子が浮き上る限界時の鉛直上向きの變動速度,  $\gamma_s$ : 粒子の比重 である。

(114) 式に  $\zeta = c \cdot \left(\frac{v d}{\nu}\right)^n$  なる關係を入れると、一般に

$$v_{zg}' = \left\{ \frac{2}{3c} (\gamma_s - 1) g \right\}^{\frac{1}{2+n}} \nu^{\frac{n}{2+n}} d^{\frac{1-n}{2+n}} \dots\dots\dots (115)$$

(113) 式を入れると

(S)	$v_{zg}' = \left\{ \frac{1}{15} (\gamma_s - 1) g \right\}^{1.0} \nu^{-1.0} d^2$	}	(116)
(A)	$v_{zg}' = \left\{ \frac{2}{15} (\gamma_s - 1) g \right\}^{0.667} \nu^{-0.333} d$		
(K)	$v_{zg}' = \left\{ \frac{2}{3} (\gamma_s - 1) g \right\}^{0.555} \nu^{-0.111} d^{0.667}$		
(N)	$v_{zg}' = \left\{ \frac{10}{3} (\gamma_s - 1) g \right\}^{0.5} d^{0.5}$		

(116) 式は直径が  $d$  なる河床の粒子が將に浮き上らんとする時の鉛直上向きの變動速度を表はす。

今粒子の比重  $\gamma_s = 2.64 = \gamma_0$ , 動粘性係数  $\nu = 0.00897 \text{ cm}^2/\text{sec}$  (温度  $T = 25^\circ\text{C}$ ) として (116) 式を計算すると

(S)	$d < 0.15 \text{ mm}$ の時,	$v_{zg}' = 11.945 d^2$	}	(117)
(A)	$1.1 \text{ mm} > d > 0.15 \text{ mm}$ の時,	$v_{zg}' = 171.5 d$		
(K)	$5.8 \text{ mm} > d > 1.1 \text{ mm}$ の時,	$v_{zg}' = 81.4 d^{0.667}$		
(N)	$d > 5.8 \text{ mm}$ の時,	$v_{zg}' = 73.2 d^{0.5}$		

(cm-sec 單位)

粒子の比重  $\gamma_s$  が  $\gamma_0 = 2.64$  に等しからざる時及び渦流の温度が  $25^\circ\text{C}$  ならざる時は、夫々次式で示す如き補正係数  $C_\gamma$  及び  $C_T$  を (117) 式の右邊に掛けなければならない。

(S)	$C_\gamma = \frac{\gamma_s - 1}{\gamma_0 - 1}, \quad C_T = \frac{\nu_0}{\nu T}$	}	(118)
(A)	$C_\gamma = \left(\frac{\gamma_s - 1}{\gamma_0 - 1}\right)^{0.667}, \quad C_T = \left(\frac{\nu_0}{\nu T}\right)^{0.333}$		
(K)	$C_\gamma = \left(\frac{\gamma_s - 1}{\gamma_0 - 1}\right)^{0.555}, \quad C_T = \left(\frac{\nu_0}{\nu T}\right)^{0.111}$		
(N)	$C_\gamma = \left(\frac{\gamma_s - 1}{\gamma_0 - 1}\right)^{0.5}, \quad C_T = 1$		

式中  $\nu_0$ :  $25^\circ\text{C}$  に於ける水の動粘性係数  $= 0.00897 \text{ cm}^2/\text{sec}$

$\nu T$ : 任意の温度  $T^\circ\text{C}$  に於ける水の動粘性係数

(117), (118) 式より河床の粒子が將に浮き上らんとする 限界の鉛直上向き變動速度  $v_{zg}'$  を求めうる。故に (104) 式或は (110) 式により求めたる  $|v_z'|$  の値が (117), (118) 式より求めたる  $v_{zg}'$  の値より大なる時は、河床の粒子

は渦流中に浮き上る。而して(104)式及び(110)式は共に右邊に測定が面倒なる項を含むを以て實用になり難いので、實際の計算には後述の(135)式を用ふるのが便利である。斯様にして床面から浮き上つた粒子は、その一部は下向きの運動量の輸送により再び床面に押しやられるが、残りの粒子は上方或は左右の層に輸送され、又その點で同様の輸送運動を反復して擴散して行く。従つて粒子の出発點たる床面附近は浮游粒子の量が最大にして床面から遠ざかるにつれて漸次粒子の量は減少して行く。

## 第6章 渦流中に於ける微小粒子の浮游

### 第1節 膠質粒子の浮游及び沈澱<sup>40), 41)</sup>

膠質學に於ては直徑が $0.1\mu\sim 1\mu\mu$ (ミリミクロン)の粒子を總稱して膠質粒子と言つてゐる。斯る膠質粒子の浮游及び沈澱の機構は、それより大なる、普通の土、砂、礫の粒子のそれとは全然趣を異にしてゐる。その主なる相違を挙げれば次の如くである。

- (1) 膠質粒子は、渦亂運動或は流れが全然なくとも水中に浮游して存在する。即ち全くの靜水中に於ても浮游してゐる。
- (2) 膠質粒子は絶えずブラウン運動をなし、且正或は負の電氣を帯びてゐて、之等が粒子の安定に重要な關係をもつてゐる。
- (3) 凝結<sup>42)</sup>が起らなければ決して沈澱しない。即ち膠質粒子と膠質粒子或は他の粒子とが衝突して結合しなければ沈澱しない。

自然河川或は水路の流れの中に膠質粒子として存在する土砂の粒子には種々あるが、之等は無機性膠質粒子と有機性膠質粒子とに大別出来る。此の兩粒子は化學的組成に於てのみならず膠質學的性質に於ても相異つてゐる。無機性膠質は大體粘土にして、有機性膠質は腐植土である<sup>41)</sup>。而して粘土の如きものは、水の中に土の粒子がそのままの状態で浮んでゐて、水と粒子との親和力が弱い、所謂疎水膠質(Hydrophobic colloid)である。斯る粒子は水中で一般に負の電氣を帯びてゐるために、その周圍に正のイオンを吸着せんとする傾向がある。それ故、鹽等を入れるとその $\text{Na}^+$  ionを凝結し、粒徑を増して容易に沈澱する。然るに腐植土が混じてゐる如き水は乳狀液に屬してゐて、粒子と水との親和力が強い親水膠質(Hydrophilic colloid)である。親水膠質も又負の電氣を帯びてゐるが、その周圍に厚い水の膜を冠ぶり、水化物となつてゐるために、電解質に對して餘り鋭敏でない。それ故鹽等の相當濃厚な溶液を加へなければ凝結を起さない。言ひ換へれば、親水膠質液は疎水膠質液に比して遙かに安定である。然し之に脱水性の他の液體を加へるか、又は多量の電解質を加へると脱水して、親水膠質粒子を蔽つてゐる水の皮膜を取去る。主として此の脱水作用によつて親水膠質は凝結を起すと言はれてゐる。従つて多量の鹽類を加へると凝結を起し沈澱する。此の現象を鹽析(Aussalzen)と呼ばれてゐる。

以上の如き膠質粒子の性質より、自然河川の流れの中に含まれてゐる膠質粒子の中で、一般に疎水性である粘土粒子は、河口附近に於て僅かの鹽に接すると容易にその鹽中の $\text{Na}^+$  ionを凝結し、粒徑を増して沈澱堆積する。然し一般に親水性である腐植土の粒子は相當多量の鹽に接しなければ凝結を起し難いから、河口の下流部で、河水に對して相當多量の海水が含まれ、鹽分濃度が大なる處に至つて凝結沈澱するものと考へられる。何れにし

40) 鮫島實三郎：膠質學，上下卷

41) J. Alexander: Colloid Chemistry, Vol. III., p. 559~567.

42) 凝析とも言ふ。(Koagulation)

ても、河流が海に注ぐまでに、河流中に含まれる膠質粒子の多くは河床に沈澱堆積するであらうと考へられる。大河川の河口に於て、上流から運ばれて來た非常に微細なる土壤が沈澱堆積し、肥沃なる三角洲を形成するのは、斯る鹽析によつて河流中の膠質粒子が沈澱堆積するためであらうと考へられる。

第 2 節 砂粒の浮游

膠質粒子より大なる土砂粒子の渦流中に於ける浮游に就て考へる。渦流中に粒徑  $d$ 、比重  $\gamma_s (> 1)$  が浮游した場合に、土砂粒子に働く重力が渦流の抵抗より大なれば土砂粒子は沈降する。而してその沈降速度は粒子が沈降するにつれて次第に増大し、之と同時に粒子に働く抵抗も増加するを以て、沈降速度が或る値に達すると、粒子に働く重力と渦流の抵抗力とが釣合ふに至り、その後は一定の速度を以て沈降する。この速度を渦流に於ける限界沈降速度と名附ける。此の値は粒子の直徑、比重、形狀、渦亂の程度等により異なる。今粒子を球形とし、限界沈降速度を  $u_0$  とすれば次式が成り立つ。

$$(\gamma_s - 1)u_0 \cdot \frac{\pi}{6} d^3 = \xi \rho \frac{\pi}{4} d^2 u_0^2 \dots \dots \dots (119)$$

式中の係數  $\xi$  は近似的に靜水中に於けるものと同一にとる。(119) 式より、比重  $\gamma_s \leq \sim 3$  で粒徑  $d = 0.1 \mu \sim 3 \text{ mm}$  位の粒子に對しては限界沈降速度  $u_0$  は非常に小さく、渦亂運動をなす水の小塊の速度に匹敵する大さとなる。而して  $u_0$  が鉛直方向の變動速度  $|\overline{v_z}|$  より小なる時は、粒子は渦流中を渦亂運動をなし乍ら浮游することが考へられる。而して  $|\overline{v_z}|$  の鉛直分布は第 7 章第 2 節に於て詳述する如く、一般には床面に於て最大にして水面に近附くに從つて減少するから、一度河床を離れた粒子は漸次上昇して、 $|\overline{v_z}| = u_0$  となりたる點で上昇を中止し、それ以後は渦亂運動をなしつゝ主流の方向に流下する。而して下流に至り、渦流の流速が減少し、從つて  $|\overline{v_z}|$  が減少して  $|\overline{v_z}| < u_0$  となるに及んで沈降するに至る。

以上の如く考ふれば、1 度河床を離れて渦流中に浮游した粒子は、 $|\overline{v_z}|$  が一定なる區間は沈澱しないと云ふことになる。然し實在の流に於ては、假令等速流であつても、斷面の不規則、障碍物等のために、流速及びその鉛直分布は場所により多少變化し、從つて  $d\overline{v_z}/dz$  が變化するから、 $|\overline{v_z}|$  も又場所により多少變化する。それ故、等速流の區間に於ても、局部的に  $|\overline{v_z}|$  の大なる點では比較的大なる粒子が浮游し、それ等は  $|\overline{v_z}|$  の小なる點で沈澱する。從つて  $|\overline{v_z}|$  に對して  $u_0$  の比較的大なる粒子は浮游と沈澱とを繰返し乍ら流下すると考へられる。

第 7 章 渦流に於ける變動速度

第 1 節 渦粘性係數

渦流中に於ける見掛けの剪斷應力  $\tau$  は一般に次式で表はされる。

$$\tau = -\overline{\rho v_x' v_z'} = \rho \mu \frac{d\overline{v_x}}{dz} \dots \dots \dots (120)$$

茲に  $\mu$  は整流(層流)に於ける剪斷應力式  $\tau = \rho \nu \frac{dv}{dz}$  の動粘性係數  $\nu$  に相當するものにして、之を渦粘性係數<sup>21)</sup>と稱し、 $[L^2 T^{-1}]$  なる dimension を有することは既に第 1 編第 2 章に於て述べた如くである。

渦亂運動をなしてゐる 2 次元的流に於ける運動の方程式は次の如くなる。

$$\rho \frac{d\overline{v_x}}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial \overline{v_x' v_z'}}{\partial z} \dots \dots \dots (121)$$

21) Austauschgrösse (Tollmien), turbulence strength (Durand, Prandtl) 等と稱してゐる

式中  $X$  = 外力の  $x$  軸方向の加速度

今等速定流の場合のみを考ふれば

$$\frac{d\bar{v}_x}{dt} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \rho X + \eta \frac{d^2 \bar{v}_x}{dz^2} - \rho \frac{d(\overline{v_x' v_z'})}{dz} = 0 \dots \dots \dots (122)$$

今水面勾配 (= 床面勾配) を  $I$  とすれば,  $X = gI$  であるから

$$\eta \frac{d^2 \bar{v}_x}{dz^2} - \rho \frac{d(\overline{v_x' v_z'})}{dz} = -\rho g I$$

$\eta/\rho = \nu$  (動粘性係数) であるから

$$\frac{d}{dz} \left( \nu \frac{d\bar{v}_x}{dz} - \overline{v_x' v_z'} \right) = -g I$$

$$\therefore \frac{d}{dz} \left( \mu_0 \frac{d\bar{v}_x}{dz} \right) = -g I \dots \dots \dots (123)$$

但し

$$\mu_0 = - \frac{\overline{v_x' v_z'}}{\frac{d\bar{v}_x}{dz}} + \nu \dots \dots \dots (124)$$

(123) 式を積分すると

$$\mu_0 \frac{d\bar{v}_x}{dz} = -g I z + C$$

$z = Z$  にて  $\bar{v}_x = \bar{v}_{max}$  とすれば,  $\frac{d\bar{v}_x}{dz} = 0$  であるから

$$C = g I Z$$

$$\therefore \mu_0 \frac{d\bar{v}_x}{dz} = (Z - z) g I$$

$$\therefore \mu_0 = \frac{Z - z}{\frac{d\bar{v}_x}{dz}} g I \dots \dots \dots (125)$$

(124) 式の右邊第 1 項は渦粘性係数  $\mu$  を表はし, 第 2 項は動粘性係数である。而して  $\nu$  の値は一定の温度に於ては一定にして, 第 9 章第 1 節に於て述ぶる如く  $\mu$  の値に比して遙かに微小にして, 之を無視してもその誤差は約 2% 以下に過ぎない。流れが自然河川に於けるが如く大なる場合には, 一般に  $\nu$  は  $\mu$  の數萬分の一の程度<sup>43)</sup>に過ぎない。それ故, 一般に (124) 式に於て  $\nu$  を無視し

$$\mu_0 = - \frac{\overline{v_x' v_z'}}{\frac{d\bar{v}_x}{dz}} = \mu \dots \dots \dots (126)$$

とをくも實際上差支ないと考へられる。故に (125) 式より

$$\mu = \frac{Z - z}{\frac{d\bar{v}_x}{dz}} g I \dots \dots \dots (127)$$

43) 東中秀雄: 「揚子江の流速の垂直分布と渦粘性係数に就て」, 上海自然科學研究所, 彙報第 4 卷, 1934 年 12 月



となる。(127) 式の右邊は水面勾配と流速の鉛直分布を測定すれば求まるから、各水深  $z$  (河床から測る) に於ける渦粘性係数  $\mu$  の値を知り得る。

第 2 節 鉛直變動速度

渦粘性係数と鉛直變動速度との間には次式の關係がある。

$$\mu = |v_z'| l \dots\dots\dots (128)$$

又 (107) と (120) 式より

表-8. 鉛直變動速度及渦亂度  
(流速分布-I,  $gI=1.3426$  [cm/sec<sup>2</sup>])

水 深 $z$ [cm]	實測流速 $\bar{v}_x$ [cm/sec]	$ v_z' $ [cm/sec]	$ v_z' /\bar{v}_x$ [%]
8.7	46.46*	1.55	(3.3)
8.0	46.46	1.16	2.5
7.0	47.00		
6.0	46.46	1.16	2.5
5.0	45.00	1.64	3.7
4.0	43.21	2.01	4.7
3.0	36.60	2.32	6.3
2.0	35.90	2.59	7.2
1.0	34.12	2.84	8.3
0.2	28.18	3.02	10.7
0	25.4*	2.07	(12.1)
平均 $\epsilon_m = 5.7$			

\* は推定値

表-9. 鉛直變動速度及渦亂度  
(流速分布-II,  $gI=1.3426$  [cm/sec<sup>2</sup>])

水 深 $z$ [cm]	實測流速 $\bar{v}_x$ [cm/sec]	$ v_z' $ [cm/sec]	$ v_z' /\bar{v}_x$ [%]
7.5	47.75*	0.97	(2.0)
6.8	47.75		
5.8	46.70	1.16	2.5
4.8	42.54	1.64	3.9
3.8	39.20	2.01	5.1
2.8	37.60	2.32	6.2
1.8	34.83	2.59	7.5
0.8	34.50	2.84	8.3
0	28.00	3.02	(10.8)
平均 $\epsilon_m = 5.6$			

表-10. 鉛直變動速度及渦亂度  
(流速分布-III,  $gI=0.637$  [cm/sec<sup>2</sup>])

水 深 $z$ [cm]	實測流速 $\bar{v}_x$ [cm/sec]	$ v_z' $ [cm/sec]	$ v_z' /\bar{v}_x$ [%]
6.4	38.55*	0.76	(2.0)
5.5	38.55		
4.5	38.09	0.80	2.1
3.5	37.76	1.13	3.0
2.5	37.44	1.38	3.7
1.5	36.46	1.60	4.4
0.5	32.89	1.78	5.4
0.1	30.97	1.86	6.0
0	30.5*	1.87	(6.1)
平均 $\epsilon_m = 4.1$			

表-11. 鉛直變動速度及渦亂度  
(流速分布-IV,  $gI=0.5096$  [cm/sec<sup>2</sup>])

水 深 $z$ [cm]	實測流速 $\bar{v}_x$ [cm/sec]	$ v_z' $ [cm/sec]	$ v_z' /\bar{v}_x$ [%]
10.25	40.13*	1.13	(2.8)
9.75	40.13	1.01	2.5
7.75	41.05		
5.75	40.74	1.01	2.5
3.75	40.13	1.43	3.6
1.75	37.25	1.75	4.7
0.25	30.68	1.95	6.4
0	29.0*	1.99	(6.9)
平均 $\epsilon_m = 4.0$			

表-12. 鉛直変動速度及び渦亂度  
(流速分布-V,  $gI=0.80066$  [cm/sec<sup>2</sup>])

水深 $z$ [cm]	實測流速 $\bar{v}_x$ [cm/sec]	$ v_z' $ [cm/sec]	$ v_z' /\bar{v}_x$ [%]
13.3	43.51*	1.20	(2.8)
12.5	43.51	0.90	2.1
11.5	44.63		
10.5	44.10	0.90	2.0
8.5	44.02		
6.5	44.10	2.00	4.5
4.5	43.51	2.37	5.5
2.5	40.29	2.68	6.6
0.5	32.12	2.97	9.3
0	23.26*	3.03	(13.0)

平均  $\epsilon_m = 5.0$

圖-13. 鉛直変動速度及び渦亂度の分布  
(流速分布 I)

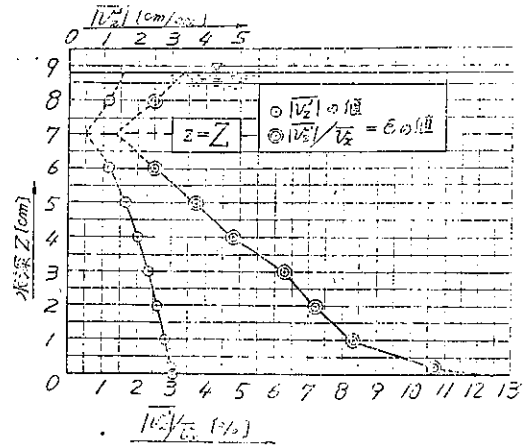


圖-14. 鉛直変動速度及び渦亂度の分布  
(流速分布 II)

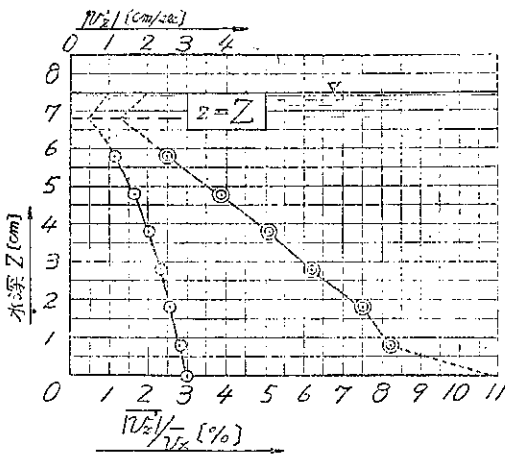
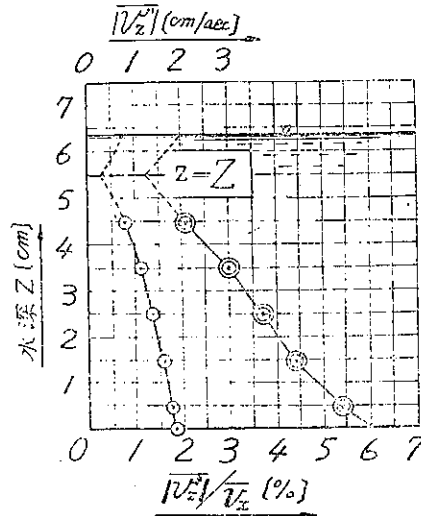


圖-15. 鉛直変動速度及び渦亂度の分布  
(流速分布 III)



$$\mu = l^3 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dz} \right| \dots\dots\dots (129)$$

(128), (129) 式より  $l$  を消去すると

$$|v_z'| = \sqrt{\mu \frac{d\bar{v}_x}{dz}} \dots\dots\dots (130)$$

上式に (127) 式を入れると

$$|v_z'| = \sqrt{|Z-z|gI} \dots\dots\dots (131)$$

圖-16. 鉛直變動速度及び渦亂度の分布  
(流速分布 IV)

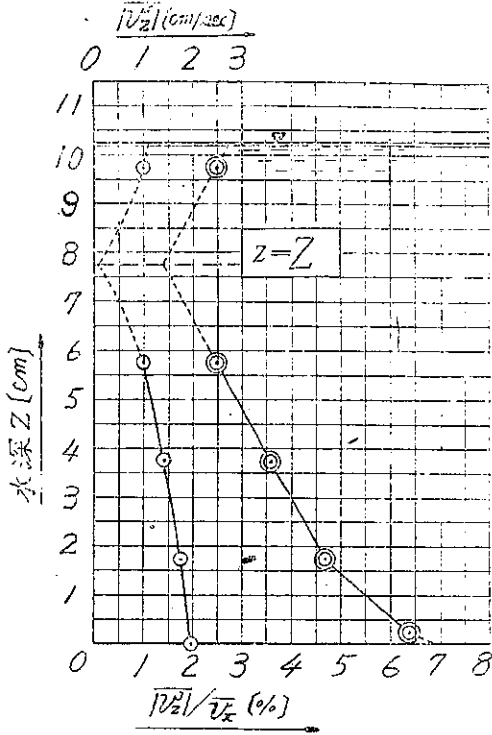
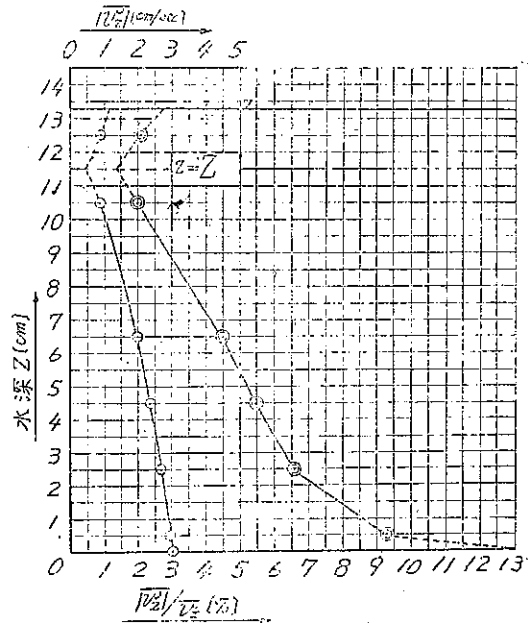


圖-17. 鉛直變動速度及び渦亂度の分布  
(流速分布 V)



を得る。(131) 式は各水深  $z$  に於ける鉛直方向の變動速度を表す。此の式によれば、 $\overline{|v_z'|}$  の値は床面に向ふに従つて拋物線的に増大し、床面に於て最大になることが知られる。但し  $z=Z$ 、即ち  $\bar{v}_x = \bar{v}_{max}$  なる點に於ては (131) 式は成立しない。然し  $z=Z$  附近に於て  $\overline{|v_z'|}$  が最も小さくなることは考へられる。著者が實驗したる遼河河床砂水路及び松花江河床砂水路に於ける 5 種の流れに就て、(131) 式より  $\overline{|v_z'|}$  の分布を求めたるに表 8~12 の如くである。又之等を圖示すれば圖-13~17 の如くである。

若し流速が緩かにして床面に接して整流の限界層が存する場合には、その層内では  $\overline{|v_z'|} = 0$  であるから、(131) 式はその限界層の内側及びその附近では適用出来ない。この場合には、 $\overline{|v_z'|}$  の最大値は水深の中點と床面との間に存し、その點より下部は急激に減少して床面に於て零になる。Kalinske<sup>44)</sup> は斯る場合に於ける  $\overline{|v_z'|}$  の鉛直分布を實驗によつて測定してゐる。

然し渦亂が激しくて、床面に接した限界層内まで十分に渦流が發達した場合には、(131) 式より床面に於て  $\overline{|v_z'|}$  は最大にして

$$\overline{|v_z'|} = \sqrt{gZI} \dots\dots\dots (132)$$

となる。今  $g = 980 \text{ cm}^2/\text{sec}$  を入れると

$$\overline{|v_z'|} = 31.3\sqrt{ZI} \quad [\text{cm}/\text{sec}] \dots\dots\dots (133)$$

44) A. Kalinske & J. Robertson: "Turbulence in Open Channel Flow," E. N. R., April 10, 1941, p. 53~54.

となる。 $z=Z$ , 即ち  $\bar{v}_x = \bar{v}_{max}$  なる点の位置は, 水深, 流速, 断面の形状, 風向, 風速等により異なるが, 従来行はれた多数の實驗及び實測の結果によれば,

$$Z = (1 - 0.8)H, \quad H: \text{水深} \dots\dots\dots (134)$$

である。幅に比して水深が小なる流れに於ては  $Z/H$  は 1 に近く, 幅に比して水深が大なる流れに於ては  $Z/H$  は最も小さくして大體 0.8 位である。(134) 式を (133) 式に入ると

$$|\overline{v_z'}| = (31.3 - 28) \sqrt{HI} \quad [\text{cm/sec}] \dots\dots\dots (135)$$

となる。茲に導きたる (134) 式及び (135) 式は平滑なる水路の渦流に於ける鉛直方向の變動速度を表はすものである。従つて斯る場合の  $v_z'$  の値は, 水面勾配 (=床面勾配) と水深とを測定すれば (135) 式より容易に算出し得る。斯くして求めた  $|\overline{v_z'}|$  の値が, (117) 式或は (118) 式より求めた  $v_{z0}'$  の値より大ならば, 床面の粒子は浮游することになる。然し實際の河川或は水路の床面には, 砂澱その他大小の凹凸があつて渦動運動を激成するから, 床面に於ける實際の鉛直變動速度は (134) 式或は (135) 式の値より大であると思はれる。特に床面の凹凸が著しい場合, 流れの中に障礙物の存在する場合, 或は彎曲流の場合等には, 大なる渦亂を生ずるから, 鉛直變動速度は (134) 式或は (135) 式の値より遙かに大となる。それ故, 實際の河川に於ては上記の理論によつては考へられないやうな大なる粒子が流れの中に浮き上つて流れるのである。副流による河床粒子の浮游も斯る局部的に渦亂の激成される一つの場合と考へられる。而してかゝる局部的な渦亂の激成によつて浮き上つた大粒子は, 多くの場合, 長く渦流中に浮游して存することは出来ずして間もなく沈澱する。

第 3 節 水路幅方向の分布

$|\overline{v_x'}|$  の水路幅方向 ( $y$  軸方向) の分布は, 流速の鉛直分布が幅全體に略々同様である如き断面に於ては, 側壁の極く近くを除けば, 水路全體に亙り大體同様である。然し實在の河川或は水路に於ては, 水路幅の中央部と側壁部とは流速が相當に異り, 一般に直流部に於ては, 幅の中央部が流速は最大であるから,  $|\overline{v_x'}|$  も中央部に於て最も大であり, 従つて浮游粒子の量も最も多いと考へられる。實際に自然河川の直流部では一般に河幅の中央附近で浮游土砂量は最大であるやうである (第 1 編, 圖-1 及び圖-11 参照)。又  $|\overline{v_x'}|$  の分布は  $|\overline{v_z'}|$  との相關性より  $|\overline{v_z'}|$  の分布と略々同様であらうと考へられる。

今迄は  $xz$  面に於ける 2 次元な流れを考へて來たのであるが, 實際の流れに於ては水路幅方向の變動速度  $v_y'$  が存在する。周壁に近い限界層附近に於ては渦亂は等方性でないから  $\overline{(v_x')^2} \neq \overline{(v_y')^2}$  にして, 恐らく  $\overline{(v_x')^2}$  が  $\overline{(v_y')^2}$  より相當大であらうが, 周壁から遠ざかるにつれて渦亂は次第に等方性となり  $\overline{(v_x')^2} = \overline{(v_y')^2}$  となる。更に水面に近くなると渦亂は再び等方性を失ひ, 今度は恐らく  $\overline{(v_y')^2}$  が  $\overline{(v_x')^2}$  より大になるであらうと考へられる。Kalinske<sup>44)</sup> は水面附近に於ける  $z$  及び  $y$  軸方向の渦亂の擴散係數  $D$  を實驗的に求めてゐるが, 水面に近くなると  $D_y$  が最大となり, 而も  $D_{ymax}$  は  $D_{zmax}$  より大である。此の結果によれば, 水面附近では  $\overline{(v_y')^2}$  は  $\overline{(v_x')^2}$  より大にして, 浮游粒子は上下方向よりも寧ろ幅方向に強く擴散されることが考へられる。實際に自然河川に於ては, 水面附近に於ける浮游土砂粒の幅方向の分布は大體同様であるやうである (第 1 編, 圖-11 参照)。

第 4 節 渦亂の程度

渦流に於ては速度は時々刻々變化してゐる。然しその變動速度は或る時間平均すれば零であるから, 我々が渦流中の一點に於て普通にピトー管で測定するのは, 或る時間の平均速度  $\bar{v}_x$  である<sup>45)</sup>。而して渦流に於ける渦亂

45) 嚴密に言へばピトー管で測定するのは  $\frac{(\bar{v}_x + v_x')^2}{2g} = h$  の平均値であるが, 一般に  $v_x'/\bar{v}_x$  が 5% 前後或はそれ以下にして,  $\bar{v}_x^2/2g$  の平均値との差は略 0.15% 位に過ぎないから無視し得る。

(渦動及び擾亂)の程度を表はすものは變動速度  $v_x', v_z'$  及び  $v_y'$  であるが、之等の速度の時間的平均は零になるから、或る點に於ける或る時間の平均の渦亂の大きさを表はすには、例へば  $z$  軸方向に就ては、 $\overline{|v_z'|}$  或は  $\sqrt{(\overline{v_z'^2})}$  なる値を用ひなければならない。(131) 式より求めた  $\overline{|v_z'|}$  は各水深に於ける渦亂の平均の大きさを表はす(表-8~12 参照)。次に此の渦亂の大きさがその點に於ける平均の速度  $v_x$  の大きさと如何なる割合にあるかを見るために、各點に於て  $\overline{|v_z'|}/\overline{v_x} = \epsilon$  なる値を求めた。その結果は表-8~12 に於ける第4欄の如くである。此の  $\epsilon$  の値は渦亂の度合(或は渦亂度)を表はすものである。

今表-8~12 に於ける  $\epsilon$  の値を圖示すれば圖-13~17 の如くである。之等の圖によれば、 $\epsilon$  は床面に向つて略直線的に増大し、床面附近で急に増してゐる。床面に於ける  $\epsilon$  の値  $\epsilon_b$  は、床面の砂礫が移動を開始した時(表-10, 11, 圖-15, 16), 即ち渦亂の小なる時は、 $\epsilon_b = 6.1 \sim 6.9\%$ 、又水面から水底までの平均の  $\epsilon$  の値は  $\epsilon_m = 4.0 \sim 4.1\%$  にして小さく、床面に不規則なる魚鱗形砂澱が出來た時(表-8, 9, 12, 圖-13, 14, 17), 即ち渦亂の激しい時は、 $\epsilon_b = 10.8 \sim 13\%$ 、 $\epsilon_m = 5.0 \sim 5.7\%$  にして大である。以上より、砂礫が浮き上る時の床面に於ける  $\epsilon$  の値は大體  $\epsilon_b \approx 7 \sim 13\%$  であらうと考へられる。而して砂礫粒が小さい時は床面の凹凸も小さく、又砂澱の大きさも一般に小さいから、床面附近の渦亂も小さくして  $\epsilon_b$  も従つて小さいと考へられ、反對に砂礫粒が大きい時は、砂礫及び砂澱による凹凸が大きいため  $\epsilon_b$  も大きくなると考へられる。今試みに遼河々床砂の  $d_m = 0.125 \text{ mm}$ 、 $\gamma_s = 2.65$  に就て考ふるに、その限界沈降速度は(117) 式及び(118) 式より、 $v_{sg}' = 1.87 \text{ cm/sec}$  である。此の砂は非常に微細であるから  $\epsilon_b$  の値は小さいと考へられるを以て、 $\epsilon_b = \overline{|v_z'|}/\overline{v_b} = 7\%$  であるとする、 $\overline{v_b} = 26.7 \text{ cm/sec}$ 。實驗及び實測の結果によると、底流速と断面の平均流速  $\overline{v_m}$  との比は略々  $0.70 \sim 0.80$  であるから平均して  $\overline{v_b}/\overline{v_m} \approx 0.75$  にとれば、 $\overline{v_m} \approx 36 \text{ cm/sec}$  となる。遼河々床砂水路に於ける多數の實驗結果によれば、 $\overline{v_m} \approx 40 \text{ cm/sec}$  位になると床面砂粒は激しく浮游した。又松花江河床砂の  $d_m = 0.318 \text{ mm}$ 、 $\gamma_s = 2.61$  に就ては、 $v_{sg}' = 5.38 \text{ cm/sec}$  にして、 $\epsilon_b = 12\%$  にとれば、 $\overline{v_b} \approx 45 \text{ cm/sec}$  にして、 $\overline{v_m} \approx 60 \text{ cm/sec}$  となる。松花江河床砂水路に於ては使用流量の都合で  $\overline{v_m} = 60 \text{ cm/sec}$  まで流速を大きくすることは出来なかつたが、之位の流速になれば、流動砂礫の殆んど大部分が浮游するであらうと思はれる。

次に  $\overline{|v_x'|}$  の値は  $\overline{|v_z'|}$  の値より稍大であらうと考へられるから、 $\epsilon$  の値より  $\overline{|v_x'|}/\overline{v_x}$  の値も平均して略々  $4 \sim 6\%$  位であらうと推定される。而して此の値は Burgers<sup>46)</sup> が空気の渦流に就て測つた  $\overline{|v_x'|}/\overline{v_x} < 5\%$  なる値と略類似してゐる。

## 第8章 渦亂による擴散

### 第1節 微粒子の擴散式

分子の熱運動に基く擴散と同様の現象が渦流の場合にも存する。今時刻  $t=0$  の時に  $x=0$  に集積されてゐた水の小塊が  $t$  時間の後に距離  $x$  だけ移動したとし、その時に於ける水分子の  $z$  方向に於ける變位を  $Z$  とすると

$$\frac{dZ^2}{dt} = 2Z \frac{dZ}{dt} = 2Z \overline{v_z'} = 2v_z' \int_0^x v_z' dt \dots\dots\dots (136)$$

今變動速度の自乗平均  $\overline{(v_z')^2}$  が時間的に一定であると假定し、 $x=0$  に於ける鉛直變動速度  $v_b'$  とその點から  $x$  離れた點に於ける變動速度  $v_x'$  との相關係数を  $R_x$  とすると、(136) 式は

46) プラントル, ティーチエンス: 航空流體力學, 下巻, 42 頁

$$\frac{d\bar{Z}^2}{dt} = 2v'^2 \int_0^t R_{zz} dt \dots\dots\dots(137)$$

となる。茲に  $v' = v_z'$  にして、簡単のため今後はこの様に書くこととする。Taylor<sup>47)</sup> は  $R_{zz}$  を次の如く定義した。

$$R_{zz} = 1 - \frac{(v_z' - v_m')^2}{2v'^2} \dots\dots\dots(138)$$

等方性の渦亂に於ては  $v_z'^2 = v_m'^2 = v'^2$  であるから

$$R_{zz} = \frac{v_z' v_m'}{v'^2} \dots\dots\dots(139)$$

距離  $x$  が小さくて渦の平均径より小なる時は、 $v_z' = v_m'$  にして  $R_{zz} = 1$  となる。然し  $x$  が大きくして渦の平均径より大なる時は  $R_{zz}$  は零に近附く。此のことは實驗的にも正しいと言はれてゐる。今渦流の平均速度  $\bar{v}_x$  を變動速度と混動しないために  $V$  と書くと、 $t = x/V$  であるから、(137) 式は

$$\frac{d\bar{Z}^2}{dx} = \frac{2v'^2}{V^2} \int_0^x R_{zz} dx \dots\dots\dots(140)$$

となる。 $x$  が十分大きくして  $R_{zz} = 0$  となる如き場合には

$$\int_0^x R_{zz} dx = x_0 \text{ (一定)} \dots\dots\dots(141)$$

故に (140) 式は

$$\frac{d\bar{Z}^2}{dx} = \frac{2v'^2 x_0}{V^2} \dots\dots\dots(142)$$

となる。此の式は  $x$  が十分大なる場合に於ける水の小塊の擴散狀況を示すものにして、此の場合には擴散の變化は鉛直變動速度  $v'^2$  のみにより變じ、距離  $x$  には無關係である。

分子擴散の場合には、擴散係数を  $D$  とすると

$$\bar{Z}^2 = 2Dt \text{ 或は } D = \frac{V}{2} \frac{d\bar{Z}^2}{dx} \dots\dots\dots(143)$$

であるから、渦亂の擴散係数を  $D'$  とをくと (142) 式より

$$D' = \frac{v'^2 x_0}{V} \dots\dots\dots(144)$$

となる。又  $x$  が小さくて 2 個の水の小塊が渦の平均徑内にある時は

$$\int_0^x R_{zz} dx = x \dots\dots\dots(145)$$

であるから、(140) 式より

$$\frac{d\bar{Z}^2}{dx} = \frac{2v'^2}{V^2} x \dots\dots\dots(146)$$

之を積分して、 $x = 0$  にて  $Z = 0$  なる條件を入れると

$$\bar{Z}^2 = \frac{v'^2}{V^2} x^2 \dots\dots\dots(147)$$

47) G. I. Taylor: "Statistical Theory of Turbulence," Proc. Roy. Soc. London, Vol. 151 A. 1935, p. 421.

となる。Kalinske<sup>32)</sup> は小開水路の渦流中に微小粒子を投入し、その擴散狀況を調べ、(142) 及び (146) 式が實驗的にも正しいことを證明してゐる。従つて渦流中に浮游してゐる土砂の粒子は、河床から浮き上つた直後は (146) 式或は (147) 式の如き擴散をなし、その後は河床に沈澱堆積するまで (142) 式の如き擴散をなして浮游するものと考へられる。

第2節 擴散係數と渦粘性係數

渦流の擴散係數  $D'$  の dimension は  $[L^2T^{-1}]$  にして、動粘性係數  $\nu$  の dimension と同一である。それ故  $D'$  を見掛けの動粘性係數<sup>48)</sup> と言ふこともある。(144) 式より

$$D' = \frac{\alpha_0}{V} \overline{v'^2}$$

$\overline{v'^2} = 1.57 \overline{|v'|^2}$  であるから

$$D' = 1.57 \frac{\alpha_0}{V} \overline{|v'|^2} \dots\dots\dots (148)$$

又渦粘性係數  $\mu$  は (128) 式より

$$\mu = l \overline{|v_2'|} = l \overline{|v'|}$$

然るに (110) 式より  $l = \frac{dz}{dV} \overline{|v'|}$  なるを以て

$$\mu = \frac{dz}{dV} \overline{|v'|^2} \dots\dots\dots (149)$$

今  $D' = \mu$  とをけば (148), (149) 式より

$$\frac{dz}{dV} = 1.57 \frac{\alpha_0}{V}$$

之を積分して、 $z=Z$  にて  $V=V_{max}$  なる條件を入れると

$$z = 1.57 \alpha_0 \ln \frac{V}{V_{max}} + Z$$

$$\therefore V = V_{max} \cdot e^{-\frac{Z-z}{1.57\alpha_0}} \dots\dots\dots (150)$$

故に渦流の平均流速  $V(\overline{v_0})$  が (150) 式で表はされる如き對數曲線の分布をなす時は、渦流の擴散係數  $D'$  は渦粘性係數  $\mu$  に等しいとをいてよいと考へられる。

Kalinske<sup>44)</sup> は唯單に實驗を行つて、(120) 式より  $\mu$  を求め、(144) 式より  $D'$  を求めて、兩者の値を比較してゐるが、その結果によると、一般に  $\mu$  が  $D'$  より大なるも、その鉛直分布は略々同一にして、且上記の理論の如く流速  $V$  の分布が對數曲線に近い分布をなしてゐる時は  $D' \approx \mu$  となつてゐる。

第9章 渦流の速度分布

移動床水路或は河川に於ては、床面砂澱の大小、形狀、砂澱の移動及び浮游狀態等によつて、鉛直線に沿ふ流速の分布は多少變化し、砂澱の形狀が不規則なる程流速の分布も不規則である。而して移動床の渦流に於て固定床の渦流の場合と特に異なる點は、河床流速が比較的次にして、之と最大流速との比が大いことである。

第1節 渦粘性係數及び混合距離の鉛直分布

48) 谷 一郎: 應用流體力學, 122 頁

遼河々床砂水路及び松花江河床砂水路<sup>49)</sup>に於て測定したる流速の鉛直分布に基いて、(125)式より $\mu_0$ の値を求め、 $\mu_0 = \mu$ として混合距離 $l$ を次式より計算すれば表-13~17の如くである。

$$l = \sqrt{\frac{\mu}{\frac{dv_v}{dz}}} \dots \dots \dots (151)$$

表-13. 流速、渦粘性係数及び混合距離の分布

流速分布-I, 遼河々床砂水路  
 $I = 0.00137$ , 魚鱗形砂漣の谷

水深 $z$ [cm]	實測流速 $v$ [cm/sec]	計算流速 $v$ [cm/sec]	渦粘性係数 $\mu$ [cm <sup>2</sup> /sec]	混合距離 $l$ [cm]
8.7	46.46*	47.25		
8.0	46.46	47.23	4.23	3.64
7.0	47.00	46.71		
6.0	46.46	45.64	1.34	1.16
5.0	45.00	44.00	1.65	1.01
4.0	43.21	41.80	0.96	0.48
3.0	36.60	39.03	1.47	0.63
2.0	35.90	35.70	5.43	2.09
1.0	34.12	31.80	1.88	0.66
0.2	28.18	28.28	1.05	0.35
0	25.4*	27.35		
平均値			2.25	1.25

表-14. 流速、渦粘性係数及び混合距離の分布

流速分布-II, 遼河々床砂水路  
 $I = 0.00137$ , 魚鱗形砂漣の山

水深 $z$ [cm]	實測流速 $v$ [cm/sec]	計算流速 $v$ [cm/sec]	渦粘性係数 $\mu$ [cm <sup>2</sup> /sec]	混合距離 $l$ [cm]
7.5	47.75*	42.88		
6.8	47.75	42.64		
5.8	46.70	42.14	0.52	0.45
4.8	42.54	41.43	0.72	0.44
3.8	39.20	40.52	1.63	0.81
2.8	37.60	39.40	2.46	1.06
1.8	34.83	38.09	4.33	1.68
0.8	34.50	36.57	2.12	0.75
0	28.0*	35.21		
平均値			1.96	0.87

表-15. 流速、渦粘性係数及び混合距離の分布

流速分布-III, 松花江河床砂水路  
 $I = 0.000650$ , 微細砂粒のみ轉動  
 $P = 41.3 \text{ gr/m}^2$

水深 $z$ [cm]	實測流速 $v$ [cm/sec]	計算流速 $v$ [cm/sec]	渦粘性係数 $\mu$ [cm <sup>2</sup> /sec]	混合距離 $l$ [cm]
6.4	38.55*	38.07		
5.5	38.55	38.67		
4.5	38.09	38.79	1.59	2.00
3.5	37.76	38.27	3.92	3.48
2.5	37.44	37.10	2.94	2.13
1.5	36.46	36.00	1.12	0.70
0.5	32.80	32.84	0.81	0.45
0.1	30.97	31.68	0.72	0.39
0	30.5*	31.37		
平均値			1.85	1.53

表-16. 流速、渦粘性係数及び混合距離の分布

流速分布-IV, 松花江河床砂水路  
 $I = 0.000520$ , 床面砂礫全體的に移動開始,  
 $P = 53.4 \text{ gr/m}^2$

水深 $z$ [cm]	實測流速 $v$ [cm/sec]	計算流速 $v$ [cm/sec]	渦粘性係数 $\mu$ [cm <sup>2</sup> /sec]	混合距離 $l$ [cm]
10.25	40.13*	39.53		
9.75	40.13	40.20	2.77	2.74
7.75	41.05	41.76		
5.75	40.74	41.54	4.43	4.39
3.75	40.13	39.54	2.34	1.64
1.75	37.25	35.77	1.13	0.65
0.25	30.68	31.77	0.81	0.42
0	23.0*	31.01		
平均値			2.30	1.97

49) 永井: 「移動床を有する小水路及び自然河川に於ける新流速公式(前編)」, 土木學會誌, 第28卷第6號



表-17. 流速, 渦粘性係数及び混合距離の分布

流速分布-V, 松花江河床砂水路  
 $I=0.000817$ , 魚鱗形砂漣の谷

水深 $z$ [cm]	實測流速 $v$ [cm/sec]	計算流速 $v$ [cm/sec]	渦粘性係数 $\mu$ [cm <sup>2</sup> /sec]	混合距離 $l$ [cm]
13.3	43.51*	38.31		
12.5	43.51	41.37	1.29	1.44
11.5	44.63	44.50		
10.5	44.10	46.85	3.94	4.41
8.5	44.02	49.21		
6.5	44.10	48.47	31.28	15.62
4.5	43.51	44.61	5.89	2.47
2.5	40.29	37.63	2.53	0.94
0.5	32.12	27.55	1.29	0.44
0	23.26*	24.54		
平均値			7.70	4.22

圖-18. 渦粘性係数及び混合距離の分布

(流速分布-I)

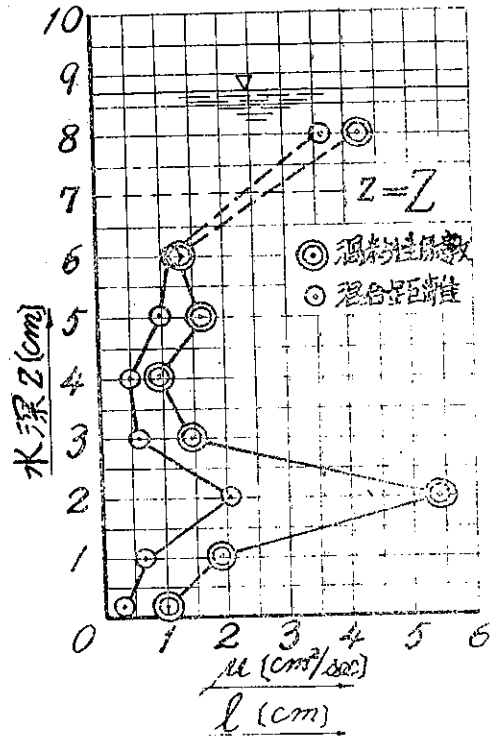


圖-19. 渦粘性係数及び混合距離の分布

(流速分布-II)

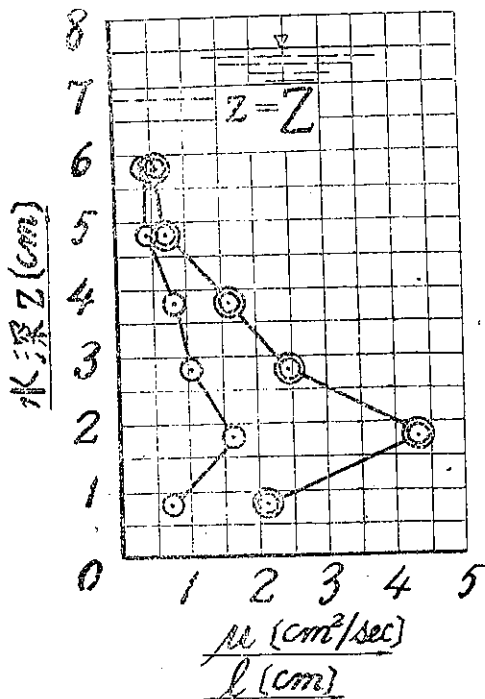


表-13~17 に依れば,  $\mu_0=0.52\sim31.28$  (cm<sup>2</sup>/sec) である。然るに分子粘性係数  $\eta$  は水の温度により異なるも, 温度  $T=15\sim25^\circ\text{C}$  に於ては  $\eta=0.0113\sim0.00894$  (gr/cm<sup>2</sup> sec) である。従つて  $\eta/\mu_0=0.029\sim2.2\%$  である。それ故  $\eta$  を無視して  $\mu_0=\mu$  (渦粘性係数) とをくもその誤差は最大 2.2% に過ぎない。今表-13~17 に於ける  $\mu$  及び  $l$  の分布を圖示すれば圖-18~22 の如くである。

之等の圖に依れば, 渦粘性係数及び混合距離の分布は極めて不規則にして,  $z$  の一つの函数として表はすことは出来ない。唯次のことだけは知られる。

- (a) 水面及び水底附近では  $\mu$  及び  $l$  共に小である。
- (b)  $\mu$  及び  $l$  は略、同一の分布をなす。
- (c)  $\mu$  及び  $l$  の最大値は水面と水底の略、中間に存する。

東中氏<sup>43</sup> は揚子江の流れに於ける  $\mu$  及び  $l$  の鉛直分布を求めて, 之と全く同様のことを報告されてゐる。

圖-23. 流速分布-I  
(魚鱗形砂澁の谷に於て)

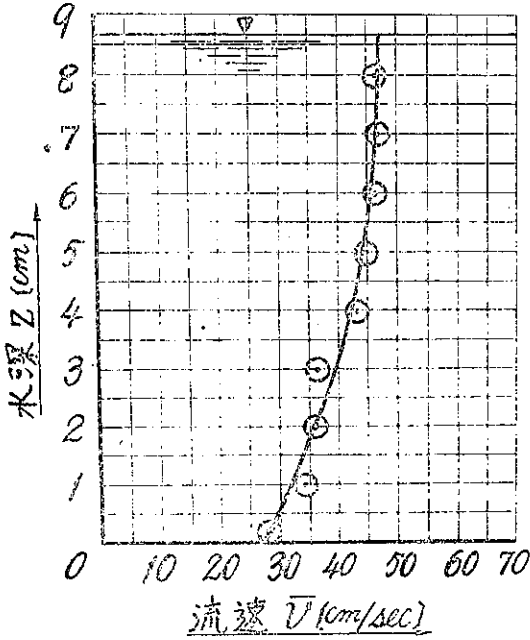


圖-24. 流速分布-II  
(魚鱗形砂澁の山に於て)

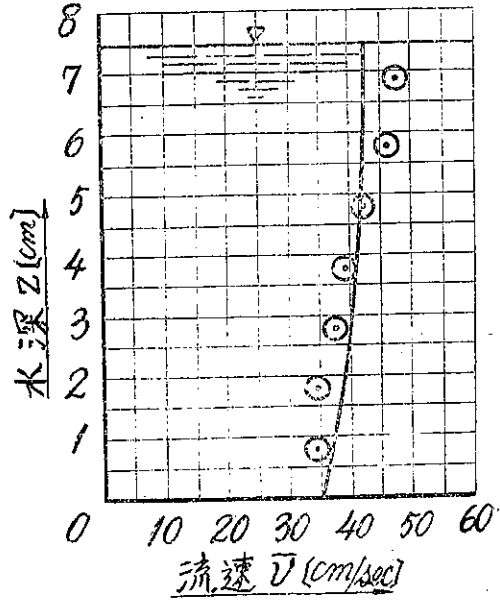


圖-25. 流速分布-III (微細砂粒のみ移動)

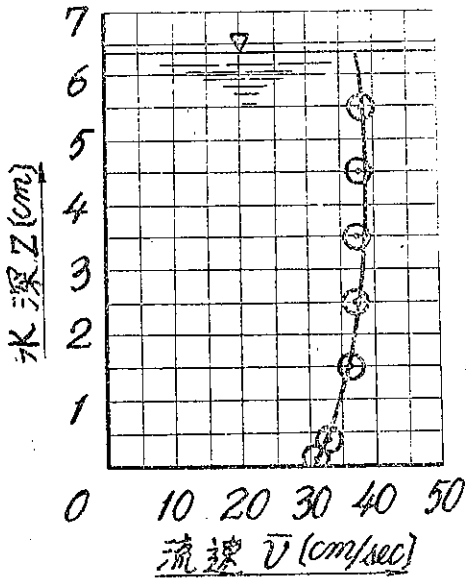
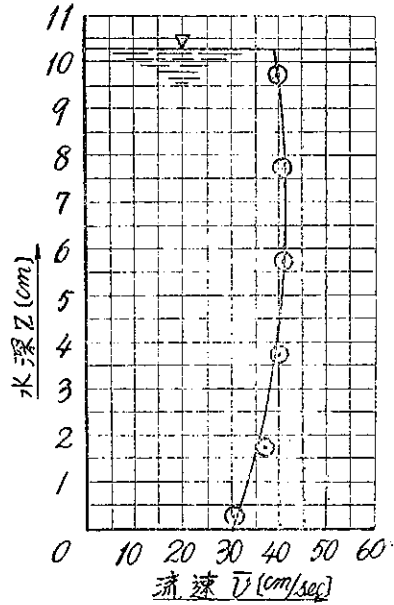


圖-26. 流速分布-IV (略限界掃流力時)



第 2 節 流速分布を對數曲線で表はす方法

従來管水路及び開水路に於ける渦流の鉛直線上の流速分布を求むるに當り、混合距離  $l = kz$  ( $k = \text{常數}$ ) とを以て  $\tau = -\rho \left( l \frac{d\bar{v}}{dz} \right)^2$  より  $\bar{v}$  の分布を求めるか、或は渦粘性係數  $\mu = 4\mu_{\max} \frac{z(H-z)}{H^2}$  と假定して  $\tau = -\rho\mu \frac{d\bar{v}}{dz}$  より  $\bar{v}$  の分布を求める方法が行はれてゐる。即ち Nikuradse<sup>50)</sup> は管水路の渦流に前者の方法を用ひて  $\bar{v}$  を  $z$  の對數曲線を以て表はし、平滑なる壁及び粗なる壁の何れの場合にも實驗値に良く合ふ分布式を誘導してゐる<sup>51)</sup>。又 Prandtl<sup>52)</sup> は管水路に於ける Nikuradse の式を開水路にも擴張適用出来るものとして同形の對數曲線式を提唱してゐる。但し兩氏共に  $z=0$  にて  $\bar{v}=0$  と假定してゐる。更に Krey<sup>53)</sup> は開水路の渦流に就て後者の方法により、 $z=0$  にて  $\bar{v}=0$  と假定して Prandtl と全く同形の對數曲線式を得てゐる。然るに開水路の渦流に於ては、圖-18 ~ 22 により明かな如く、一般に  $\mu$  及び  $l$  共に甚だ不規則にして  $z$  の一つの函數として表はすことは出来ない。即ち  $l$  を  $z$  の一次函數と假定することも、又  $\mu$  を  $z$  の二次函數と假定することも適當ではないと思はれる (但し平滑なる固定床開水路に於て  $\bar{v}$  が小なる場合には  $\mu$  は略  $z$  の二次函數で表はして差支ないやうである)。又移動床に於ては一般に床流速が零ならざるを以て、流速の鉛直分布を對數曲線で表はすことは不適當である (著者は第 1 編第 2 章第 3 節に於て、 $\mu$  を  $z$  の一次函數と假定して渦亂運動のみをなす水中に於ける流砂の鉛直分布式を誘導し、之が水路の渦流に於て測定した流砂の鉛直分布に良く類似してゐることを記したが、之は水路の渦流に於ける  $\mu$  が  $z$  の一次函數で表はされることを意味するものではない)。

第 3 節 流速分布を拋物線で表はす方法

上記の如く混合距離  $l$  及び渦粘性係數  $\mu$  の分布は極めて不規則にして  $z$  の一つの函數として表はし難い。それ故今  $\mu$  の平均値  $\mu_m$  をとり、 $\mu = \mu_m = \text{一定}$  として (123) 式より流速の鉛直分布式を導き、その式より計算した流速が實驗値に良く合へば、此の方法は  $\mu = f(z)$  とをく方法より有利である。東中氏<sup>13)</sup> は此の考へに基いて揚子江に於ける流速の垂直分布式を得てゐるが、比較的良く實驗値に合つてゐるから、此の場合にも同氏の方法を採用したる處、比較的良く實驗値に合ひ、此の方法の適當なることを知つた。

(123) 式に於て  $\mu = \mu_m = \text{一定}$  として兩邊を積分し、 $z=Z$  にて  $\bar{v} = \bar{v}_{\max}$ 、 $d\bar{v}/dz = 0$  なる條件を入れると

$$\bar{v} = \bar{v}_{\max} - \frac{gI}{2\mu_m} (Z-z)^2 \dots \dots \dots (152)$$

$z=Z$  にて  $\mu = \mu_m + \delta\mu = \text{一定}$  として速度を求むれば

$$\delta v = \frac{gI(Z-z)^2}{2} \frac{\delta\mu}{\mu_m\mu} \dots \dots \dots (153)$$

(153) 式より誤差  $\delta v/\bar{v}$  の値は床面附近に於て最大となることが知られる。實驗値に就て  $\delta v/\bar{v}$  の値を求めて見たるに、床面附近に於ては相當大となるも、それ以外の點では一般に僅少であつた。それ故流速の鉛直分布を  $z$  の 2 次式で表はして實用上差支ないと考へられた。然し (152) 式中には  $\mu_m$  の如きその値を求むるに稍面當なるものを含むを以て、此の式をその儘用ふることは適當でないので、次式の如き拋物線式に變形した。

50) Nikuradse, J.: "Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in Glatten Rohren." V. D. I.-Forsch., 1932, Heft 356. "Strömungsgesetze in rauen Rohren." V. D. I.-Forsch., 1933, Heft 361.

51) 著者: 「管水路及び開水路内に於ける渦流の速度分布」, 土木工學, 第 3 卷第 9 號及び第 12 號

52) Prandtl, L.: "Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung." V. D. I., Feb. 4, 1933.

53) Krey, H.: "Quer-Geschwindigkeitskurve bei turbulenter Strömung," Z. A. M. M., Bd. 7, 1927., S. 107~113.

$$v = as^2 + bs + c \dots\dots\dots (154)$$

式中の常數  $a, b$  及び  $c$  は各場合に就て最小自乗法により定める。今表-13~17 に示した 5 種の實驗値に就て  $a, b$  及び  $c$  の値を計算したるに次の如くであつた。

- |         |                                     |                         |
|---------|-------------------------------------|-------------------------|
| ( I )   | $v = -0.282 s^2 + 4.741 s + 27.345$ | } \dots\dots\dots (155) |
| ( II )  | $v = -0.101 s^2 + 1.781 s + 35.207$ |                         |
| ( III ) | $v = -0.321 s^2 + 3.093 s + 31.373$ |                         |
| ( IV )  | $v = -0.222 s^2 + 3.107 s + 31.010$ |                         |
| ( V )   | $v = -0.389 s^2 + 6.209 s + 24.543$ |                         |

之等の式により計算した流速と實測流速とを比較したるに表-13~17 の第 2 及び 3 欄の如くにして、之等を圖示すれば圖-23~27 の如くである。之等の表及び圖によれば、(155) 式による計算値は實驗値に良く合つてゐる。又東中氏<sup>(4)</sup>も揚子江に於ける流速の鉛直分布が (154) 式で表はし得たことを報告してゐるから、一般に流速の鉛直分布は (154) 式で表すのが適當であらうと考へられる。

(昭. 18. 6. 1. 受付)

—(未完)—

圖-27. 流速分布-V (魚鱗形砂連の谷に於て)

