論説報告

第29巻第6號 昭和18年6月

乾燥砂の運動機構に就て (III)

(乾燥砂の運動理論と古典的土壓論の批判)

正會員 最 上 武 雄*

内容梗概

一様な粒よりなる粒狀體の基礎方程式と應力平衡式との關係を論じ，基礎方程式を利用し，剪斷層中で失はれるエネルギーを與へる式を導き，剪斷層中の砂の定常運動は，單位時間に失はれるエネルギーが stational である如き運動であると言ふ定理を證明し，尙ほエネルギーの關係より，堀助教授の行つた，剪斷力と剪斷速度との關係に就ての實驗結果を，エネルギー的見地より考察した。そして，剪斷層の變位を表はす式を導き，實驗結果の說明に役立つ事を述べ，堀助教授の實驗が，剪斷層の變位の測定に依つて，批判し得る事をも導いた。一方不連續運動は，不定常運動に於てのみ存在し得る事を推論し，剪斷試驗の結果と考へ合せて，Reynolds の Dilatancy の原理は，不定常運動に對して，重要な意味を持つてゐるが，定常運動に對しては，其程の意味なく，又 Coulomb の摩擦法則は，定常運動に對してのみ有效である事を考へ合す事に依り，Boussinesq, Rankine, Coulomb の古典理論の基礎の批判が行はれる事，Terzaghi, 服部屋博士の實驗結果も容易に說明される事を論じ，最後に砂の運動理論が，材料力學に於ける塑性理論の參考資料となり得る事を附記した。

目 次

第 1 章 乾燥砂の運動理論

第 1 節 一様な粒よりなる粒狀體の運動基礎方程式と應力平衡方程式

一様な粒よりなる粒狀體の運動基礎方程式は，前に發表した如く[1]，

連續方程式：
$$\frac{\partial\nu}{\partial t}+\frac{\partial(\nu u_0)}{\partial x}+\frac{\partial(\nu v_0)}{\partial y}+\frac{\partial(\nu w_0)}{\partial t}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

運動方程式：
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(\nu\overline{X_x})}{\partial x}+\frac{\partial(\nu\overline{X_y})}{\partial y}+\frac{\partial(\nu\overline{X_z})}{\partial z}=-\frac{m}{\sigma}\frac{d(\nu u_0)}{dt}\\
&\frac{\partial(\nu\overline{Y_x})}{\partial x}+\frac{\partial(\nu\overline{Y_y})}{\partial y}+\frac{\partial(\nu\overline{Y_z})}{\partial z}=-\frac{m}{\sigma}\frac{\partial(\nu v_0)}{dt}\\
&\frac{\partial(\nu\overline{Z_x})}{\partial x}+\frac{\partial(\nu\overline{Z_y})}{\partial y}+\frac{\partial(\nu\overline{Z_z})}{\partial z}=-\frac{m}{\sigma}\frac{d(\nu w_0)}{dt}
\end{aligned}\right. \quad \cdots\cdots(2)$$

---

* 工學士 東京帝國大學助教授

1) 土木學會誌 28 卷 12 號 (昭. 17. 12.): 乾燥砂の運動機構に就て (II)

及び

$$\overline{Y_z}=\overline{Z_y},\quad \overline{Z_x}=\overline{X_z},\quad \overline{X_y}=\overline{Y_x}\quad\cdots\cdots(3)$$

である。但し

ν: 單位體積當りの粒の數

u_0, v_0, w_0: 夫々 x, y, z 軸方向の平均速度成分

m: 一つの粒の平均の質量　　　σ: 一つの粒の平均の直徑

$\overline{X_x}$: 一つの粒が，x=一定なる面にて接してゐる粒に x 軸の正の方向に傳へる力の x 成分の和の平均値

$\overline{Y_z}$: 一つの粒が，z=一定 なる面より接してゐる粒に y 軸の正の方向に傳へる力の y 成分の和の平均値

$\overline{Y_y}, \overline{Z_x}$ 等も上に準じて考へらる可きである。

通常，彈性體又は流體の力學に於て考へられる應力平衡式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\widehat{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\widehat{xz}}{\partial z}&=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial\widehat{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\widehat{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\widehat{yz}}{\partial z}&=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\ \frac{\partial\widehat{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\widehat{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\widehat{zz}}{\partial z}&=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

と，(2) なる基礎方程式との關係を見るのに，例へば (2) の第 1 式をとり，此れを次の如くに書き直して見る。即ち

$$\frac{\partial(\nu\sigma\overline{X_x})}{\partial x}+\frac{\partial(\nu\sigma\overline{X_y})}{\partial y}+\frac{\partial(\nu\sigma\overline{X_z})}{\partial z}=-\frac{m\nu dxdydz}{dxdydz}\frac{d(\nu u_0)}{dt}$$

今　　$\sigma\to 0,\qquad \nu\to\infty,\qquad \frac{d\nu}{dt}\to 0$

とすれば

$$\lim(\nu\sigma\overline{X_x})=\lim\left(\nu\sigma dydz\frac{\overline{X_x}}{dydz}\right)=\widehat{xx}$$

$$\lim(\nu\sigma\overline{X_y})=\lim\left(\nu\sigma dzdx\frac{\overline{X_y}}{dzdx}\right)=\widehat{xy}$$

$$\lim(\nu\sigma\overline{X_z})=\lim\left(\nu\sigma dxdy\frac{\overline{X_z}}{dxdy}\right)=\widehat{xz}$$

$$\lim\frac{m\nu dxdydz}{dxdydz}=\rho$$

となり，$\overline{X_x}$ 等を考へる時は壓縮を正に取つてゐる譯であるから，(2) の各式は，以上考へた如き極限に於て(4)の各式となる。

扨て應力なるものは，分子力の 1 種の平均値を考へてゐる譯なのだから。以上の事から考へると，(2) の基礎方程式は，平均をとる過程を，其のまゝに殘して，極限化を未だ行はないものであると考へる事が出來る。

第 2 節　不連續運動に就て

箱に砂を塡め一方の側壁を仆す實驗に於ても，又は剪斷試驗の場合に於ても，例へば，是から述べる處に最も

關係の深い剪斷試験に於て，

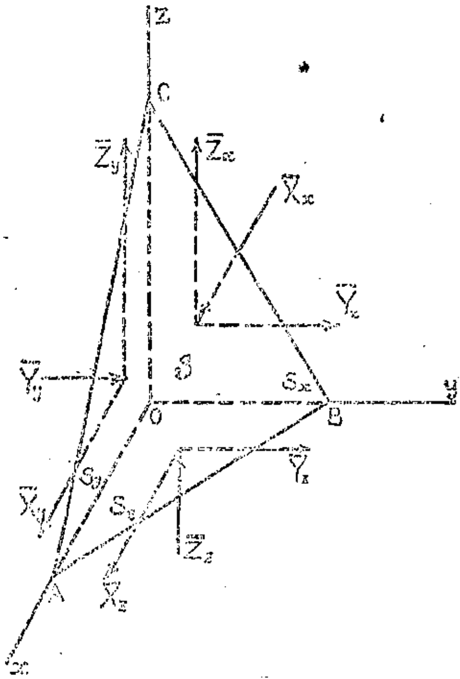
$$a=\frac{\text{移動量}}{\text{平均浮上量}}:\ \text{移動量}$$

$$\frac{\text{浮上力}}{\text{剪斷力}}:\ \text{移動量}$$

$$\frac{\text{浮上力}}{\text{剪斷力}}:\ \text{剪斷力}$$

等をあらはす曲線を描くと，不連續的運動が生じて居り[2]，壁を什す實験の場合に調べた如く[3]，此不連續運動は考へて居る體積内の變位の不連續から生ずる如く想像される。處が剪斷試験の結果から見ると，運動が定常になると，不連續運動は，明らかには生じない。卽ち剪斷層での運動が定常になれが，少くも剪斷層內での運動は，連續的と見做し得ると思ふ。尙ほ，不連續運動は，古典的土壓論の基礎の批判に役立ち得る希みがあるが，是に就ては後に述べる。

圖-1.



第 3 節　運動せる砂中で消費されるエネルギー

先づ $\overline{X_x}, \overline{Y_z}$ 等も，應力成分に似た變換式に依つて，變換される事を示さう。圖-1 の如き四面體の平衡を考へる。面 ABC を通じて傳達される，$\overline{X_x}, \overline{Y_z}$ 等の如き意味に於ける力の x, y, z 成分を夫々 $\overline{X_\nu}, \overline{Y_\nu}, \overline{Z_\nu}$ とし，四面體の體積を V とすれば

$$-\overline{X_\nu}v\sigma S+\overline{X_x}v\sigma S_x+\overline{X_y}v\sigma S_y$$

$$+\overline{X_z}v\sigma S_z+mvV\frac{du_0}{dt}=0$$

$$\therefore\qquad \overline{X_\nu}=l_1\overline{X_x}+m_1\overline{X_y}+n_1\overline{X_z}+\frac{mV}{\sigma S}\frac{du_0}{dt}$$

他も同樣にして求められる。玆に l_1, m_1, n_1 は面 ABC の法線の方向餘弦である。依つて結局

$$\left.\begin{aligned}\overline{X_\nu}&=l_1\overline{X_x}+m_1\overline{X_y}+n_1\overline{X_z}+\frac{mV}{\sigma S}\frac{du_0}{dt}\\ \overline{Y_\nu}&=l_1\overline{Y_x}+m_1\overline{Y_y}+n_1\overline{Y_z}+\frac{mV}{\sigma S}\frac{dv_0}{dt}\\ \overline{Z_\nu}&=l_1\overline{Z_x}+m_1\overline{Z_y}+n_1\overline{Z_z}+\frac{mV}{\sigma S}\frac{dw_0}{dt}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

となる。應力の場合と異り，四面體を無限に小さくした極限を考へる譯に行かないから，最後の項が殘る。

扨て，外力が粒狀體の外から粒狀體になす仕事の割合（單位時間になす仕事）を $(-dW/dt)$ とすれば

$$\frac{dW}{dt}=\int(l_1\overline{X_\nu}v\sigma u_0+m_1\overline{Y_\nu}v\sigma v_0+n_1\overline{Z_\nu}v\sigma w_0)dS\cdots\cdots(6)$$

但し，積分は，考へてゐる粒狀體を圍む面積全體に就て行ひ，l_1, m_1, n_1 は dS なる表面の法線の方向餘弦であ

2) 土木學會誌 28 卷 12 號前出
3) 土木學會誌 25 卷 5 號（昭. 17. 5.）：乾燥砂の運動機構に就て (I)

る。(6) 式に (5) 式を代入すれば

$$\frac{dW}{dt}=\int[(\overline{X}_x\nu u_0+\overline{X}_y\nu v_0+\overline{X}_z\nu w_0)l_1+(\overline{Y}_x\nu u_0+\overline{Y}_y\nu v_0+\overline{Y}_z\nu w_0)m_1$$

$$+(\overline{Z}_x\nu u_0+\overline{Z}_y\nu v_0+\overline{Z}_z\nu w_0)n_1]dS$$

$$+\int_V\left(\nu u_0\frac{du_0}{dt}+\nu v_0\frac{dv_0}{dt}+\nu w_0\frac{dw_0}{dt}\right)dv \quad\cdots\cdots(7)$$

最後の積分は，表面に近い薄い殼狀の體積に就て行ふ。(7) 式を Green の定理に依つて書き直すと

$$\frac{dW}{dt}=\sigma\int\Big[\left\{\frac{\partial(\nu\overline{X}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\nu\overline{X}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\nu\overline{X}_z)}{\partial z}\right\}u_0+\left\{\frac{\partial(\nu\overline{Y}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\nu\overline{Y}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\nu\overline{Y}_z)}{\partial z}\right\}v_0$$

$$+\left\{\frac{\partial(\nu\overline{Z}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\nu\overline{Z}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\nu\overline{Z}_z)}{\partial z}\right\}w_0\Big]dv$$

$$+\sigma\int\Big[\nu\overline{X}_x\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\overline{Y}_y\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\overline{Z}_z\frac{\partial w_0}{\partial z}+\nu\overline{Y}_z\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)+\nu\overline{Z}_x\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$+\nu\overline{X}_y\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\Big]dv$$

$$+\frac{m}{2}\int_V\nu\frac{d}{dt}(u_0^2+v_0^2+w_0^2)dv$$

(2) 式を代入する事に依り

$$\frac{dW}{dt}=-m\int\Big[\frac{d(\nu u_0)}{dt}u_0+\frac{d(\nu v_0)}{dt}v_0+\frac{d(\nu w_0)}{dt}w_0\Big]dv+\sigma\int\Big[\nu\overline{X}_x\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\overline{Y}_y\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\overline{Z}_z\frac{\partial w_0}{\partial z}$$

$$+\nu\overline{Y}_z\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)+\nu\overline{Z}_x\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)+\nu\overline{X}_y\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\Big]dv$$

$$+\frac{m}{2}\int_V\nu\frac{d}{dt}(u_0^2+v_0^2+w_0^2)dv \quad\cdots\cdots(8)$$

一方運動エネルギーの增加の割合ひ (dE/dt) は

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\int\frac{m}{2}\nu(u_0^2+v_0^2+w_0^2)dv$$

$$=\frac{m}{2}\int\Big[\frac{d(\nu u_0)}{dt}u_0+\frac{d(\nu v_0)}{dt}v_0+\frac{d(\nu w_0)}{dt}w_0\Big]dv+\frac{m}{2}\int\Big[\nu u_0\frac{du_0}{dt}+\nu v_0\frac{dv_0}{dt}+\nu w_0\frac{dw_0}{dt}\Big]dv$$

$$=\frac{m}{2}\int\Big[\frac{d(\nu u_0)}{dt}u_0+\frac{d(\nu v_0)}{dt}v_0+\frac{d(\nu w_0)}{dt}w_0\Big]dv+\frac{m}{4}\int\nu\frac{d}{dt}(u_0^2+v_0^2+w_0^2)dv\quad\cdots\cdots(9)$$

砂の運動は，全く不可逆であるから，外力のなした仕事から，運動エネルギーになるエネルギーを減じた丈けのエネルギーは，運動中に熱エネルギーとなり失はれる。この單位時間中に失はれるエネルギーを (dI/dt) とすれば

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{dW}{dt}-\frac{dE}{dt}$$

$$=\frac{m}{2}\int\Big[\frac{d(\nu u_0)}{dt}u_0+\frac{d(\nu v_0)}{dt}v_0+\frac{d(\nu w_0)}{dt}w_0\Big]dv-\sigma\int\Big[\nu\overline{X}_x\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\overline{Y}_y\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\overline{Z}_z\frac{\partial w_0}{\partial z}$$

$$+\nu\overline{Y}_z\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)+\nu\overline{Z}_x\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)+\nu\overline{X}_y\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\Big]dv$$

$$-\frac{m}{4}\int\nu\frac{d}{dt}(u_0^2+v_0^2+w_0^2)dv-\frac{m}{2}\int_V\nu\frac{d}{dt}(u_0^2+v_0^2+w_0^2)dv$$

$$=\int\frac{d\nu}{dt}\frac{m(u_0^2+v_0^2+w_0^2)}{2}dv-\frac{m}{2}\int_V\nu\frac{d}{dt}(u_0^2+v_0^2+w_0^2)dv$$

$$-\sigma\int\Big[\nu\overline{X}_x\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\overline{Y}_y\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\overline{Z}_z\frac{\partial w_0}{\partial z}+\nu\overline{Y}_z\Big(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\Big)+\nu\overline{Z}_x\Big(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\Big)$$

$$+\nu\overline{X}_y\Big(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\Big)\Big]dv \quad\cdots\cdots(10)$$

定常運動では $(d\nu/dt)=0$ であるから，今 V 内の積分を無視すれば（其の時の I を I_0 と書くと），

$$\frac{dI_0}{dt}=-\sigma\int\Big[\nu\overline{X}_x\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\overline{Y}_y\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\overline{Z}_z\frac{\partial w_0}{\partial z}+\nu\overline{Y}_z\Big(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\Big)+\nu\overline{Z}_x\Big(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\Big)$$

$$+\nu\overline{X}_y\Big(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\Big)\Big]dv \quad\cdots\cdots(11)$$

となる。丁度彈性體の歪エネルギーの形に似てゐる。尙ほ，以上の議論をする場合には，考へてゐる量が，總べて連續であると假定してゐる。此事の妥當性は，前節に述べた處に依り，適當に批判されるであらう。

第 4 節 剪斷層の運動に關する定理

定常狀態に於ては，剪斷層に於ては u_0, v_0 以外の量は z に無關係である事が，剪斷層の理論に依つて[4]，主張される。又剪斷面が充分に廣いとして $(\partial/\partial x)=0$, $(\partial/\partial y)=0$ と考へるから，此の場合には

$$\frac{dI_0}{dt}=-\sigma\int\Big[\nu\overline{Y}_z\frac{\partial v_0}{\partial z}+\nu\overline{Z}_x\frac{\partial u_0}{\partial z}\Big]dv$$

$$=-\sigma A\int_0^h\Big[\nu\overline{Y}_z\frac{\partial v_0}{\partial z}+\nu\overline{Z}_x\frac{\partial u_0}{\partial z}\Big]dz \quad\cdots\cdots(12)$$

但し，A は剪斷面の面積，h は剪斷層の厚さである。h が一定である時（u_0 に依らない時——實驗上さう思はれる。）剪斷層に生じ得る運動は (dI_0/dt) の値が定留値をとる (stational) 如きものである事を證明する。

$$\delta\int_0^h\Big[\nu\overline{Y}_z\frac{\partial v_0}{\partial z}+\nu\overline{Z}_x\frac{\partial u_0}{\partial z}\Big]dz$$

$$=\int_0^h\Big[\delta(\nu\overline{Y}_z)\frac{\partial v_0}{\partial z}+\nu\overline{Y}_z\frac{\partial\delta v_0}{\partial z}+\delta(\nu\overline{Z}_x)\frac{\partial u_0}{\partial z}+\nu\overline{Z}_x\frac{\partial\delta u_0}{\partial z}\Big]dz$$

$$=|\nu\overline{Y}_z\delta v_0|_0^h+|\nu\overline{Z}_x\delta u_0|_0^h+\int_0^h\Big[\delta(\nu\overline{Y}_z)\frac{\partial v_0}{\partial z}-\frac{\partial(\nu\overline{Y}_z)}{\partial z}\delta v_0\Big]dz+\int_0^h\Big[\delta(\nu\overline{Z}_x)\frac{\partial u_0}{\partial z}-\frac{\partial(\nu\overline{Z}_x)}{\partial z}\delta u_0\Big]dz$$

今

$$\left.\begin{aligned}v_0&=f(u_0)\\ \nu\overline{Z}_x&=g(u_0)\\ \nu\overline{Y}_z&=k(u_0)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(13)$$

とすれば

$$\delta(\nu\overline{Y}_z)=\frac{\partial(\nu\overline{Y}_z)}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial v_0}\delta v_0$$

$$\delta(\nu\overline{Z}_x)=\frac{\partial(\nu\overline{Z}_x)}{\partial u_0}\delta u_0$$

4) 土木學會誌 28 卷 12 號前出

$$\therefore \quad \delta\int_0^h\left[\nu\overline{Y_z}\frac{\partial v_0}{\partial z}+\nu\overline{Z_x}\frac{\partial u_0}{\partial z}\right]dz$$

$$=\int_0^h\left[\frac{\partial(\nu\overline{Y_z})}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial z}-\frac{\partial(\nu\overline{Y_z})}{\partial z}\right]\delta v_0dz+\int_0^h\left[\frac{\partial(\nu\overline{Z_x})}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial z}-\frac{\partial(\nu\overline{Z_x})}{\partial z}\right]\delta u_0dz$$

$$=0$$

依つて證明出來た事になる。

第 5 節　剪斷力と剪斷速度との關係

Ah なる剪斷層の體積中で單位時間に消費されるエネルギーを Ahc_0 とする。即ち c_0 は單位容積當りの平均のエネルギー消費量である。然る時は

$$-\sigma\int_0^h A\left[\overline{Y_z}\nu\frac{\partial v_0}{\partial z}+\overline{Z_x}\nu\frac{\partial u_0}{\partial z}\right]dz$$

$$=\sigma A(\nu\overline{Y_z}v_0^0+\nu\overline{Z_x}u_0^0)$$

$$=Ahc_0 \cdots\cdots(14)$$

但し u_0^0, v_0^0 は夫々剪斷層の最下端の u_0, v_0 である。(14) 式では，剪斷層の最上端では，$u_0=0$, $v_0=0$ である事を使つてゐる。尙ほ，剪斷試驗の場合には，$v_0^0\fallingdotseq 0$ であるから，この項を無視すれば

$$\sigma\nu\overline{Z_x}u_0^0=c_0h$$

$$\therefore \quad 剪斷力=\sigma\nu A\overline{Z_x}=\frac{c_0hA}{u_0^0}$$

$$=\frac{c_0hA}{剪斷速度} \cdots\cdots(15)$$

即ち，c_0 を一定とすれば剪斷力は，剪斷速度に逆比例する。此の事は c_0 は剪斷速度に依つて變り得るかも知れないから，明らかには言ひかねる。c_0 が剪斷速度の一次以下で變るならば，剪斷力は，剪斷速度と共に減少し一次以上で變るならば，剪斷力は剪斷速度と共に增加する。堀助教授の實驗[5]に依れば，剪斷力は或速度以下では速度と共に增加し，夫れ以上では減ずる事が見出されてゐる。依つて，是れをエネルギー的に解釋すれば，剪斷速度小なる時は，エネルギー消費が，剪斷速度と共に變る割合が，剪斷速度の一次以上で變り，剪斷速度大なる時は，エネルギー消費が，剪斷速度と共に變る割合が，剪斷速度の一次以下で變ると言へる。これは流體の場合と逆の如くで，奇異の感なきを得ない。

今假りに，粘性流體の場合の樣に

$$\overline{Z_x}\nu\sigma A=\eta\frac{u_0^0}{h}A \cdots\cdots(16)$$

と置いて見ると，(η は定數)

$$c_0=\eta\left(\frac{u_0^0}{h}\right)^2 \cdots\cdots(17)$$

となり，粘性流體の場合の樣になる。(16) 式又は (17) 式であらはされる場合が，堀君の實驗結果に於ける A 點に相當する (圖-2)。

第 6 節　剪斷層の變位

---

5) 未發表

剪斷層に於ける c_0 の値は，前節に於ては，平均値を考へたが，今假りに此れが z に無關係とし，且つ

$$u_0=\frac{du}{dt},\qquad v_0\fallingdotseq 0$$

とすると（c_0 が z に關係なしとする事は勿論第一近似である）

$$-\sigma\int_z^h \overline{Z}_x\nu\frac{\partial u_0}{\partial z}A\,dz=\sigma\nu A\overline{Z}_x\frac{du}{dt}$$

$$=c_0A(h-z)$$

$$\therefore\qquad u=\frac{c_0}{\nu\sigma\overline{Z}_x}(h-z)t\ \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

となり，剪斷層に於ける變位は，直線的となる。實際に色砂を用ひて，剪斷層の變位を目立たせて見ると，其變位は，殆ど直線的となり，實驗結果を良く説明する。(17) 式より

$$\frac{du}{dz}=-\frac{c_0t}{\nu\sigma\overline{Z}_x}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

となるから，時間と共に，この傾斜は小さくなり，$\overline{Z}_x$＝一定 なる處で考へると，c_0 の大小に依り變り，c_0 が小さければ，時間と共に傾斜の變る割合ひ，及び同じ時刻に於ける傾斜は，小さく，c_0 が大きい程大きくなる。堀君の實驗結果と考へ合せると，圖-2の A までは，此傾斜の剪斷速度に依つて變る割合ひが，剪斷速度の一次

圖-2.

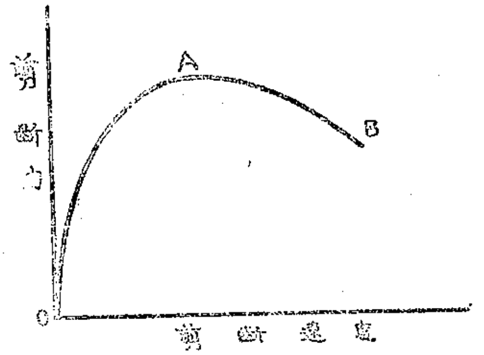
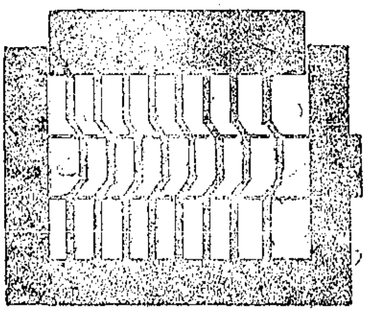


圖-3.



以上で變り，其以後では，一次以下で變る筈である。此の事は未だ實驗に依つて檢證してゐないが，いづれ確めて見やうと思つてゐる。

第 2 章　剪斷試驗の意義

剪斷層の理論並びに，我々の方法に依り行つた剪斷試驗の結果から見ると，Coulomb の固體摩擦の法則は，運動が定常になつた場合に，成立する。定常狀態にならなければ，成立しない事は，實驗結果から明らかである。又實驗に依れば，我々の方法に依つて行ふと，剪斷力は平均浮上量，浮上力，浮上力/剪斷力に比して，早めに定常狀態に達する[6]。依つて，先づ剪斷力が定常狀態に達した時の狀態で，內部摩擦角を決定する事が無理な事は，前にも述べた。

$$q=\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}p\ \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

6)　土木學會誌 28 卷 12 號前出

から，ϕ を求めると，定常狀態になると，之の値が息角に近づく事も述べたが，この事は剪斷層理論に於ける λ，μ，の値と息角との關係，即ち息角の運動學的意味を知らしめるものであり，ϕ の値が略々一定の値に近づく事は[7]，剪斷層の理論並びに，古典的土壓論を消極的乍ら基礎付けてゐる事になる。一方堀助教授の實驗に依り，剪斷力と，剪斷速度との間に關係がある事を教へられたが，そして夫れが，剪斷層内でのエネルギー消費，即ち運動様式の變化と關係がある事を，前章第 5 節に於て指摘したが，さうなると剪斷試驗なるものも，方法に於て適當な考慮をなす必要が出て來，此事が延いては，壁の移動方法に依つて，壁に及ぼす壓力分布の樣式の變る事の說明に，役立ちさうな希みが出て來る。此等は將來に於ける問題である。

第 3 章　古典的土壓論殊に Boussinesq 土壓論の基礎に就て

第 1 章，第 2 節で述べた如く，不連續運動は，定常ならざる砂の運動の一特徵である如くに思はれる。前報告に於て，側壁を仆して行く場合の砂の運動に對する見解として，k なる値の變化を考察し，我々の行つた實驗範圍の砂の運動が，定常なる如く考へた[8]のは，感違ひではあるまいかと思ふ樣になつた。砂の表面の運動は，あの實驗範圍に於て，壁から可成り遠い所では，不連續なのであるから，壁に近い所は定常に近いが，壁に遠い所の運動は，明かに不定常と考へる可きであらうと思ふ。

剪斷試驗の場合に，定常運動の場合には，運動に不連續現象が明らかには現れない事から，定常狀態では此れを連續と考へて，實驗結果を或程度迄說明出來た（例へば，剪斷層の理論，第 1 章第 6 節の考察の如き）事は，一つの此事に對する，檢證となり得ると考へる。

不連續運動が，定常狀態で現れないであらう事は，次の如くにも解釋され，これが一面，古典的土壓論に對する運動學的批判となると思はれる。今 u, v, w を夫々 x, y, z 方向の變位成分とし，

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \\
\varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(21)$$

とすれば，體積膨脹率 Δ と (20) 式の各々の量との關係は

$$\begin{aligned}
(1+\Delta)^2 &= (1+2\varepsilon_{xx})(1+2\varepsilon_{yy})(1+2\varepsilon_{zz}) + 2\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}\varepsilon_{xy} \\
&\quad -(1+2\varepsilon_{xx})\varepsilon^2{}_{yz} - (1+2\varepsilon_{yy})\varepsilon^2{}_{zx} - (1+2\varepsilon_{zz})\varepsilon^2{}_{xy} \cdots\cdots\cdots(22)
\end{aligned}$$

7) 土木學會誌 28 卷 12 號前出

8) 土木學會誌 28 卷 12 號前出

となる[9]。以上は，純運動學的考察より出て來るものである。

變位の勾配即ち

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \cdots\cdots(23)$$

なる量の夫々の二次以上の項が，一次の項に比して，無視出來るとすれば

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdots\cdots(24)$$

となり，體積膨脹率が剪斷歪と無關係になるが，無視出來なくなれば，(22) 式に見る如く，體積膨脹率と剪斷歪とが，無關係ではなくなる。さて，不定常運動の典形的なものと考へられる箱の側壁を仆す場合の砂の初期の運動で，砂は局部的に，緩んだり，塡つたりし乍ら運動し，夫が傳播性を有する事は，既に報告した處であり，不連續面の傳播として，即ち變位成分の不連續に依つて説明し得る事は前に述べた[10]。今假りに，砂に極く小さな變位を與へて見たと考へた場合に，若し定常的に，即ち砂の各部分が一樣に近く運動したとすれば，砂の各部分に於ける (22) の量は，極く小さく，從つて體積膨脹と剪斷歪が無關係となるに反し，不定常的に，即ち砂の各部が可成りの偏差を以つて運動したとすれば，(22) の量は夫程小さくなく，體積膨脹と剪斷歪とは，無關係ではなくなる。

即ち，不連續がある場合は，此の狀態に近い。剪斷試驗の場合にも，初期に於ては，剪斷歪に從つて體積膨脹を生じ，其場合には不連續運動が認められ，定常になると，剪斷歪に依つて最早體積膨脹が認められなくなる。

依つて，Reynolds の所謂 Dilatancy，著者が最初非常に强調した，體積膨脹と剪斷歪とが無關係でないと言ふ大きな事實[11]は，不定常の砂の運動を論ずる場合に重要な要素であり，定常狀態になると，此性質は大して效かなくなる。そして，定常運動になつて初めて Coulomb の摩擦法則が正しくなるのであるから，嘗つて Reynolds が

$$q = \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi} p$$

の如き關係と，Dilatancy と關係あるものゝ如くに考へたのは考へ違ひであると言へる。扨て Boussinesq の土壓論に於ては，體積變化を無視し Coulomb の摩擦法則を假定してゐるのであるから Boussinesq は考へてゐる砂の領域內の砂の運動は定常運動であると假定してゐるのである事が，今述べた事に依り領かれるのである。Rankine の土壓論に於ても，考へてゐる領域全部が，限界狀態にある事を假定してゐるから，矢張り全領域の砂の運動の定常性を假定してゐる。依つて，Jenkine の實驗[12]の場合に，內部摩擦角を息角にとり，Rankine 公式で計算した砂壓が，實測値よりも幾らか大きめとは言へ，比較的實測値と良く一致してゐる事は，Jenkine の場

9) Love "Elasticity" p. 61

10) 土木學會誌 28 卷 5 號前出

11) 土木學會誌 27 卷 8 號 (昭. 16. 8.) 乾燥砂の運動機構及び砂の內部摩擦角測定法に就て

12) C. F. Jenkine: "The Pressure exerted by grannular material; an application of the principles of dilatancy." Proc. Roy. Soc., vol. 131, 1931.

合の，壁の移動が可成り大きく，砂の運動が定常になつてゐたとすれば，無理なく理解出來る。又一方Terzaghi[13]や鷹部屋博士[14]の壁の移動に依つての砂壓變化の說明も，上の見解に依つて容易に行はれる處であり，最後に至り砂壓が，理論値と可成りに良く合ふ事實も，尤もと思はれる。定常狀態になると，基礎方程式 (1),(2) は，全領域域で定常とし，

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial \overline{X}_x}{\partial x}+\frac{\partial \overline{X}_y}{\partial y}+\frac{\partial \overline{X}_z}{\partial z}=-\frac{m}{\sigma}\frac{du_0}{dt}\\
&\frac{\partial \overline{Y}_x}{\partial x}+\frac{\partial \overline{Y}_y}{\partial y}+\frac{\partial \overline{Y}_z}{\partial z}=-\frac{m}{\sigma}\frac{dv_0}{dt}\\
&\frac{\partial \overline{Z}_x}{\partial x}+\frac{\partial \overline{Z}_y}{\partial y}+\frac{\partial \overline{Z}_z}{\partial z}=-\frac{m}{\sigma}\frac{dw_0}{dt}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

となり，應力平衡式と同じ形になるから Boussinesq が基としたものと同じ形になる。此れも興味ある事である。

尙ほ，一般に，Rankine 公式よりも，Coulomb 公式の方が，實測値と合ふと言はれてゐるが，其の理由も簡單に說明出來る。即ち，先きにも述べた如く，Rankine は，考へてゐる全領域での定常運動を豫期するに反し，Coulomb は，滑り面と壁面に於てのみ Coulomb の摩擦法則の當てはまる事を期待してゐる。即ち Coulomb の方が，期待する定常運動の領域が遙かに狹い。全領域での定常運動を期待する事が困難であつたとしても，滑り面と，壁面での定常運動を豫期する事は，さ程困難な事ではない。そして，定常運動を行つてゐる滑り層では，剪斷層理論に依つて Coulomb の摩擦法則が成立し，尙ほ，其の場合の內部摩擦角は，息角に等しいのであるから，其れに基礎を置く Coulomb 公式の方が Rankine 公式よりも，實測値と合ふ事は當然と思はれる。

第 4 章　砂の運動理論と材料力學

嘗つて，砂の剪斷層形成の機構が，鋼に於ける Lüder 線形成に似てゐる事を指摘して置いた。處が，剪斷層中の定常運動に於て單位時間に消費されるエネルギーが，極大又は極小になる樣に運動が起る事が分り，其の場合の，剪斷抵抗と，剪斷速度の關係が，エネルギー消費と關係ある事も明らかになつた。一方金屬が塑性的に變形する場合には，容積變化なく，Mises に從へば，加へられたエネルギーが一定値にならねば，塑性變形を生ぜず，變形中單位時間に加へらる可きエネルギーが一定である[15]とされてゐる。此等の點も，砂の運動理論と並行して考へられて良いと考へる。

砂の運動理論と塑性變形理論とが，全然同じであると言ふ事は，無謀極まる事なのは言を俟たないが，少くも塑性變形の理論に對して多少の參考資料を提供し得ると考へる。

尙ほ，粘性流體の定常運動の場合に於ても，起り得る運動が，熱發生の時間に對する割合ひが，極小になる如

13)　Terzaghi: "Large retaining wall tests." Eng. News Record, Feb. 1, 1931.

14)　鷹部屋福平，酒井忠明：“土壓に及ぼす擁壁水平動の影響と擁壁仕上面の種々相に基因する土壓變化の實驗的研究” 鐵道省土質調査委員會報告第二輯

きものである事は知られてゐて，Searle は，其教科書中で，此の原則を用ひて，Poiseuille の公式を導いてゐる[16]。これも，我々の場合と似た考へ方である事を指摘して置く事は無意味ではないと思はれる。

（昭. 18. 3. 18. 受付）

（第 1 章　第 4 節　中に誤を發見しましたから後日訂正致します）

15) Geiringer: "Fondements mathèmatiques de la theorie des corps plastiques isotropes".

16) Searle: "Experimental Physics."