論 說 報 告

第29卷第8號　昭和18年8月

砂の組成偏差に對する數學的考察

正會員　最　上　武　雄*

内容梗概　砂の組成を篩分析で調べると，全體としての組成は分るが，之れと各部分の組成とは異り得る。其原因は，色々考へられるが，此處には，純數學的に調べられるものについてのみ考へた。其結果は，此原因に依る偏差は，概して，比較的小さいが，場合に依ると可成りに大きい事もあり得る樣である。

筆者の計算例では，最も大きなもので2割見當であつた。尤も，此樣な偏差の生じる確率は非常に小さい。

目　　次

第1章　緒　　言

運動學的に砂の力學を考へ樣とする場合に，砂粒の組成が均一な場合には，或程度迄考へが進められたが，砂粒の大さが均一でない場合になると，其困難さは比較にならない程大きくなる。例へば，篩分析を行つて，組成を知つたにしても，平均の組成を知る事が出來るのみで，各部分の組成が，どの樣になつてゐるかを知る事は，中々困難である。

各部分の組成を決定する因子は，篩分析に依つて知り得る全體としての組成の他に，砂粒の幾何學的性質，即ち大さ，形狀，並びに力學的性質に基づくものが入つて來る。故に，簡單に篩分析だけに依つて，組成を論ずる事は出來ないのである。又斯樣な考察からして，運動學的砂の力學と，組成の問題との深い關係が窺はれる譯である。

今此處で取扱つて見やうとするものは，各部分の組成を決定する因子の中，全體としての組成の影響と，其他の原因に依るものとが，假りに獨立であると考へられるとして，前者に依る各部分の組成分布と全體の組成との關係を，純理論的に論じて見やうと思ふのである。

斯樣にして，此因子に依る組成の偏差が，どの程度に生ずるかを知つておく事は，將來の爲め，意味のある事と考へてゐる。

第2章　生じ得る組成と偏差の確率

第1節　最も生じ易い組成

今全體の砂粒の數を N とし，篩分析に依つて，次の樣な砂粒より成る事が分つたとする。即ち

---

*東京帝國大學助教授

a_1 なる大さの粒：n_1 ケ

a_2 なる大さの粒：n_2 ケ

.. ..

a_m なる大さの粒：n_m ケ

當然の事ではあるが

$$n_1+n_2+\cdots+n_m=N \quad\cdots\cdots(1)$$

其全體の中の一部分を考へ，其處には，N_0 ケの砂粒があるとし，其組成が

a_1 なる大さの粒：n_1^0 ケ

a_2 なる大さの粒：n_2^0 ケ

.. ..

a_m なる大さの粒：n_m^0 ケ

$$n_1^0+n_2^0+\cdots\cdots+n_m^0=N_0 \quad\cdots\cdots(2)$$

となる爲めの確率を求めやう。

先づ，どんな組成になつても良いとして，N ケの粒から N_0 ケの粒を取出す仕方の數は

$$\frac{N!}{N_0!\,(N-N_0)!} \quad\cdots\cdots(3)$$

次ぎに

n_1 ケの粒から n_1^0 ケの粒を取出す仕方の數は ： $\dfrac{n_1!}{n_1^0!\,(n_1-n_1^0)!}$

n_2 ケの粒から n_2^0 ケの粒を取出す仕方の數は ： $\dfrac{n_2!}{n_2^0!\,(n_2-n_2^0)!}$

....

n_m ケの粒から n_m^0 ケの粒を取出す仕方の數は ： $\dfrac{n_m!}{n_m^0!(n_m-n_m^0)!}$

依つて，N ケの粒から $(n_1^0, n_2^0, \cdots\cdots, n_m^0)$ なる N_0 ケの粒を取出す仕方の數は

$$\frac{n_1!\,n_2!\cdots\cdots n_m!}{n_1^0!\,n_2^0!\cdots\cdots n_m^0!\,(n_1-n_1^0)!\,(n_2-n_2^0)!\cdots\cdots(n_m-n_m^0)!} \quad\cdots\cdots(4)$$

故に，今考へてゐる部分の組成が，$(n_1^0, n_2^0, \cdots\cdots, n_m^0)$ となつてゐる確率 P_1 は，(4) 式を (3) 式で割つて

$$P_1=\frac{n_1!\,n_2!\cdots\cdots n_m!\,N_0!\,(N-N_0)!}{n_1^0!\,n_2^0!\cdots\cdots n_m^0!\,(n_1-n_1^0)!\,(n_2-n_2^0)!\cdots\cdots(n_m-n_m^0)!\,N!} \quad\cdots\cdots(5)$$

上の式を Stirling の公式

$$\lim_{n\to\infty} n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n} \quad\cdots\cdots(6)$$

に依つて書き直す。但し，$N, N_0, n_i, n_i^0, n_i-n_i^0$ は非常に大きな數であるとする。此事は，通常，許され得ると思はれる假定である。さうすると結局

$$\left.\begin{aligned} P_1&=\frac{n_1^{n_1+1/2}n_2^{n_2+1/2}\cdots\cdots n_m^{n_m+1/2}\,N_0^{N_0+1/2}(N-N_0)^{N-N_0+1/2}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,N^{N+1/2}}\,e^{-K} \\ \text{但し}\quad K&=\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(n_i^0+\frac{1}{2}\right)\log n_i^0+\left(n_i-n_i^0+\frac{1}{2}\right)\log(n_i-n_i^0)\right\}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(7)$$

となる。今 n_i^0 を變へて，K の最小値を求めれば，P_1 は最大，即ち最も生じ易い (most probable) 組成に對する確率となる。其故に

$$\delta K=\sum_{i=1}^{m}\left\{\log\frac{n_i^0}{n_i-n_i^0}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_i^0}-\frac{1}{n_i-n_i^0}\right)\right\}\delta n_i^0=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

又 (2) 式より

$$\delta n_1+\delta n_2+\cdots\cdots+\delta n_m=0 \quad\cdots\cdots(9)$$

を得る。$n_i^0, n_i-n_i^0$ は極めて大きいとして，(8) 式の括弧中の第 2 項を省略し，(8), (9) 式が同時に成立する爲めの條件を求めると，

$$\frac{n_1}{n_1^0}=\frac{n_2}{n_2^0}=\cdots\cdots=\frac{n_m}{n_m^0}=\frac{N}{N_0} \quad\cdots\cdots(10)$$

となる。(10) 式で定まる $(n_1^0, n_2^0, \cdots, n_m^0)$ が P_1 を最大，即ち K を最小とするか否かを確める爲めに

$$n_i^0=\frac{N_0}{N}n_i+\alpha_i\ , \qquad i=1,2,\cdots\cdots,m \quad\cdots\cdots(11)$$

と置いて見る。即ち α_i なる偏差があると考へる。(11) 式より當然の結果として

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_m=0 \quad\cdots\cdots(11\cdot A)$$

であり，尙ほ α_i に對しては，

$$n_i^0=\frac{N_0}{N}n_i\gg\alpha_i\ , \qquad \frac{N-N_0}{N}n_i\gg\alpha_i \quad\cdots\cdots(12)$$

の條件が滿たされてゐるとする。(11) 式の n_i^0 を (7) 式に入れ，(12) 式を使つて計算すると，

$$\begin{aligned}K=&N_0\log\frac{N_0}{N-N_0}+\sum_{i=1}^{m}n_i\log\frac{N-N_0}{N}n_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\log\frac{N_0(N-N_0)}{N^2}n_i\\&+\frac{N(N-2N_0)}{2N_0(N-N_0)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{n_i}+\frac{N^2}{2N_0(N-N_0)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i^2}{n_i}-\frac{N^2(N^2-2NN_0+2N_0^2)}{2N_0^2(N-N_0)^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i^2}{n_i^2}\\&+\frac{N^3(N+N_0)}{3N_0^2(N-N_0)^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i^3}{n_i^2}+\quad\cdots\cdots(13)\end{aligned}$$

(13) 式の各項の大さを見るに，第 4 項と第 5 項は，Σ の外の係數は，同じ程度の大さで，α_i, α_i^2 の分母は同じ n_i である。α_i は，粒の數であるから，正又は負の整數である。故に，一般的に考へて，第 4 項は第 5 項に比して小さい。第 6 項以下は，分母が非常に大きな n_i^2 以上の數であるから，(12) 式の條件の下で，K に效いて來る項は，第 1 項，第 2 項，第 3 項，第 5 項である。依つて

$$K=N_0\log\frac{N_0}{N-N_0}+\sum_{i=1}^{m}n_i\log\frac{N-N_0}{N}n_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\log\frac{N_0(N-N_0)}{N^2}n_i+\frac{N^2}{2N_0(N-N_0)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i^2}{n_i} \quad\cdots\cdots(14)$$

と書いて良い。

これから分る事は，$\alpha_i\neq0$ ならば，K は $\alpha_i=0$ の時より其値を増す。即ち，$\alpha_i=0$ の時の K の値が最小値である。即ち (10) 式の關係を滿す $(n_1^0, n_2^0, \cdots, n_m^0)$ の組が，P_1 を最大ならしめる事が分かる。即ち，或る特定の偏差 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_m)$ を持つ場合の生ずる確率よりも，篩分析に依つて求められた組成の比に N_0 が分けられる確率の方が大きい譯である。

第 2 節 偏差に對する確率

(10) 式に示された $(n_1^0, n_2^0, \cdots\cdots, n_m^0)$ から，或る特定の偏差 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_m)$ がある場合の確率 P_2 は，(14)

式を (7) 式に代入すれば良い。さうすれば，

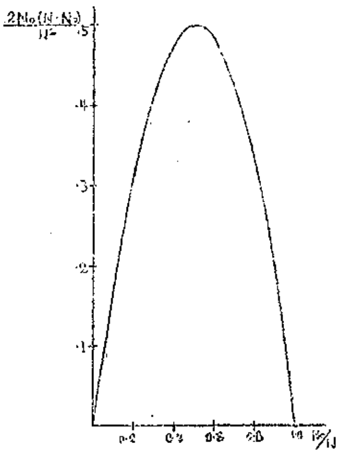
$$P_2=\sqrt{\frac{N^{2m-1}}{(2\pi)^{m-1}n_1n_2\cdots n_mN_0^{m-1}(N-N_0)^{m-1}}}\;e^{-\frac{N^2}{2N_0(N-N_0)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i^2}{n_i}}\cdots\cdots(15)$$

となる。或る特定の偏差の生ずる確率は，α_i が増すと共に急激に減る。其減る割合ひは

$$L=\frac{N^2}{2N_0(N-N_0)}\cdots\cdots(16)$$

の値に左右され，其上，n_i の大さにも依る。L の値は，N と N_0 の比に依つて變り，其比の値が 2 の時最小である。以上では**特定の偏差の組** $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ が生ずる確率を考へたのであるが，(15) 式を見ると，偏差が丁度其特定の組でなくても，

圖-1.



$$\frac{\alpha_1^2}{n_1}+\frac{\alpha_2^2}{n_2}+\frac{\alpha_3^2}{n_3}+\cdots+\frac{\alpha_m^2}{n_m}=L_0\cdots\cdots(17)$$

の値さへ同じであれば，他の $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ の組の生ずる確率も，今考へてゐる**特定の偏差**の生ずる確率と等しくなる。故に，偏差の確率としては，L_0 が L_0 と L_0+dL_0 の間にある確率を考へた方が便利である。**特定**の偏差が生ずる場合と，其以外の L_0 を同じくする他の**特定**の偏差が生ずる場合は，所謂排反事象であるから，L_0 が L_0 と L_0+dL_0 にある確率を求めるには，先づ (17) 式の左邊の値が L_0 より小さくなる爲に取る可き整數 α_i の組 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ の數 S を求め，それを L_0 で微分したものと，(15) 式で $\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i^2/n_i)$ を L_0 と置いたものとを掛け合せれば良い。

其處で先づ

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\alpha_1^2}{n_1}+\dfrac{\alpha_2^2}{n_2}+\cdots+\dfrac{\alpha_m^2}{n_m}\leqq L_0\\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(18)$$

なる條件を滿す整數の組 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ の數 S を求めやう。それには

$$\frac{\alpha_1^2}{n_1}+\frac{\alpha_2^2}{n_2}+\cdots+\frac{\alpha_m^2}{n_m}=L_0$$

を m 次元の楕圓體と考へ，此れと

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=0$$

なる m 次元の平面との切口面積の 1 坐標面への正射影の面積を求めると，其坐標面の單位面積當りに 1 個づゝ $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ なる整數の組があり，其組は (18) 式の條件を滿すから，結局今述べた正射影の面積を求めれば良い[1]。

$$\alpha_m=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m-1})$$

を (18) 式の第 1 式に入れると

$$\begin{aligned}K(\alpha,\alpha)&=\sum k_{ij}\alpha_i\alpha_j\\&=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_m}\right)\alpha_1^2+\left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_m}\right)\alpha_2^2+\cdots+\left(\frac{1}{n_{m-1}}+\frac{1}{n_m}\right)\alpha_{m-1}^2\end{aligned}$$

1) Jeans "Dynamical theory of gases" p. 48 の考へ方に依る。

$$+\frac{2}{n_m}(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots\cdots)\leq L_0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

依つて問題は，(19) 式の不等式を滿足する α_i の範圍で

$$I=\int d\alpha_1 d\alpha_2\cdots\cdots d\alpha_{m-1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

なる積分の値を求める事に歸する。處が一方

$$\frac{\alpha_1^2}{a_1^2}+\frac{\alpha_2^2}{a_2^2}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_n^2}{a_n^2}<1\ ;\quad a_i>0,\ \ \alpha_i>0$$

なる範圍で行つた積分に就て

$$\int d\alpha_1 d\alpha_2\cdots\cdots d\alpha_n=\frac{\pi^{n/2}a_1a_2\cdots\cdots a_n}{2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

なる事を知つてゐる[2]。故に (19) 式の左邊を標準形に直した時の $a_1a_2\cdots\cdots a_n$ に相當する量が分れば，我々の目的は達せられる。處が，適當な一次變換（所謂主軸變換）で

$$K(\alpha,\alpha)=\sum k_{ij}\,\alpha_i\alpha_j$$

を

$$\kappa_1\alpha_1^2+\kappa_2\alpha_2^2+\cdots\cdots+\kappa_{m-1}\alpha^2_{m-1}$$

の形にする事が出來，其場合に

$$\begin{vmatrix} \kappa-\kappa_1 & 0\cdots\cdots & 0 \\ 0 & \kappa-\kappa_2\cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \kappa-\kappa_{m-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa-k_{11} & -k_{12} & \cdots\cdots-k_{1m-1} \\ -k_{21} & \kappa-k_{22} & \cdots\cdots-k_{2m-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -k_{m-1,1} & -k_{m-1,2}\cdots & \kappa-k_{m-1,m-1} \end{vmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots(22)$$

なる事も知つてゐる[3]。(22) 式で $\kappa=0$ と置けば

$$\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_{m-1}=\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots\cdots & k_{1m-1} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots\cdots & k_{2m-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ k_{m-1,1} & k_{m-1,2} & \cdots\cdots & k_{m-1\,m-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_m} & \frac{1}{n_m} & \cdots\cdots & \frac{1}{n_m} \\ \frac{1}{n_m} & \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_m} & \cdots\cdots & \frac{1}{n_m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{n_m} & \frac{1}{n_m} & \cdots\cdots & \frac{1}{n_{m-1}}+\frac{1}{n_m} \end{vmatrix}$$

2) 寺澤寛一：“數學概論” p. 105.

3) Courant-Hilbert: “Methoden der mathematischen Physik” Bd. 1, S. 22.

$$
= \frac{1}{n_1 n_2 \cdots\cdots n_{m-1}} \begin{vmatrix} 1+\frac{n_1}{n_m} & \frac{n_2}{n_m} & \cdots\cdots & \frac{n_{m-1}}{n_m} \\ \frac{n_1}{n_m} & 1+\frac{n_2}{n_m} & \cdots\cdots & \frac{n_{m-1}}{n_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n_1}{n_m} & \frac{n_2}{n_m} & \cdots\cdots & 1+\frac{n_{m-1}}{n_m} \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{n_1+n_2+\cdots\cdots+n_m}{n_1 n_2 \cdots\cdots n_m} \begin{vmatrix} 1 & \frac{n_2}{n_m} & \cdots\cdots & \frac{n_{m-1}}{n_m} \\ 1 & 1+\frac{n_2}{n_m} & \cdots\cdots & \frac{n_{m-1}}{n_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{n_2}{n_m} & \cdots\cdots & 1+\frac{n_{m-1}}{n_m} \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{n_1+n_2+\cdots\cdots+n_m}{n_1 n_2 \cdots\cdots n_m} \quad \cdots\cdots(23)
$$

故に，(19) 式の條件を滿し，$\alpha_1>0, \alpha_2>0, \cdots\cdots, \alpha_{m-1}>0$ の範圍に取つた (20) 式の積分の値は

$$
\int d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots\cdots d\alpha_{m-1} = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}} L_0^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \sqrt{\frac{n_1 n_2 \cdots\cdots n_m}{N}}
$$

坐標軸の負の方の積分をも考へると，上の積分を 2^{m-1} 倍すれば良いから，求むる面積，即ち求むる $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_m)$ の組の數 S は

$$
S = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}} L_0^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \sqrt{\frac{n_1 n_2 \cdots\cdots n_m}{N}} \quad \cdots\cdots(24)
$$

$$
\therefore \quad dS = \frac{(m-1)\pi^{\frac{m-1}{2}} L_0^{\frac{m-3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \sqrt{\frac{n_1 n_2 \cdots\cdots n_m}{N}}\, dL_0 \quad \cdots\cdots(25)
$$

故に，偏差 L_0 が，L_0 と L_0+dL_0 の間にある確率 P_3 は次の如くになる。即ち，(15),(25) 式より

$$
P_3 = \frac{m-1}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \left\{\frac{N^2}{2N_0(N-N_0)}\right\}^{\frac{m-1}{2}} L_0^{\frac{m-3}{2}} e^{-LL_0}\, dL_0
$$

$$
= K_m L_0^{\frac{m-3}{2}} e^{-LL_0} dL_0 \quad \cdots\cdots(26)
$$

但し

$$
\left.\begin{aligned} K_m &= \frac{m-1}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} L^{\frac{m-1}{2}} \\ L &= \frac{N^2}{2N_0(N-N_0)} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(27)
$$

此れから見ると，偏差 L_0 の生ずる確率は，成分の數と，全體の粒の數と考へてゐる部分の粒の數との比に依

るのみで，成分に於ける粒の數 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ とは，あらはには關係してゐない。$n_1, n_2, \cdots, n_m$ は，L_0 の中にあるから，同じ L_0 の値に對して，變り得る α_i の範圍を規定してゐる。P_3 を $L_0=0$ から $L_0=\infty$ 迄積分すれば 1 になる。P_3 中の

$$f=K_m L^{\frac{m-3}{2}} e^{-LL_0} \cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

は，偏差 L_0 の分布を示す一種の分布函數である。(26) 式から明らかな様に，$m<3$ の場合と，$m>3$ の場合では偏差の分布に根本的な性質の差がある。又當然の事ではあるが，P_3 は $L_0=0$ では使へない。

第 3 章 偏差に就て

第 1 節 偏差の尺度

(26) 式の P_3 の値は，偏差 L_0 の分布を示す式であるから，此れに依つて，偏差の性質を色々考へる事が出來る。先づ，偏差の大さを比較するには，偏差を測る尺度を見出す事が必要であるが，次の如きものが此目的の爲めに考へられる。

第 1 項 偏差 L_0 の平均値 $\overline{L_0}$

偏差 L_0 の平均値 $\overline{L_0}$ を計算して見ると

$$\overline{L_0}=\int_0^\infty L_0 K_m L^{\frac{m-3}{2}} e^{-LL_0} dL_0$$

$$=(m-1)\frac{N_0(N-N_0)}{N^2}$$

$$=\frac{m-1}{2L} \cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

依つて，m が大きい程，即ち成分の數が多い程，平均の偏差が大きくなり，N_0/N の比に依つても $\overline{L_0}$ が變る。これを明らかにする爲めに，N_0/N と L, $1/L$ の曲線を書くと，圖-1，圖-2 の如くである。此れより，N_0/N が 1/2 なる時 $\overline{L_0}$ は最大になる。尙ほ (17) 式より

$$\frac{\alpha_1^2}{n_1}+\frac{\alpha_2^2}{n_2}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_m^2}{n_m}=L_0$$

であるから

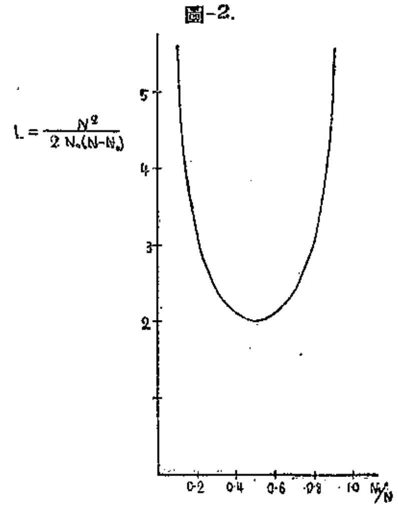
$$\frac{\alpha_1^2}{n_1}+\frac{\alpha_2^2}{n_2}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_m^2}{n_m}=\overline{L_0} \cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

とすれば，m の値と，N_0/N の値で定まる $\overline{L_0}$ に對して，個々の成分の粒數の偏差は (30) 式及び

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_m=0$$

で規定される。一見して分かる如く，各成分の夫々の粒の個數が多い程，α_i 即ち各成分の偏差は大きくなり得る。

圖-2.



第 2 項 公算偏差

L_0 の偏差の尺度として，平均の L_0 の値を採つても良いが，これでは未だはつきりしないから，誤差論に於ける公算誤差 (probable error) の樣な値を考へて見やう。即ち，ある L_0 の値までの L_0 の生ずる確率と，其

L_0 以上の L_0 の生ずる確率が丁度等しい様な L_0 の値 L_1 を考へる。即ち (26) 式に依つて

$$\frac{1}{2}=\int_0^{L_1}K_m L_0^{\frac{m-3}{2}}e^{-LL_0}dL_0 \qquad \cdots\cdots(31)$$

なる L_1 である。

(i) $m=2$ の場合

$$\frac{1}{2}=\int_0^{L_1}K_2L_0^{-1/2}e^{-LL_0}dL_0$$

$$=\frac{K_2}{\sqrt{L}}\int_0^{\sqrt{LL_1}}e^{-x^2}dL_0$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{LL_1}}e^{-x^2}dx$$

$$\therefore \quad L_1=\frac{0.2283}{L} \qquad \cdots\cdots(32)$$

(ii) $m=3$ の場合

$$\frac{1}{2}=\int_0^{L_1}K_3e^{-LL_0}dL_0$$

$$=\frac{K_3}{L}(1-e^{-LL_1})$$

$$\therefore \quad L_1=\frac{0.6932}{L} \qquad \cdots\cdots(33)$$

$m=2$ の場合の L_1 と $m=3$ の場合の L_1 を比較すると

$$\frac{(L_1)_{m=2}}{(L_1)_{m=3}}=0.3293$$

即ち，2 成分の場合の方が 3 成分の場合よりも偏差が少ない。これは $\overline{L_0}$ の比較に依つても言へる事である。又 L_1 は L に逆比例してゐる ($m=2,3$ の上の場合) から，圖-2 に依り N_0/N が 1/2 の時 L_1 も最大となる。即ち篩分析の結果と，各部分の組成との偏差は，其部分が全體の 1/2 である時一番大きくなる。$m>3$ の場合に L_1 の値を求める事は可成り面倒の様である。

第 2 節　各成分の偏差 α_i の大さに對する見積り

$\overline{L_0}, L_1$ の値は定まつたとし，其れに對して生じ得る $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ の大さの見當を付けるには，n_i の最大値を n_λ とすれば，生じ得る α_i は

$$m\frac{{\alpha_\lambda}^0}{n_\lambda}=\overline{L_0} \qquad 又は \qquad m\frac{{\alpha_\lambda}^1}{n_\lambda}=L_1 \qquad \cdots\cdots(34)$$

なる ${\alpha_\lambda}^0$ 又は ${\alpha_\lambda}^1$ を夫々越える事は出來ない。依つて，生じ得る α_i の最も大きな値としては

$${\alpha_\lambda}^0=\sqrt{\frac{\overline{L_0}}{m}n_\lambda} \qquad 又は \qquad {\alpha_\lambda}^1=\sqrt{\frac{L_1}{m}n_\lambda} \qquad \cdots\cdots(35)$$

となる。一方此様な ${\alpha_\lambda}^0$ 又は ${\alpha_\lambda}^1$ の生ずる確率は夫々 (15) 式に依り

$$\sqrt{\frac{N^{2m-1}}{(2\pi)^{m-1}n_1n_2\cdots n_mN_0^{m-1}(N-N_0)^{m-1}}}\,e^{-\frac{N^2}{2N_0(N-N_0)}\overline{L_0}}$$

$$\sqrt{\frac{N^{2m-1}}{(2\pi)^{m-1}n_1n_2\cdots n_mN_0^{m-1}(N-N_0)^{m-1}}}\,e^{-\frac{N^2}{2N_0(N-N_0)}L_1}$$

を越えないから，非常に小さい。

第4章 例　　題

以上の考察を明瞭にする爲めに，少し例題をやつて見やう。

(i) $m=3,\ N=10^6,\ n_1=2\times10^5,\ n_2=3\times10^5,\ n_3=5\times10^5$

$N_0=8\times10^3$

さうすると，

$$n_1{}^0=\frac{N_0}{N}n_1=1\,600,\quad n_2{}^0=\frac{N_0}{N}n_2=2\,400,\quad n_3{}^0=\frac{N_0}{N}n_3=4\,000$$

$$L=\frac{N^2}{2N_0(N-N_0)}=63.0?,\quad \frac{1}{L}=1.587\times10^{-2}$$

偏差がない確率　$P_2=\dfrac{L}{\pi}\sqrt{\dfrac{10^0}{2\times3\times5\times10^{15}}}=1.15\times10^{-4}$

$$\overline{L}_0=(m-1)\frac{1}{2L}=1.59\times10^{-2},$$

$$L_1=\frac{0.6932}{L}=1.10\times10^{-2},$$

$$\alpha\lambda^0=\sqrt{\frac{1.59\times10^{-2}\times5\times10^5}{3}}=51.5,\quad \alpha\lambda^1=\sqrt{\frac{1.10\times10^{-2}\times5\times10^5}{3}}=42.8$$

(ii) $m=3,\quad N=10^6,\quad n_1=2\times10^5,\quad n_2=3\times10^5,\quad n_3=5\times10^5$

$N_0=10^3$

とすれば

$n_1{}^0=200,\quad n_2{}^0=300,\quad n_3{}^0=500$

$P_2=9.19\times10^{-4}$

$\overline{L}_0=2\times10^{-3},\quad L_1=1.39\times10^{-3}$

$\alpha\lambda^0=18.2,\quad \alpha\lambda^1=15.2$

(iii) $N=10^6,\quad n_1=3\times10^5,\quad n_2=3\times10^5,\quad n_3=4\times10^5$

$N_0=8\times10^3$

とすれば

$n_1{}^0=2\,400,\quad n_2{}^0=2\,400,\quad n_3{}^0=3\,200$

$P_2=1.06\times10^{-4}$

$\overline{L}_0=1.59\times10^{-2},\quad L_1=1.10\times10^{-2}$

$\alpha\lambda^0=45.0,\quad \alpha\lambda^1=38.3$

(iv) $N=10^6,\quad n_1=3\times10^5,\quad n_2=3\times10^5,\quad n_3=4\times10^5$

$N_0=10^3$

とすれば

$n_1{}^0=300,\quad n_2{}^0=300,\quad n_3{}^0=400$

$P_2=8.4\times10^{-4}$

$\overline{L}_0=2\times10^{-3}$, $L_1=1.39\times10^{-3}$

$\alpha\lambda^0=16.3$, $\alpha\lambda^1=13.6$

(v) $N=10^8$, $n_1=10^5$, $n_2=4\times10^8$, $n_3=4\times10^8$, $n_4=0.5\times10^8$ $n_5=0.5\times10^8$

$N_0=10^5$

とすれば

$n_1^0=10\,000$, $n_2^0=40\,000$, $n_3^0=40\,000$, $n_4^0=5\,000$, $n_5^0=5\,000$

$L=5\,000$, $(1/L)=2\times10^{-4}$

$P_2=4.17\times10^{-10}$

$\overline{L}_0=2\times10^{-4}$, $\alpha\lambda^0=126.5$

(vi) $N=10^8$, $n_1=10^8$, $n_2=4\times10^8$, $n_3=4\times10^8$, $n_4=0.5\times10^8$, $n_5=0.5\times10^8$

$N_0=10^3$

とすれば

$n_1^0=100$, $n_2^0=400$, $n_3^0=400$, $n_4^0=50$, $n_5^0=50$

$L=5\times10^5$, $(1/L)=2\times10^{-6}$

$P_2=4.17\times10^{-6}$, $\overline{L}_0=2\times10^{-6}$, $\alpha\lambda^0=12.7$

以上を表示すれば，**表-1**，**表-2** の樣である。

表-1. $N=10^6$, $m=3$

N_0	全體としての組成		N_0 の組成		偏差のない確率	L_0	L_1	$\alpha\lambda^0$	$\alpha\lambda^0/n_\mu^0$	$\alpha\lambda^1$	$\alpha\lambda^1/n_\mu^0$
8×10^3	n_1	2×10^5	n_1^0	1 600	1.15×10^{-4}	1.59×10^{-2}	1.10×10^{-2}	51.5	3.22×10^{-2}	42.8	2.68×10^{-2}
	n_2	3×10^5	n_2^0	2 400							
	n_3	5×10^5	n_3^0	4 000							
10^3	n_1	2×10^5	n_1^0	200	9.19×10^{-4}	2×10^{-3}	1.39×10^{-3}	18.2	9.1×10^{-2}	15.2	7.6×10^{-2}
	n_2	3×10^5	n_2^0	300							
	n_3	5×10^5	n_3^0	500							
8×10^3	n_1	3×10^5	n_1^0	2 400	1.06×10^{-4}	1.59×10^{-2}	1.10×10^{-2}	45	1.88×10^{-2}	38.3	1.60×10^{-2}
	n_2	3×10^5	n_2^0	2 400							
	n_3	4×10^5	n_3^0	3 200							
10^3	n_1	3×10^5	n_1^0	300	8.4×10^{-4}	2×10^{-3}	1.39×10^{-3}	16.3	5.43×10^{-2}	13.6	4.53×10^{-2}
	n_2	3×10^5	n_2^0	300							
	n_3	4×10^5	n_3^0	400							

n_μ^0 は n_i^0 の最小値

表-2.　$N=10^9$, $m=5$

N_0	全體としての組成		N_0 の組成		偏差のない確率	$\overline{L}_0$	L_1	$\alpha\lambda^0$	$\alpha\lambda^0/n_\mu^0$	$\alpha\lambda^1$	$\alpha\lambda^1/n_\mu^0$
10^5	n_1	10^8	n_1^0	10 000	4.17×10^{-10}	2×10^{-4}	—	126.5	2.53×10^{-2}	—	—
	n_2	4×10^8	n_2^0	40 000							
	n_3	4×10^8	n_3^0	40 000							
	n_4	0.5×10^8	n_4^0	5 000							
	n_5	0.5×10^8	n_5^0	5 000							
10^3	n_1	10^8	n_1^0	100	4.17×10^{-6}	2×10^{-6}	—	12.7	2.52×10^{-1}	—	—
	n_2	4×10^8	n_2^0	400							
	n_3	4×10^8	n_3^0	400							
	n_4	0.5×10^8	n_4^0	50							
	n_5	0.5×10^8	n_5^0	50							

n_μ^0 は n_i の最小値

表-1, 2 を見て分る事は，N_0 が小さくなると，全體としての偏差は甚だ小さくなるが各成分の偏差は必ずしもさうでなく，此例では却つて大きくなつてゐる。

第5章　結　　語

以上組成偏差に就て，理論的な考察をして來たが，前にも述べた樣に，議論は，純理論的であるから，實際の砂の場合をどれ位說明出來るか否かは分らない。しかし，此樣な觀念的議論をして置く事は，將來一樣でない砂の運動を考察する場合に，生じ得る一種の下限を示すものとして，役立ち得ると考へたので，敢へて斯かる抽象論をやつて見たのである。

結局，實際の場合の偏差の程度が，我々の現在行つた計算の程度と，どの位喰ひ違ふかと言ふ事が，知り度い譯であり，其差を說明する爲めに，考へをどの樣に變更すべきか，(例へば確率を求める場合の重さの問題) と言ふ事である。此等の困難な問題は，將來の問題として殘して置かねばならないので，今の處は，其處まで論ずる事は出來ない。

(昭. 18. 6. 2. 受付)

附記. 著者の此考へに基いて，學生に實驗をやつて貰つた。ボールベアリングの球と鉛の散彈とで實驗すると，此論文の結果には合はず，散彈が寄り集まる傾向がある。それについて學生福山君の面白い理論も得られた。其等の詳細はいづれ發表する豫定である。(18. 7. 27. 記)