

論 說 報 告

第 29 卷 第 7 號 昭和 16 年 7 月

軌 條 の 挫 屈 の 計 算

正會員 小 野 一 良*

要 旨 此の論説は枕木の移動に對する道床の抵抗力が、移動量に拘はらず一定なりとして、軌條が挫屈するに必要なる軌條の壓力の計算方法を述べたものである。

1. 緒 言

今までに軌條の挫屈に就て發表せられた論文を土木學會誌に依つて見る時は次のものがある。

- (i) 第 20 卷, 第 10 號 淵越博士: 軌條の挫屈に就て
- (ii) 第 20 卷, 第 11 號 稻田博士: 長柱の挫屈と之に及ぼす彈性抵抗の影響並に鐵道軌道の張出に關する新考察
- (iii) 第 21 卷, 第 8 號 以上の論説に關する討議
- (iv) 第 23 卷, 第 8 號 鈴木信孝氏譯: 熔接軌條の狂ひに對する安全性
- (v) 第 25 卷, 第 6 號 稻田博士: 軸壓と横壓とを受くる長柱の撓み並に軌條の浮上り挫屈に就て

次にこれ等論文の要點に就き述べることにす。

(i) は軌條の横方向に對する挫屈に就て豊富な實驗結果と共に、軌條が挫屈を爲すのに必要な壓力の計算方法が述べてある。然してその計算の特長を挙げれば次の如くなる。

- (a) 枕木がその長さの方向に移動する時の道床抵抗力を、移動量の大きさに拘はらず一定と見做す。
- (b) 枕木が軌道方向に移動する時の道床抵抗力を、移動量の大きさに拘はらず一定と見做す。
- (c) 軌條が挫屈した場合に挫屈箇所の前後に續く軌條が、挫屈箇所に向つて伸びて來ることを考慮に入れて居る。
- (d) 軌條の挫屈後の形を正弦曲線と見做す。
- (e) 軌條の挫屈の長さ及び張出し量を求めるに當り、軌條に挫屈を生ぜしめる爲に、外から加へられた仕事量とその結果軌條内に蓄へられたエネルギーとの差が、最小となる様にこれ等の値を定めた。
- (f) 軌條の挫屈する直前の壓力は挫屈後の壓力に挫屈に伴ふ軌條の伸びを、壓力に換算した値を加へて求めた。
- (ii) も軌條の横方向に對する挫屈の計算を取扱つたものであるが、(i) の計算方法と異なる主要な點は次の如くである。
- (g) 枕木がその長さの方向に移動する時の道床抵抗力を、枕木の移動量に比例すると見做した。
- (h) この解法にては張出し量は不足となる。
- (iii) には軌條が挫屈する時の道床抵抗力は、(a) の如く見做すべきか、又は (g) の如く見做すべきかに就て討議が行はれて居る。

(iv) は軌條の上方向に對する挫屈を取扱つたものであるが、(a) の如き假定をなす時は横方向に對する挫屈に

* 工學士 鐵道官 鐵道省施設局保修課

も適用出来ることとなる。この論文に於ては、(c) に述べたことを無視して居りその結果

(i) 挫屈箇所の始終點に於て軌條が、その長さの方向に移動しない様に固定されて居る、との假定を設けたことになる。

(v) も軌條の上方向に對する挫屈を取扱つたものであり、従つて (a) の如き假定をなす時は、横方向の挫屈にも適用出来ることとなる。この論文に於ては軌條挫屈後の壓力の計算方法に就き述べてあるが、挫屈直前の壓力の計算方法には觸れて居ない。

次に述べる著者の論文は、大體に於て (i) の論文に似て居るが、これと異なる點は次の如くである。

(j) 軌條に加はる壓力及び曲げモーメントと軌條の横移動量との關係より軌條の挫屈の形を導き、従つて (i) の如き假定を設けない。

(k) 又以上の關係より軌條に加はる壓力に對して挫屈の長さ及び張出し量が定まるを以て、(e) の方法を用ひない。

2. 温度上昇に伴ひ軌條に生ずる壓力

軌條の接目に遊間がある間は、温度の上昇と共に軌條は延びて行くが、相當の延長に互り全部の遊間が 0 になつた後に、更に温度が上昇する時は伸びに相當する壓力が軌條内に生ずる。例へ見掛上遊間が開いて居ても軌條と接目鉞との間の摩擦抵抗力が大きい場合には、この抵抗力に打勝つまでの壓力が軌條内に生ずることとなる。

今軌條の伸びを全然許さないで軌條の温度を $\theta^{\circ}\text{C}$ だけ上昇させた時に、軌條内に生ずる壓力を P_t とすればこれは次式に依り計算せられる。

$$P = EA\beta\theta$$

茲に $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$: 軌條鋼の彈性係數
 A : 軌條の斷面積 (cm^2)
 $\beta = 0.0000114$: 軌條鋼の線膨脹係數

この値を上式に入れる時は

$$P = \begin{cases} 1.541\theta \cdots \cdots 50 \text{ kg 軌條} \\ 1.132\theta \cdots \cdots 37 \text{ kg 軌條} \\ 0.916\theta \cdots \cdots 30 \text{ kg 軌條} \end{cases}$$

斯くの如くして軌條内に大きな壓力を生ずる時は、軌條は挫屈する危険を生ずる。この壓力を挫屈壓力と呼ぶこととし、次章以下にこの計算方法を述べることとする。

3. 枕木の移動に對する道床の抵抗力

軌條が大きな壓力を受けて挫屈しようとする時は、これに伴ひ枕木が道床中を移動するのであるが、道床の抵抗力がこの移動を阻止する方向に働き従つて軌條の挫屈を防止することとなる。枕木の移動に對する道床の抵抗力には枕木の長さの方向に移動する時の抵抗力 (枕木の引抜きに對する抵抗力) と、軌道方向に移動する時の抵抗力とがあり、次にこの各々に就いて測定した結果を述べる。

1. 枕木がその長さの方向に移動する時の抵抗力

軌條の挫屈壓力に最も大きな影響を持つのは、軌道の横方向の抵抗力であり、これは枕木の長さの方向の移動

に対する道床の抵抗力に依つて生ずる。この大きさを知る爲に圖-1 の様な方法に依り各所で枕木を引抜いてその抵抗力を測定した。この場合軌條は充分に浮かし上げて軌條と枕木との間の摩擦の影響が入らぬようにした。

圖-1. 枕木を引き抜く時の道床の抵抗力を測定する装置

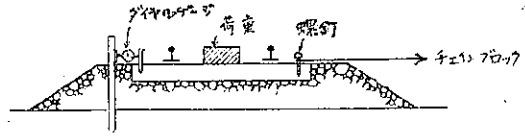


圖-2 及び圖-3 に引張力と移動量との關係を示す。

これ等の圖より見られる如く移動量は引張力の 2~3 乗に比例し 5~10mm 移動した場合に最大の抵抗力に達し、これより先は小なる引張力で抜け出す。

圖-2. 枕木を引き抜く時の道床の抵抗力 (碎石道床)

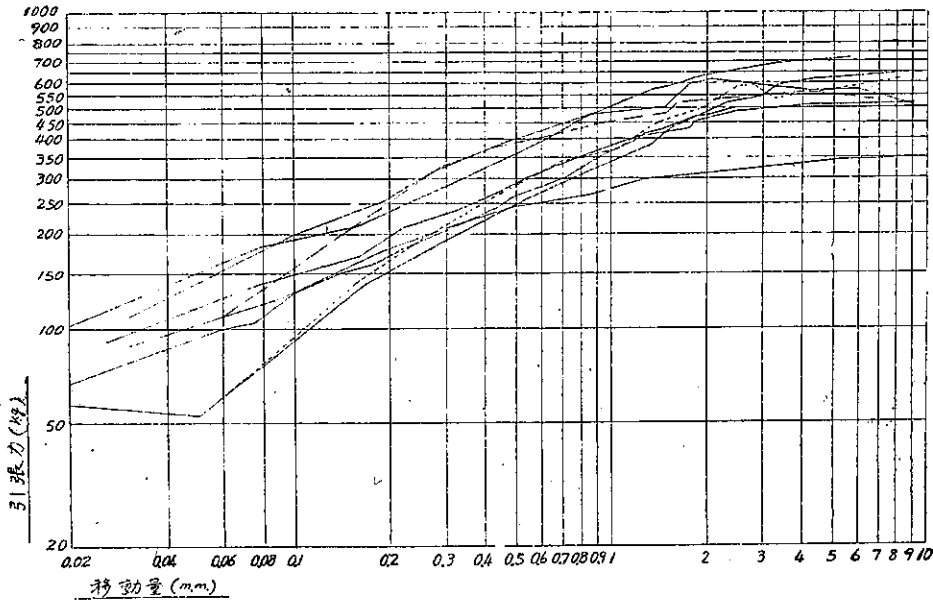


表-1. 枕木がその長さの方向に移動する時の最大抵抗力 (單位 kg)

道 床	碎石道床	簡 砂 利 道 床		
場 所	東海道線三島	御殿場線裾野	御殿場線富士岡	總武線佐倉
最大抵抗力	561	426	327	345
	628	264	302	410
	510	432	408	460
	563	320	348	
	613	309	350	
	701			
平均	596	351	347	405
			367	

圖-3. 枕木を引抜く時の道床の抵抗力 (篩砂利道床)

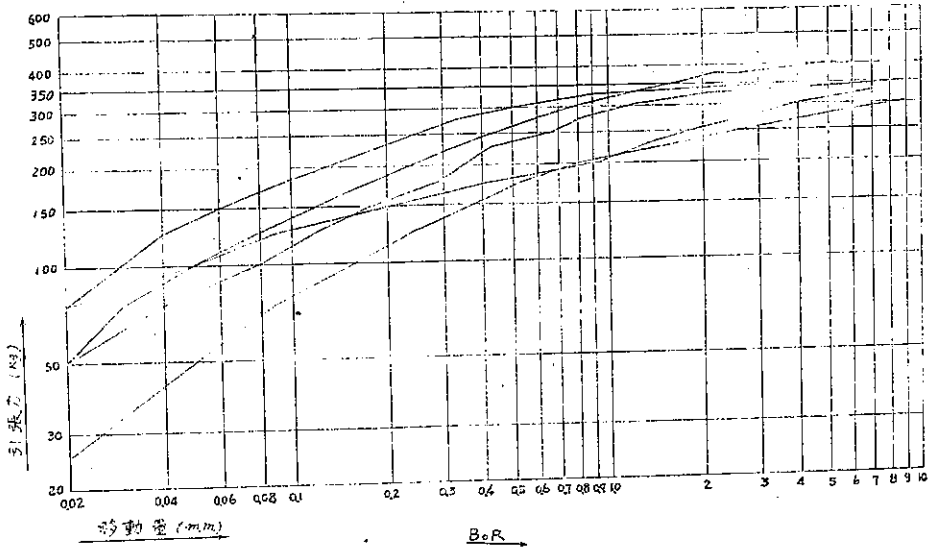


表-1 に枕木を引き抜く時の最大抵抗力を示す。

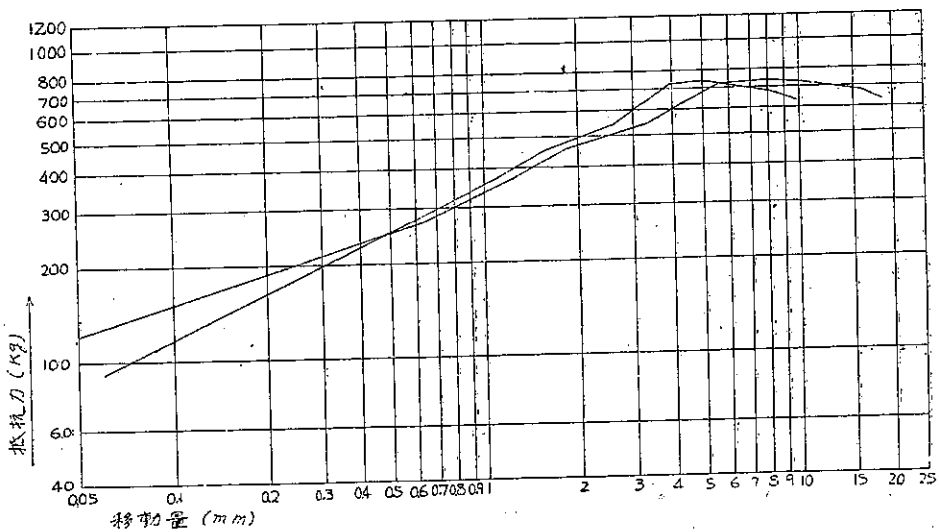
上表に依り碎石道床に於ては約 600 kg, 篩砂利道床に於ては 350~400 kg の抵抗力があることが分る。

2. 枕木が軌道方向に移動する時の抵抗力

枕木を軌道方向に押した時の抵抗力も軌條の挫屈壓力に關係し、この抵抗力が大きい程挫屈に對する抵抗力が大きくなる。

枕木の兩端をオイルジャッキで軌道方向に押して、移動量と壓力との關係及びその最大抵抗力を測定した。この場合にも軌條を充分に浮かし上げて軌條と枕木との間の摩擦の影響が入らぬようにした。圖-4 に枕木に加へた壓

圖-4. 枕木を軌道方向に押す時の道床の抵抗力 (篩砂利道床)



力と移動量との関係を示す。

この場合にも移動量は壓力の 2~3 乗に比例し、移動量が 5~10 mm に達した時に最大抵抗力に達す。表-2 に各所で最大抵抗力を測定した結果を示す。

御殿場線 富士岡に於ける試験結果について見れば、枕木を軌道方向に押した場合の最大抵抗力は、引抜いた場合の最大抵抗力の約 2 倍となつて居る。

表-2. 枕木が軌道方向に移動する時の最大抵抗力 (單位 kg)

道 床	碎石道床	篩砂利道床	
		御殿場線富士岡	總武線佐倉
場 所	東海道線三島		
		790	681
		708	454
	最大抵抗力	744	
		908	
		744	
平 均	788	779	568
		719	

4. 直線軌道に於ける軌條の挫屈壓力

堀越博士に依り軌條の挫屈に關し廣汎なる實驗が行はれたが、その實驗に依つて挫屈の經過を見るに軌條は壓力の増加に伴ひ、徐々に横移動量を生ずるが、この量が約 5mm を超える時は壓力の僅かの増加に伴ひ、急に横移動量が増加して挫屈をなす。故に軌條が挫屈をなす時には、枕木にその長さの方向の最大抵抗力が働いて居ると考へられる。

又軌條が挫屈をなす時は挫屈箇所前後に續く軌條は、挫屈箇所に向つて延びて來るのであるが、これに伴ひ枕木も軌道方向に移動する。この時の軌道方向の道床抵抗力も、その最大値に達して居ると見做して計算を進めることとする。

軌條は枕木位置に於てのみ横方向の抵抗力を受けるのであるが、一般に軌條が挫屈した場合には、その挫屈軌條の長さは枕木間隔に較べて非常に長いから枕木に依る抵抗力を各枕木間隔に配分し軌條は全長に互り連續的に横抵抗力を受けると考へられる。軌條は又その枕木接觸部分に於て、枕木より軌道方向の抵抗力を受けるが横抵抗力と同様に各枕木間隔に配分して考へる。

枕木を引き抜く時の最大抵抗力を T とし、枕木間隔を a とすれば、片側軌條の受ける單位長さ當りの最大抵抗力は

$$g = \frac{T}{2a} \dots\dots\dots(1)$$

で與へられ、又枕木を軌道方向に押した時の最大抵抗力を C とする時は、片側軌條の受ける單位長さ當りの軌道方向の最大抵抗力は

$$r = \frac{C}{2a} \dots\dots\dots(2)$$

で與へられる。

然して一般に

$$r = 2g \dots\dots\dots(3)$$

と考へることが出来る。

直線軌道の長さの方向を x とし、 P なる壓力を受けて挫屈した場合に於ける軌條の横移動量を y として、挫

屈部分には横移動量に關係なく g なる一様の抵抗力が働くとすれば、 y と x との間には次の關係が成立する。

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{P}{EJ} \frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{g}{EJ} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

上式に於て±の符號は、 y が (+) の場合に $+\frac{g}{EJ}$ を用ひ、 y が (-) の場合に $-\frac{g}{EJ}$ を用ふ。

茲に J : 軌條の垂直軸の周りの断面二次モーメント

y が正なる部分のみを考へる時は

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{P}{EJ} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{g}{EJ} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

これを解けば

$$y = A \cos \rho x + B \sin \rho x - \frac{g}{2P} x^2 + Cx + D \dots\dots\dots(6)$$

但し $\rho = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$

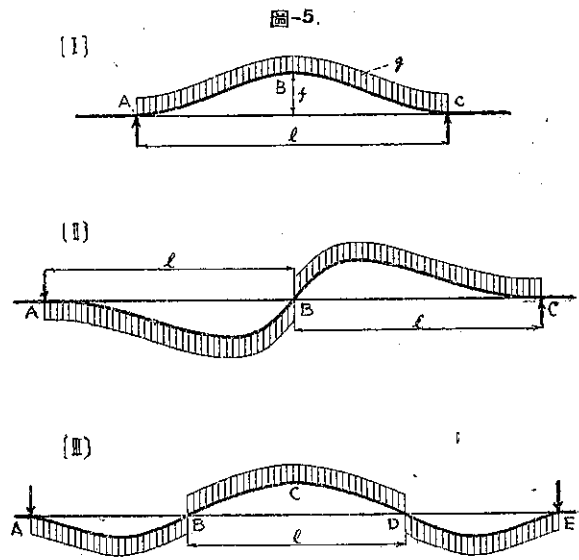
A, B, C, D は境界條件に依り定まる常數である。撓屈した後の軌條の取る形としては、圖-5の各種の場合が考へられる。

この他にも撓屈した軌條の波が更に數多く連続した場合が考へられるが、これは [III] に依り代表することとする。試験軌道に於ける撓屈試験の結果に依れば、[I] の形の撓屈が多く見られたがその場合 ABC なる撓屈軌條の前後に隣れる部分は完全に直線ではなく幾分反對側に移動を生じて居る。即ち [III] の撓屈形に於て AB 及び DE なる部分が非常に短い場合に相當する。

曲線軌道に於ける撓屈形は殆ど [I] の形に限られて居る。

直線軌道に於ては稀に [II] 又は [III] なる形の撓屈があらはれる。これらの場合にも、この圖に示した撓屈軌條の前後に隣れる部分は完全に直線ではなく幾分反對方向に移動を生じてゐる。撓屈形 [II] は B 點に關し左右對稱である。

微分方程式の解なる (6) 式の係數をきめるに當り、その境界條件としては次の事柄が考へられる。撓屈形 [I], [II] に於ける A 點及び C 點に於ては撓屈した軌條と撓屈しない直線軌條とが連続する爲、(i) 軌條の横移動量が 0 となり、(ii) 軌條の切線方向が元の軌條方向と一致し、(iii) 軌條に生ずる曲げモーメントが 0 になることを必要とする、(iv) 更に此の點に於ては前後の軌條に生ずる剪斷力が一致しなければならないが、直線部分に於ける剪斷力は 0 であるから A 點に於て集中荷重が働かない限りは、撓屈せる軌條の A 點に於ても剪斷力は 0 とならねばならぬ。然るにこれ等 4 個の條件を満す解は得られない。即ち斯様な條件を満す撓屈形は生じないこととなる。



前述の如く試験軌道に於ける撓屈の試験に於ても上記の (i) から (iv) までの全部の條件を充す A 點及び C 點は存在せず、圖-6 に示す如くこの前

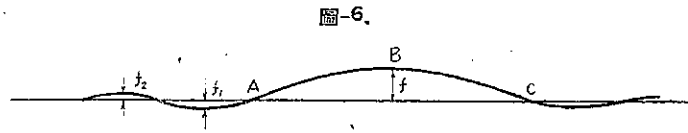


圖-6.

後に續く部分が僅か乍ら反對方向に張出して撓屈部分の剪斷力に平衡を保つてゐる。

然るに今斯くの如くして軌條の撓屈の形を求める目的を考へて見るに P の大きさを決定する爲に、撓屈せる軌條の撓屈前後の長さの變化が必要であり、圖-6 に於て f により生ずる軌條の長さの變化は f_1 に依るものに比し甚だ大きい。故にこの目的の爲には撓屈の形を圖-5 [I] 又は [II] の如く見做し A 及び C 點に集中荷重が働くと考へてこれ等の點に於て満すべき條件としては $y=0, y'=0, y''=0$ に限ることとする。

撓屈形 [II] に於ては更に B 點に關し左右對稱であるから、この位置に於て $y=0, y''=0$ なる條件を必要とする。撓屈形 [III] に於てはその境界條件が甚だ複雑なる爲、この代りに圖-7 の如く撓屈した軌條の同形の波が、左右に數多く連續した場合を取扱ふ。

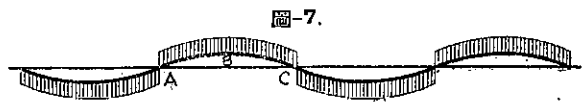


圖-7.

此の場合の境界條件としては A 及び C 點に於て、 $y=0$ 及び $y''=0$ なることを必要とする。

撓屈形 [I] は、撓屈形 [II] を求める場合に同時に求められるので、先づ撓屈形 [II] の場合につき (6) 式の係数をきめることとする。圖-5 [II] に於て B 點を坐標の原點とし、これより右の部分について考へることとする。

$$x=0 : y=0, y''=0$$

$$\begin{cases} A+D=0 \\ -A\rho^2 - \frac{q}{P} = 0 \end{cases}$$

これより

$$A = -\frac{q}{P\rho^2}$$

$$D = \frac{q}{P\rho^2}$$

又 BC の距離を l とすれば

$$x=l : y=0, y'=0, y''=0$$

$$\begin{cases} B \sin \rho l + Cl - \frac{q}{P\rho^2} \cos \rho l - \frac{q}{2P} l^2 + \frac{q}{P\rho^2} = 0 \\ B\rho \cos \rho l + C + \frac{q}{P\rho} \sin \rho l - \frac{q}{P} l = 0 \\ -B\rho^2 \sin \rho l + \frac{q}{P} \cos \rho l - \frac{q}{P} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

この 3 個の式が同時に成立する爲には、下の關係が成立たねばならぬ。

$$\frac{2q\rho l}{P} \sin \frac{\rho l}{2} \left(\sin \frac{\rho l}{2} - \frac{\rho l}{2} \cos \frac{\rho l}{2} \right) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

これより次の 2 種類の解が得られる。

$$(i) \quad \sin \frac{\rho l}{2} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

又は

$$(ii) \quad \sin \frac{\rho l}{2} - \frac{\rho l}{2} \cos \frac{\rho l}{2} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

後に述べる如く (i) は撓屈形 [II] を與へ、(ii) は撓屈形 [I] を與へてゐる。次にこれ等各々の場合について (6) 式の係数をきめる。

1. 撓屈形 [II]

$$\sin \frac{\rho l}{2} = 0$$

$$\rho l = 2n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(7) 式より B 及び C を求めれば

$$B = \frac{ql}{2P\rho}$$

$$C = \frac{ql}{2P}$$

$$\therefore y = -\frac{q}{P\rho^2} \cos \rho x + \frac{ql}{2P\rho} \sin \rho x - \frac{q}{2P} x^2 + \frac{ql}{2P} x + \frac{q}{P\rho^2} \dots\dots\dots (11)$$

(11) 式に於て $n=1$ 即ち $l=2\pi/\rho$ とした場合が、撓屈形 [II] に相當する。 $n=2, 3, \dots$ とした場合には、 B C 間に多くの極大及び極小の點を持つ曲線を與へ、これは不安定な平衡状態である爲、實際には生じない。故にこゝでは $n=1$ の場合についてのみ撓屈壓力の計算を行ふ。(11) 式に於て $\rho l=2\pi$ とおけば

$$y = \frac{q}{P\rho^2} \left(-\cos \rho x + \pi \sin \rho x - \frac{1}{2} \rho^2 x^2 + \pi \rho x + 1 \right) \dots\dots\dots (12)$$

$$y' = \frac{q}{P\rho} (\sin \rho x + \pi \cos \rho x - \rho x + \pi)$$

軌條が撓屈した後の軌條の伸び Δl は、撓屈軌條 BC と直線 BC との長さの差で與へられる。撓屈軌條の全長に互り y' を 1 に比し甚だ小さい數と考へれば

$$\begin{aligned} \Delta l &= \int_0^l \sqrt{1+y'^2} dx - l \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{P^2 \rho^2} \int_0^l (\sin \rho x + \pi \cos \rho x - \rho x + \pi)^2 dx \\ &= \frac{5}{6} \pi (3 + \pi^2) \frac{q^2}{P^2 \rho^2} = 33.69 \frac{q^2}{P^2 \rho^2} \\ &= 33.69 q^2 (EJ)^{3/2} P^{-7/2} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

撓屈の長さ l は

$$\begin{aligned} l &= \frac{2\pi}{\rho} \\ &= 6.283 \sqrt{\frac{EJ}{P}} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

こゝに得られた Δl は、撓屈をなす直前の軌條内の壓力 P_0 より、撓屈した後の壓力 P に下つた爲に生じた軌

條の彈性的伸びと一致するわけである。挫屈した後の軌條内の壓力は ABC 間に於ては P となるが、これより前後に續いた部分 L の間で、 P より挫屈前の壓力 P_k に移ると考へられる。

CD 間に於て壓力は一樣に變化するとし、單位長さ當りの壓力の増加を (2) 式で與へられた r とすれば

$$P_k = P + rL \dots\dots\dots (15)$$

となる。

BC 間の軌條が挫屈前の壓力 P_k より、挫屈後の壓力 P となつた爲の彈性的伸びは

$$\frac{(P_k - P)L}{EA} = \frac{rL}{EA}$$

で與へられ、又 CD 間の軌條の彈性的伸びは

$$\frac{(P_k - P)L}{2EA} = \frac{rL^2}{2EA}$$

で與へられる。これ等の合計が Δl に一致せねばならない。

$$\therefore \Delta l = \frac{rL}{EA} + \frac{rL^2}{2EA} \dots\dots\dots (16)$$

これより rL を求めれば

$$rL = \sqrt{2EA\Delta l + r^2L^2} - rL \dots\dots\dots (17)$$

この値を (15) 式に入れれば

$$P_k = P + \sqrt{2EA\Delta l + r^2L^2} - rL$$

上式の Δl に (16) 式を入れれば

$$P_k = P + \sqrt{67.38 EA(EJ)^{3/2} r g^2 P^{-7/2} + 39.48 EJr^2 P^{-1} - 6.28 r \sqrt{\frac{EJ}{P}}} \dots\dots\dots (18)$$

(18) 式に於て $r = 2g$ とおけば

$$P_k = P + \sqrt{134.76 EA(EJ)^{3/2} g^2 P^{-7/2} + 157.91 EJg^2 P^{-1} - 12.57 g \sqrt{\frac{EJ}{P}}} \dots\dots\dots (19)$$

(18) 式又は (19) 式より見られる如く、 P_k には或最小値があり、この値より小さい壓力では挫屈が起り得ないことが分る。今假に P_k の最小値を挫屈壓力と呼ぶこととし、この意義については後章に述べることとする。

(18) 式より挫屈壓力を見出すには、 P に種々の値を入れて P_k を計算し、 P と P_k との関係圖を畫き、此れより P_k の最小値を求めればよい。一般に l は L に較べて甚だ小さいので、(16) 式に於て右邊の第 1 項を捨てれば、(18) 式は

$$P_k = P + \sqrt{67.38 EA(EJ)^{3/2} r g^2 P^{-7/4}} \dots\dots\dots (20)$$

(20) 式に於て P_k を P につき微分して P_k の最小値を與ふる P の値を求めれば

$$P = \left(\frac{7}{4} \sqrt{67.38 EA(EJ)^{3/2} r g^2} \right)^{4/11}$$

この値を (20) 式に入れれば

$$P_k = 4.141 \{EA(EJ)^{3/2} r g^2\}^{2/11} \dots\dots\dots (21)$$

$r=2j$ とおけば

$$P_k = 4.696 \{E \cdot I (EJ)^{3/2} \rho^2\}^{2/11} \dots\dots\dots (22)$$

2. 撓屈形 [I]

$$\sin \frac{\rho l}{2} - \frac{\rho l}{2} \cos \frac{\rho l}{2} = 0$$

$$\therefore \tan \frac{\rho l}{2} = \frac{\rho l}{2}$$

斯くの如き関係を満す $\rho l/2$ を求めれば

$$\frac{\rho l}{2} = 4.4934, \quad 7.7253, \dots\dots$$

$$\sin \rho l = \frac{4\rho l}{4 + \rho^2 l^2}$$

$$\cos \rho l = \frac{4 - \rho^2 l^2}{4 + \rho^2 l^2}$$

(7) 式より B 及び C を求めれば

$$B = -\frac{gl}{2P\rho}$$

$$C = \frac{gl}{2P}$$

$$\therefore y = -\frac{g}{P\rho^2} \cos \rho x - \frac{gl}{2P\rho} \sin \rho x - \frac{g}{2P} x^2 + \frac{gl}{2P} x + \frac{g}{P\rho^2} \dots\dots\dots (23)$$

上式に於て l の代りに $2s$ とおき, x の代りに $x+s$ とおけば

$$y = \frac{g}{P\rho^2} \left(\pm \sqrt{1 + \rho^2 s^2} \cos \rho x - \frac{1}{2} \rho^2 x^2 + 1 + \frac{1}{2} \rho^2 s^2 \right) \dots\dots\dots (24)$$

$$\rho s = 4.4934, \quad 7.7253, \dots\dots$$

上式に於て \pm の符號は

$\rho s = 4.4934, \dots\dots$ の時は (+) を用ひ

$\rho s = 7.7253, \dots\dots$ の時は (-) を用ふ。

$\rho s = 7.7253, \dots\dots$ の場合には前と同様に不安定な平衡状態であるから, こゝでは

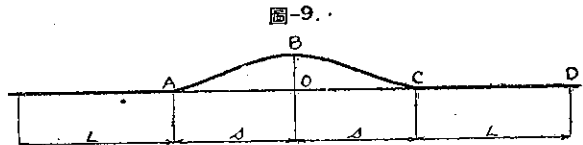
$$\rho s = 4.4934 \dots\dots\dots (25)$$

の場合のみを取扱ふ。従つて (24) 式は

$$y = \frac{g}{P\rho^2} (4.603 \cos \rho x - 0.5 \rho^2 x^2 + 11.095) \dots\dots\dots (26)$$

$$y' = \frac{g}{P\rho} (-4.603 \sin \rho x - \rho x)$$

(26) 式は x に對して偶函數なる爲, y 軸に關して左右對稱となつて居り, 又 $x = \pm s$ の位置に



於て $y=0, y'=0, y''=0$ となる。従つて此れは撓屈形 [I] を與へることとなる。

前節の場合と同様に BC 間の撓屈軌條の長さ s と直線 OC との差 Δs を求めれば

$$\begin{aligned}
 \Delta s &= \int_0^s \sqrt{1+y'^2} dx - s \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^s y'^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{P^2 \rho^2} \int_0^s (-4.693 \sin \rho x - \rho x)^2 dx \\
 &= \frac{5}{12} \cdot 4.693^2 \frac{q^2}{P^2 \rho^2} \\
 &= 37.80 \frac{q^2}{P^2 \rho^2} \\
 &= 37.80 q^2 (EJ)^{3/2} P^{-1/2} \dots \dots \dots (27)
 \end{aligned}$$

(25) 式に依り

$$s = \frac{4.4934}{\rho} = 4.4934 \sqrt{\frac{EJ}{P}}$$

撓屈の長さ l は

$$\begin{aligned}
 l &= 2s \\
 &= 8.987 \sqrt{\frac{EJ}{P}} \dots \dots \dots (28)
 \end{aligned}$$

こゝに得られた Δs は、撓屈前の軌條内の壓力 P_k より、撓屈した後の壓力 P に下つた爲に生じた軌條の弾性的伸びと一致するわけである。従つて

$$\Delta s = \frac{rsL}{EA} + \frac{rL^2}{2EA} \dots \dots \dots (29)$$

これより rL を求め撓屈前の壓力 P_k を計算すれば

$$\begin{aligned}
 P_k &= P + rL \\
 &= P + \sqrt{75.60EA(EJ)^{3/2} r g^2 P^{-1/2} + 20.19EJr^2 P^{-1}} - 4.49 r \sqrt{\frac{EJ}{P}} \dots \dots \dots (30)
 \end{aligned}$$

上式に於て r=2g とおけば

$$P_k = P + \sqrt{151.20EA(EJ)^{3/2} g^2 P^{-1/2} + 80.76EJg^2 P^{-1}} - 8.99g \sqrt{\frac{EJ}{P}} \dots \dots \dots (31)$$

(30) 式又は (31) 式に於て、P を種々に變化して P_k の最小値を求めればこれが撓屈壓力となる。

一般に s は L に較べて甚だ小さいので (29) 式に於て右邊の第 1 項を捨れば (30) 式は

$$P_k = P + \sqrt{75.60EA(EJ)^{3/2} r g^2 P^{-1/2}} \dots \dots \dots (32)$$

(32) 式に於て P_k を P に就き微分した式を 0 とおいて P_k の最小値を與へる P の値を求め、これより撓屈壓力を計算すれば

$$P_k = 4.229 \{EA(EJ)^{3/2} r g^2\}^{2/11} \dots \dots \dots (33)$$

r=2g とおけば

$$P_k = 4.796 \{EA(EJ)^{3/2} g^2\}^{2/11} \dots \dots \dots (34)$$

(21) 式と (33) 式又は (22) 式と (34) 式とを比較すれば、撓屈形 [II] に於ける撓屈壓力は、撓屈形 [I] に於

ける撓屈壓力より 2% 小さいことが認められる。故にこれ等の撓屈壓力は略等しいと做すことが出来る。

3. 撓屈形 [III]

圖-7 に於て撓屈軌條 ABC の形を求めるに當り、 y 軸を B 點を通るようにおけば、 x に關して y は偶函數となる。故に (6) 式に於て

$$B=0, \quad C=0$$

となる。又 BC の距離を s とすれば、 $x=s$ に於て

$$\begin{cases} y=0, & y''=0 \\ \left\{ \begin{array}{l} A \cos \rho s - \frac{g}{2P} s^2 + D = 0 \\ -A \rho^2 \cos \rho s - \frac{g}{P} = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

これより

$$\begin{cases} A = -\frac{g}{P \rho^2 \cos \rho s} \\ D = \frac{g}{2P} s^2 + \frac{g}{P \rho^2} \end{cases}$$

$$y = -\frac{g \cos \rho x}{P \rho^2 \cos \rho s} - \frac{g}{2P} x^2 + \frac{g}{2P} s^2 + \frac{g}{P \rho^2} \dots \dots \dots (35)$$

撓屈形 [I] 及び [II] の場合には ρl 又は ρs の値は、境界條件より必然的に定まつたのであるが、この場合には ρs は境界條件よりは確定せず、たゞ下に示した範囲内にあることが必要である。

$$\frac{1}{2} \pi < \rho s < \frac{3}{2} \pi \dots \dots \dots (36)$$

(35) 式より

$$y' = \frac{g \sin \rho x}{P \rho \cos \rho s} - \frac{g}{P} x$$

BC 間の撓屈軌條の長さ直線 OG との差 Δs を求めれば

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int_0^s \sqrt{1+y'^2} dx - s \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s y'^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{g^2}{P^2 \rho^3} \int_0^s \left(\frac{\sin \rho x}{\cos \rho s} - \rho x \right)^2 dx \\ &= \frac{g^2}{2P^2 \rho^3} \left(\frac{5}{2} \rho s + \frac{1}{3} \rho^3 s^3 + \frac{1}{2} \rho s \tan^2 \rho s - \frac{5}{2} \tan \rho s \right) \dots \dots \dots (37) \end{aligned}$$

こゝに得られた Δs は、撓屈前の軌條壓力 P_k より、撓屈後の壓力 P に下つた爲に生じた BC 間の軌條の彈性的伸びと一致するわけである。従つてこれ等の間に次式の關係が成立する。

$$P_k = P + \frac{EA \Delta s}{s}$$

$$= P + \frac{EA}{s} \frac{g^2}{2P^2 \rho^3} \left(\frac{5}{2} \rho s + \frac{1}{3} \rho^3 s^3 + \frac{1}{2} \rho s \tan^2 \rho s - \frac{5}{2} \tan \rho s \right)$$

上式に於て

$$P = EJ\rho^2, \quad \rho s = \varphi$$

とおけば

$$P_k = EJ\rho^2 + \frac{Ag^2}{2EJ^2\rho^2} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3}\varphi^2 + \frac{1}{2}\tan^2\varphi - \frac{5}{2}\frac{\tan\varphi}{\varphi} \right) \dots\dots\dots(38)$$

撓屈壓力を求めるとは、 P 及び s を種々に變化した場合の P_k の最小値を計算するのであるが、その代りに (38) 式に於て φ 及び ρ を獨立變數と考へて、 P_k の最小値を求めてもよい。

(38) 式に於て

$$\frac{\partial P_k}{\partial \varphi} = 0$$

とおけば

$$\varphi = 2.7157 = 155^\circ 36' \dots\dots\dots(39)$$

が得られる。従つて

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{3}\varphi^2 + \frac{1}{2}\tan^2\varphi - \frac{5}{2}\frac{\tan\varphi}{\varphi} = 5.4789$$

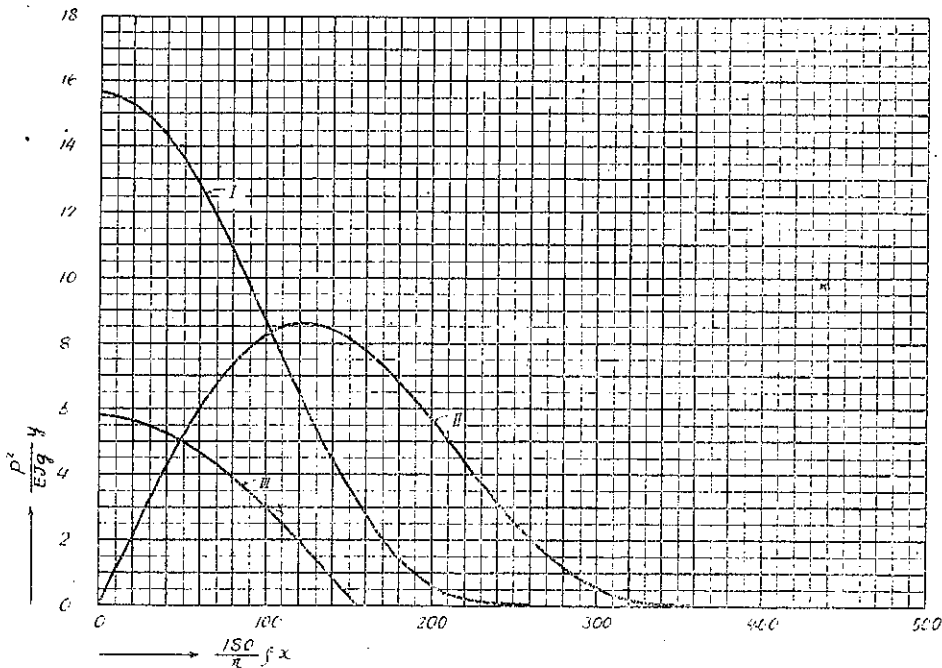
この値を (38) 式に入れ、然る後

$$\frac{\partial P_k}{\partial \rho} = 0$$

とおけば

$$\rho^2 = \sqrt[4]{\frac{3 \times 5.4789 Ag^2}{2E^2 J^3}} \dots\dots\dots(40)$$

圖-10.



この値を (38) 式に入れれば P_k の最小値として

$$P_k = \sqrt[4]{25.974E^2AJg^2} \dots\dots\dots(41)$$

が得られる。

(39) 式に依る φ の値を (35) 式に入れれば

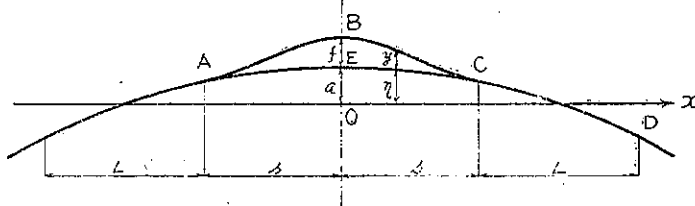
$$y = \frac{g}{P\rho^2}(1.098 \cos \rho x - 0.5 \rho^2 x^2 + 4.688) \dots\dots\dots(42)$$

挫屈形 [II] 及び [I] の挫屈壓力を示す (21) 式及び (33) 式は、式の形が略々似てゐるが、挫屈形 [III] の挫屈壓力を示す (41) 式はこれ等に較べて非常に異り、式中に r が全然含まれて居ない。又 E, A, J, g の冪数が異つてゐる。然るにこれ等の式に依り計算した P_k の値は、後の計算例に示す如く略々一致して居る。(12) 式、(26) 式及び (42) 式で示す如く、挫屈形 [I], [II], [III] に於て ρx と $\frac{P\rho^2}{g}y$ との関係は、 P, E, J, g に關係なく常に一定であることが認められ、この關係を圖-10 に示す。即ちこれは軌條が等しい壓力で挫屈した場合に於ける各挫屈形の比較となる。

5. 曲線軌道に於ける軌條の挫屈壓力

曲線軌道に於て軌條が挫屈する場合には、軌條は常に挫屈形 [I] の形となる。

圖-11.



軌道の曲線半径 R が s に比し甚だ大きい場合には、挫屈する前の軌條の形は下の式であらはされる。

$$\eta = a - \frac{x^2}{2R} \dots\dots\dots(43)$$

$$\eta' = -\frac{x}{R}$$

$$\eta'' = -\frac{1}{R}$$

この場合 (5) 式は下の如くなる。

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{P}{EJ} \frac{d^2}{dx^2}(y + \eta) + \frac{g}{EJ} = 0 \dots\dots\dots(44)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{P}{EJ} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{EJ} \left(g - \frac{P}{R} \right) = 0$$

これは (5) 式に於て、 g の代りに $g - \frac{P}{R}$ とおいたものに相當する。この式を

$$x = \pm s \quad \text{に於て}$$

$$y = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = 0$$

と云ふ條件の下に解けば、(26)式に於て g の代りに $g - \frac{P}{R}$ と入れたものが得られる。即ち

$$y = \frac{1}{P\rho^2} \left(g - \frac{P}{R} \right) (4.603 \cos \rho x - 0.5 \rho^2 x^2 + 11.095) \dots\dots\dots (45)$$

但し $\rho = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$

$$y' = \frac{1}{P\rho} \left(g - \frac{P}{R} \right) (-4.603 \sin \rho x - \rho x)$$

BC 間の挫屈軌條の長さ、挫屈前に於ける EC 間の軌條の長さとの差 Δs を計算すれば

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int_0^s \sqrt{1+(y'+\eta')^2} dx - \int_0^s \sqrt{1+\eta'^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s y'^2 dx + \int_0^s y' \eta' dx \\ &= 37.80 \frac{1}{P^2 \rho^2} \left(g - \frac{P}{R} \right) \left(g - \frac{P}{5R} \right) \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

こゝに得られた Δs は挫屈前の軌條内の壓力 P_k より、挫屈した後の壓力 P に下つた爲に生じた軌條の弾性的伸びと一致するわけである。従つて

$$\Delta s = \frac{r^2 L}{EA} + \frac{r J^2}{2EA}$$

これより rL を求め、挫屈前の壓力 P_k を計算すれば

$$\begin{aligned} P_k &= P + rL \\ &= P + \sqrt{2EA r \Delta s + r^2 s^2} - r s \end{aligned} \dots\dots\dots (47)$$

但し

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{37.80 EJ \sqrt{EJ}}{P^2 \sqrt{P}} \left(g - \frac{P}{R} \right) \left(g - \frac{P}{5R} \right) \\ s &= \frac{4.4934 \sqrt{EJ}}{\sqrt{P}} \end{aligned}$$

上式に於て P に種々の値を入れて P_k の最小値を求めれば、これが挫屈壓力となる。

(47) 式に於て $r=2g$ とおけば

$$P_k = P + 2\sqrt{EA g \Delta s + g^2 s^2} - 2gs \dots\dots\dots (48)$$

6. 計 算 例

枕木がその長さの方向に移動する時の最大抵抗力を、碎石砂利道床に於て 600 kg とし、篩砂利道床に於て 350 kg とし、又枕木が軌道方向に移動する時の最大抵抗力をこれ等の値の 2 倍として、直線軌道に於ける挫屈壓力を計算すれば表-3 の如くなる。

但し挫屈形 [I] 又は挫屈形 [II] に依る挫屈壓力は前述の如く、(31) 式又は (19) 式に依り P と P_k との関係圖を畫き、 P_k の最小値として得られるが、これ等の略算法たる (34) 式又は (22) 式に依る時は比較的簡單に計算し得る。又挫屈形 [III] に依る挫屈壓力も (41) 式に依り容易に計算せられる。これ等の値を併せて表-1 に示した。

圖-8 に 37 kg 軌條の篩砂利道床に於ける、挫屈形 [I] の挫屈壓力を求める爲に畫いた P と P_k との關係圖を示す。この圖に於て P_k の最小値が挫屈壓力を與へることとなる。

表-3. 直線軌道に於ける挫屈壓力

軌條重量 (kg/m)	枕木間隔 (cm)	道床	g (kg/cm)	挫屈形 [I]		挫屈形 [II]		挫屈形 [III]
				(31)式 (t)	(34)式 (t)	(19)式 (t)	(22)式 (t)	(41)式 (t)
50	62	碎石 篩砂利	4.84	86.5	91.1	82.8	89.2	89.8
			2.82	64.7	68.1	61.8	66.6	68.6
37	71	碎石 篩砂利	4.23	66.1	69.7	63.3	68.2	68.5
			2.46	49.4	51.9	47.4	50.9	52.3
30	77	碎石 篩砂利	3.90	54.4	57.5	52.1	56.3	56.4
			2.27	40.8	42.9	39.1	42.0	43.1

表-3 に示す如く、挫屈形 [I] 又は [II] に於て略算法たる (34) 式又は (22) 式に依り挫屈壓力を計算する時は、(31) 式又は (19) 式に依り計算せられた挫屈壓力に比し、挫屈形 [I] に於ては 5% 大なる値を與へ、挫屈形 [II] に於ては、8% 大なる値を與へることとなる。又 (19) 式と (31) 式とを比較すれば、挫屈形 [II] に依る挫屈壓力は、挫屈形 [I] に依る挫屈壓力より 4% 小さく、(41) 式と (31) 式とを比較する時には、挫屈形 [III] に依る挫屈壓力は挫屈形 [I] に依る挫屈壓力より 4~6% 大きいことが認められる。

上述の如く 3 つの挫屈形の挫屈壓力の間の差は、甚だ僅少ななる爲軌條の挫屈形は挫屈壓力の最も小なる挫屈形 [II] に限らずに、軌條の始めより有する癖により支配されるものと考へられる。

又表-3 に於て碎石篩砂利道床に於ける挫屈壓力と篩砂利道床に於ける挫屈壓力とを比較するに、碎石篩砂利道床に於ては篩砂利道床に於けるより枕木の移動に對する抵抗力が 70% 大きいが、挫屈壓力に於ては 33% 増して居るに過ぎない。

次に曲線軌道に於ける挫屈壓力を計算した結果を表-4 に示す。こゝに於て 50 kg 軌條は特別甲線に、37 kg 軌條は乙線に、30 kg 軌條は丙線に敷設されたるものと考へて、國有鐵道建設規程に依る最小半徑の場合につき計算した。曲線軌道に於ては挫屈形は常に [I] に依るとなし、(48) 式に依り P と P_k との關係圖を畫き、 P_k の最小値として挫屈壓力が得られる。圖-12 に 37 kg 軌條の篩砂利道床、曲線半徑 250 m の場合の P と P_k との關係を併せて畫いた。

圖-12.

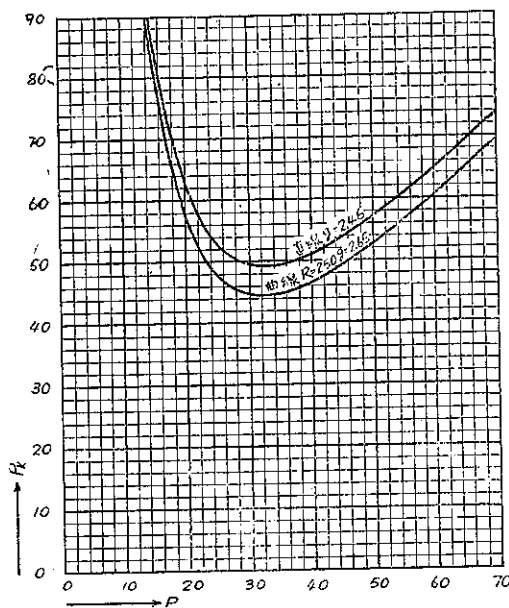


表-4. 曲線軌道に於ける挫屈壓力

軌條重量(kg/m)	曲線半径 (m)	枕木間隔 (cm)	道 床	u (kg/cm)	挫屈壓力 (t)
50	400	59	碎 石	5.08	82.4
			篩 砂 利	2.97	60.4
37	250	66	碎 石	4.54	61.6
			篩 砂 利	2.65	44.6
30	200	71	碎 石	4.22	50.4
			篩 砂 利	2.46	36.2

表-4 に示す如く、曲線軌道に於ても碎石砂利道床に於ける挫屈壓力は、篩砂利道床に於ける挫屈壓力に較べて、36~39% 大きくなつてゐる。又表-4 を直線軌道に於ける挫屈壓力（挫屈形 [I]）に較べる時は、4.0~4.6t 小なることが認められる。又表-4 より挫屈壓力と軌條重量との比を計算すれば、碎石砂利道床に於ては 1650~1680 であるが、篩砂利道床に於ては何れも一致して 1210 である。

7. 張り出し量

軌條が挫屈した場合に、挫屈部分の中央に於ける横移動量は、(26) 式、(42) 式及び (45) 式に於て $w=0$ とおけば得られ、この y の値を張り出し量と稱し、 f を以て表はすこととする。

挫屈形 [I]

$$\left. \begin{aligned} f &= 15.70 \frac{EJ\eta}{P^2} \dots\dots\dots \text{直 線} \\ f &= 15.70 \frac{EJ}{P^2} \left(g - \frac{P}{R} \right) \dots\dots\dots \text{曲 線} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

挫屈形 [III]

$$f = 5.79 \frac{EJ\eta}{P^2} \dots\dots\dots (50)$$

前章の挫屈形 [I] に於ける 37 kg 軌條篩砂利道床の場合の計算例につき、 P の種々の値に對して f の値を計算し、 f と P 、 P_k 及び s との關係を畫けば圖-13 及び圖-14 の如くなる。

此れ等の圖に示す如く、 $f=0$ なる時 P は最大値となり、又この時 P と P_k の値は一致する。この値を $P_{f=0}$ とすればこれは次式により與へられる。

曲線軌道に於て

$$P_{f=0} = gR \dots\dots\dots (51)$$

直線軌道に於ては

$$P_{f=0} = \infty \dots\dots\dots (52)$$

となる。 f が増すに従ひ P の値は單調に減少するが、 P_k の値は一旦減少し再び増加する。軌條に全然癖がなく又最初より軌條全長に亙り、 g なる横抵抗力が働いてゐる場合に、軌條に段々壓力を加へて行き、遂に軌條内の壓力が $P_{f=0}$ に達すれば、軌條は急に挫屈を生じ、 $P_{f=0}$ を通つて引いた水平線が再び P_k の線の交る點まで挫

屈は進行する。然るに一般に軌條には最初から多少の癖があり、又横移動量が少く且つ部分的に道床が弛緩して居る所では、道床の横抵抗力は g より遙かに小さいと考へられ、従つて部分的に gR の値の小なる箇所を生じ、こゝより軌條の撓屈が発生する。一旦撓屈が生ずると撓屈に必要な壓力 P_k が減少する爲、 g の値が増しても撓屈が進行し易くなる。

斯くの如くして軌條の撓屈は $P_f=0$ より遙かに小なる壓力で発生し得るが、然し軌條内の壓力が圖-13 及び圖-14 に示す P_k の最小値より小なる場合には、例へ局部的に撓屈が生じたとは云へ、此れは進行する可能性なく従つて危険な状態には至らない。故に P_k の最小値より小なる壓力では、軌條に撓屈は生じないと云ふことが出来、 P_k の最小値を以て撓屈壓力と名付けた所以である。従つて軌條内の壓力が撓屈壓力に達したから、直ちに撓屈を生ずるとは限らず、撓屈する可能性が生じたと云ふに過ぎない。

圖-13 と圖-14 とを比較するに曲線軌道に於ては P_k の最小値を與へる f の値が、直線軌道に較べて遙かに小さい。故に曲線軌道に於ては、撓屈壓力を超えると直ちに撓屈を生じ易いが、その張出量は比較的少ない。これに反し直線軌道に於ては、撓屈壓力を超えても直ちに撓屈を生じ難いが、一旦撓屈を生じた場合には、その張出量が大きい危険性が高い。

以上は P_k に最小値がある場合であるが、曲線半径 R が小なる場合には

圖-13.

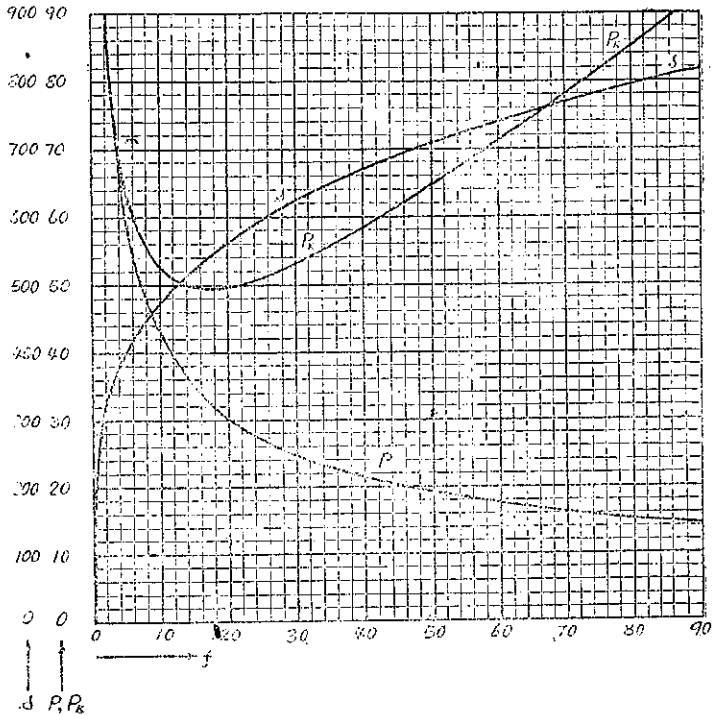
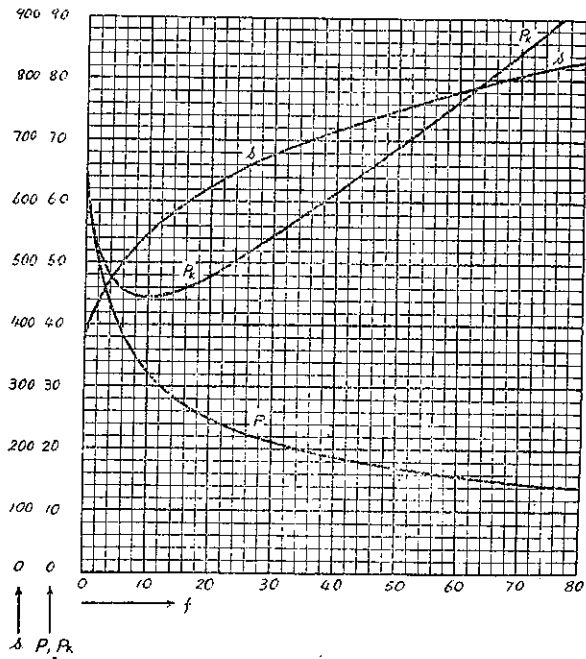


圖-14.



P_k に最小値がなく f が増すと共に、 P_k の値は $P_{f=0}$ の値より単調に増加する場合がある。この場合には $P_{f=0}$ を以て挫屈壓力と見ることが出来る。

8. 實驗値と計算値との比較

昭和 7 年に大宮驛構内に於て、堀越博士に依り軌條の挫屈に關し廣範圍の實驗がなされ、この結果が土木學會誌第 20 卷第 10 號に發表せられて居る。これより直線軌道に於ける挫屈試験の結果挫屈形 [I] となつた場合の挫屈壓力を拾ひ出せば、表-5 に示す如くなる。又試験軌道に於ける軌條の單位長さ當りの横方向及び縦方向の道床の抵抗力 g 及び r は、表-5 に示す如くであり、この値を用ひて (30) 式に依り計算して得た値をその右の欄に掲げる。

表-5. 直線軌道に於ける軌條の挫屈壓力實驗値と計算値との比較

軌條重量 (kg/m)	g (kg/cm)	r (kg/cm)	實驗 値 (t)		計算 値 (t)
				平均	
50	1.73	3.71	57.0	55.5	50.8
			56.2		
			53.2		
37	2.04	4.14	65.4	59.1	54.4
			55.9		
			64.6		
			50.4		
30	1.59	3.42	33.6	34.7	34.0
			31.2		
			35.0		
			39.1		

表-5 に示す如く 50 kg 軌條に於て計算値は實驗値の平均に比し約 10% 小さく、30 kg 軌條に於ては略々一致して居る。 (昭. 18. 5. 5. 受付)