論説報告

第29卷第5號 昭和18年5月

砂地盤の支持力(續編)

正會員 水野高明*

要旨 本文は前論文と類似の方法を用ゐて，地盤面上に等分布過載荷重ある場合の支持力と滑り面とを求めたもので，構造物基礎が根入を有する場合に應用出來るものである。

1. 序說

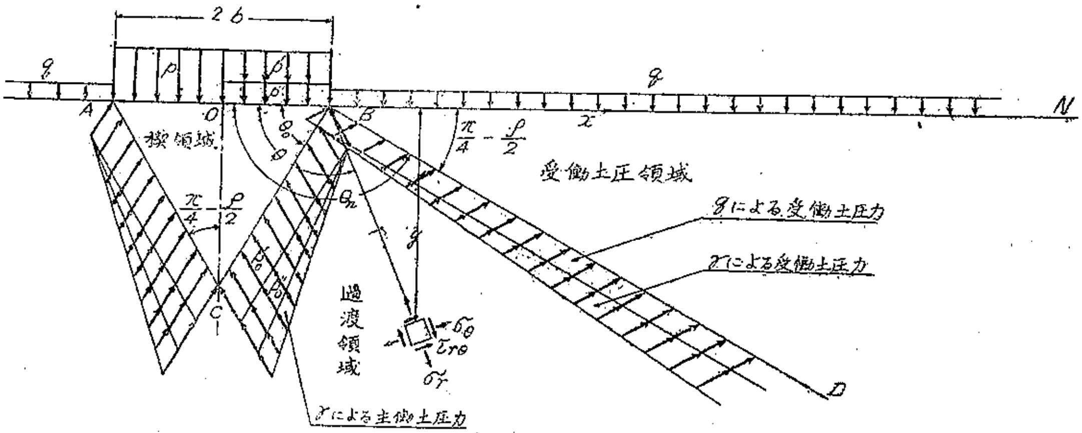
著者は前論文(1)に於て，砂地盤の表面に荷重が働く場合の支持力並びに滑り面を求めた。今回は同様な方法により，構造物基礎面以外の地表面に等分布過載荷重を有する場合の支持力及び滑り面を求める方法を記する。構造物基礎が地盤面下に設けられたる場合には，基礎底面深より上部の砂の重量を過載荷重と看做す事に依つて，本論を其儘應用する事が出來る。尙基礎面の幅が根入に比して極めて小なる場合，即ち滑り面內部の土砂の重量を無視し得る場合には，本論の結果は Reissner 理論の結果と殆んど一致するのである。

2. 一般假定

前論文と同様に構造物の奧行は大なるものとし，平面變形の場合として取扱ふ。

圖-1 に於て構造物の單位荷重を p，等布過載荷重を q とする。今の場合 p なる荷重の押出しに抵抗するものは，過載荷重 q 及び砂の重量の 2 者である。前論文の所說に從ひ，水平線 BN と $(\pi/4-\rho/2)$ なる角をなす ∠DBN の區域內の應力は，滑り出しの瞬間には Rankine の受働土壓力に達するものとすれば，q に依る受働土壓力は B を原點とする放射線上に於ては一樣に分布し，砂の重量 γ に依るものは同線上に於て B よりの距離に比例して增大する。故に荷重 p も此瞬間には，B よりの放射線距離 r に無關係な力及び r に比例する力

圖-1.



* 九州帝國大學助教授

(1) 拙著: 砂地盤の支持力に就て，土木學會誌 第 28 卷第 11 號

の 2 つのものによつて抵抗されるものと考へる事が出來る。今便宜上 p を 2 つに分けて前者に抵抗される部分を p'，後者に抵抗される部分を p'' とする。然る時は勿論次の關係がある。

$$p=p'+p'' \quad \cdots\cdots(1)$$

次に前論文と同樣に荷重直下の ABC なる楔形部分は，滑り出しの瞬間には AC, BC なる線に沿つて切斷されて荷重と共に押込まれ，滑り面 AC 及 BC は主働土壓力滑り面となるものと假定する。卽ち，

$$\angle ACO=\angle BCO=\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}, \quad \angle ABC=\theta_0=\frac{\pi}{4}+\frac{\rho}{2} \quad \cdots\cdots(2)$$

となるものとする。然る時は AC 及 BC に働く抵抗力は，圖-1 に示す如く次の 3 つの部分より成るものと考へる事が出來，之等の抵抗力は何れも AC, BC への法線と，砂の內部摩擦角 ρ なる角をなすべきである。

先づ第 1 の抵抗力は砂の體力による主働土壓力にして，その 3 分應力は次の如く表はされる。

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{\theta_0}{}^{(a)}=\gamma(1-k)\,r\sin^3\theta_0+\Omega_0, \qquad \tau_{r\theta_0}{}^{(a)}=-\gamma(1-k)\,r\sin^2\theta_0\cos\theta_0\\&\sigma_{r_0}{}^{(a)}=\gamma(1-k)\,r\sin\theta_0\cos^2\theta_0+\Omega_0\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(3)$$

但し

$$k=\frac{1-\sin\rho}{1+\sin\rho} \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\Omega_0=-\gamma\cdot r\sin\theta_0 \quad \cdots\cdots(5)$$

を示す。

第 2 の抵抗力は荷重 p' に對する反力 p_0' であつて，之は次の如く導く事が出來る。Rankine の主働土壓滑り面 AC, BC を滑り面に有し，之に沿つて等布せる如き應力狀態は等布荷重 p' による Rankine 主働土壓應力に外ならない。之は直交座標で表はせば次の如くなる。

$$\sigma_y{}^{(p')}=-p', \qquad \sigma_x{}^{(p')}=-kp', \qquad \tau_{xy}{}^{(p')}=0 \quad \cdots\cdots(6)$$

依つて之より BC 線に於ける反力 p_0' の分應力を極座標にて示せば，

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{\theta_0}{}^{(p')}=-p'(\cos^2\theta_0+k\sin^2\theta_0), \qquad \tau_{r\theta_0}{}^{(p')}=-p'(1-k)\sin\theta_0\cos\theta_0\\&\sigma_{r_0}{}^{(p')}=-p'(\sin^2\theta_0+k\cos^2\theta_0)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(7)$$

を得る。

第 3 の抵抗力は荷重 p'' に對する反力 p_0'' で，之は前論文の p_0 に相當するから直ちに次の如く記す事が出來る。

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{\theta_0}{}^{(p'')}=ap''(1-k)\,r\sin^3\theta_0-ap''\,r\sin\theta_0, \qquad \tau_{r\theta_0}{}^{(p'')}=-ap''(1-k)\,r\sin^2\theta_0\cos\theta_0\\&\sigma_{r_0}{}^{(p'')}=ap''(1-k)\,r\sin\theta_0\cos^2\theta_0-ap''r\sin\theta_0\end{aligned}\right\} \cdots(8)$$

此處に a は次の如きものである。

$$a=\frac{2}{b}\cot\theta_0 \quad \cdots\cdots(9)$$

次に受働土壓領域の應力は前述の如く q 及 γ による受働土壓力の 2 つに分ち得る。

第 1 のものは直交座標系では，

$$\sigma_y{}^{(q)}=-q, \qquad \sigma_x{}^{(q)}=-\frac{1}{k}q, \qquad \tau_{xy}{}^{(q)}=0 \quad \cdots\cdots(10)$$

で示されるから，BD 線上の分應力は極座標によつて次の如く表はされる。

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{\theta_n}{}^{(q)}=-q\left(\cos^2\theta_n+\frac{1}{k}\sin^2\theta_n\right),\qquad \tau_{r\theta n}{}^{(q)}=-q\left(1-\frac{1}{k}\right)\sin\theta_n\cos\theta_n\\&\sigma_{r_n}{}^{(q)}=-q\left(\sin^2\theta_n+\frac{1}{k}\cos^2\theta_n\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(11)$$

第 2 のものは BD 線上に於ては，

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{\theta_n}{}^{(b)}=\gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)r\sin^3\theta_n+\Omega_n,\qquad \tau_{r\theta n}{}^{(b)}=-\gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)r\sin^2\theta_n\cos\theta_n\\&\sigma_{r_n}{}^{(b)}=\gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)r\sin\theta_n\cos^2\theta_n+\Omega_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(12)$$

但し

$$\Omega_n=-\gamma\cdot r\sin\theta_n\cdots\cdots\cdots(13)$$

である。

3. 過渡領域に於ける應力

Airy の應力函數 χ の充すべき條件は次式で與へられる。

$$\nabla^4\chi=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2\chi=0\cdots\cdots\cdots(14)$$

又應力 $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_r$ は次式によつて求められる。

$$\sigma_\theta=\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}+\Omega,\qquad \tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right),\qquad \sigma_r=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}+\Omega\cdots\cdots\cdots(15)$$

但し Ω は體力のポテンシャルにして今の場合は，

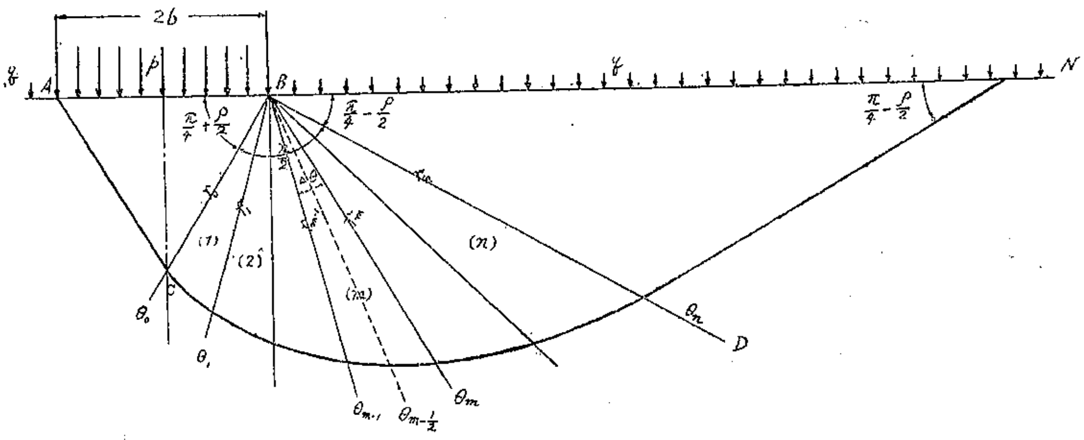
$$\Omega=-\gamma\cdot r\sin\theta\cdots\cdots\cdots(16)$$

である。

全ての條件を充す (14) 式の一般解は次の如きものである。先づ應力が r の零次の項のみよりなる如き解を χ' とすれば，

$$\chi'=Ar^2\theta+Br^2+Cr^2\cos2\theta+Dr^2\sin2\theta\cdots\cdots\cdots(17)$$

圖-2.



r の 1 次の項のみの應力を與へる如き解を χ'' とすれば，

$$\chi''=Er^3\cos 3\theta+Fr^3\cos\theta+Gr^3\sin 3\theta+Hr^3\sin\theta \quad\cdots\cdots(18)$$

となる。

更に γ による主働土壓力の應力函數は次の如きものである。

$$\chi^{(a)}=\gamma(1-k)\frac{r^3\sin^3\theta}{6} \quad\cdots\cdots(19)$$

よつて過渡領域の一般應力函數として次のものを取る事が出來る。

$$\chi=\chi'+\chi''+\chi^{(a)} \quad\cdots\cdots(20)$$

此處に A, B, C, D, E, F, G, H は境界條件に依つて定まる常數である。

今前論文と同樣に圖-2 に示す如く此の領域を多數の小楔形區域に分割して應力を求めるものとし，(m) 番目の分割區域の應力を $\sigma_\theta^{(m)}, \tau_{r\theta}^{(m)}, \sigma_r^{(m)}$を以て表はせば，之等は (15) 式により次の如く導かれる。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\theta^{(m)}&=2A_m\theta+2B_m+2C_m\cos 2\theta+2D_m\sin 2\theta\\
&\quad+6E_mr\cos 3\theta+6F_mr\cos\theta+6G_mr\sin 3\theta+6H_mr\sin\theta+\gamma(1-k)r\sin^3\theta+\Omega\\
\tau_{r\theta}^{(m)}&=-A_m+2C_m\sin 2\theta-2D_m\cos 2\theta\\
&\quad+6E_m r\sin 3\theta+2F_m r\sin\theta-6G_m r\cos 3\theta-2H_m r\cos\theta-\gamma(1-k)r\sin^2\theta\cos\theta\\
\sigma_r^{(m)}&=2A_m\theta+2B_m-2C_m\cos 2\theta-2D_m\sin 2\theta\\
&\quad-6E_m r\cos 3\theta+2F_m r\cos\theta-6G_m r\sin 3\theta+2H_mr\sin\theta\\
&\quad+\gamma(1-k)r\sin\theta\cos^2\theta+\Omega
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(21)$$

然る時は未知數は 各楔形分割區域に於て，$A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m, G_m, H_m$ の 8 個宛，及び p', p'' の 2 個であるから，分割數を n とすれば全體で未知數の數は $(8n+2)$ 個となる。

尙便宜上 $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_r$ を r 零次の項及び r 1 次の項に分けて，零次の項の應力を $\sigma_\theta', \tau_{r\theta}', \sigma_r'$ とし，1 次の項の應力を $\sigma_\theta'', \tau_{r\theta}'', \sigma_r''$ を以て表はす。然る時は次の關係がある。

$$\sigma_\theta^{(m)}=\sigma_\theta'^{(m)}+\sigma_\theta''^{(m)},\quad \tau_{r\theta}^{(m)}=\tau_{r\theta}'^{(m)}+\tau_{r\theta}''^{(m)},\quad \sigma_r^{(m)}=\sigma_r'^{(m)}+\sigma_r''^{(m)} \quad\cdots\cdots(22)$$

但し

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\theta'^{(m)}&=2A_m\theta+2B_m+2C_m\cos 2\theta+2D_m\sin 2\theta\\
\sigma_\theta''^{(m)}&=6E_m r\cos 3\theta+6E_m r\cos\theta+6G_m r\sin 3\theta+6H_m r\sin\theta+\gamma(1-k)r\sin^3\theta+\Omega\\
\tau_{r\theta}'^{(m)}&=-A_m+2C_m\sin 2\theta-2D_m\cos\theta\\
\tau_{r\theta}''^{(m)}&=6E_m r\sin 3\theta+2F_m r\sin\theta-6G_m r\cos 3\theta-2H_m r\cos\theta-\gamma(1-k)r\sin^2\theta\cos\theta\\
\sigma_r'^{(m)}&=2A_m\theta+2B_m-2C_m\cos 2\theta-2D_m\sin 2\theta\\
\sigma_r''^{(m)}&=-6E_m r\cos 3\theta+2F_m r\cos\theta-6G_m r\sin 3\theta+2H_m r\sin\theta\\
&\quad+\gamma(1-k)r\sin\theta\cos^2\theta+\Omega
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(23)$$

4. 應力の充すべき條件

1. 境界條件

θ_0 に於ける境界應力を $[\sigma_{\theta_0}], [\tau_{r\theta_0}], [\sigma_{r_0}]$ とすれば，之等は (7), (8), (3) 式により次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}[\sigma\theta_0]&=\sigma\theta_0{}^{(p')}+\sigma\theta_0{}^{(p'')}+\sigma\theta_0{}^{(a)}\\ [\tau r\theta_0]&=\tau r\theta_0{}^{(p')}+\tau r\theta_0{}^{(p'')}+\tau r\theta_0{}^{(a)}\\ [\sigma r_0]&=\sigma r_0{}^{(p')}+\sigma r_0{}^{(p'')}+\sigma r_0{}^{(a)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(24)$$

第 (1) 番目の分割區域の應力は BC 線上に於て (24) 式の應力と夫々等しくなければならないから次の關係が成立する。

$$\sigma\theta_0{}^{(1)}=[\sigma\theta_0],\qquad \tau r\theta_0{}^{(1)}=[\tau r\theta_0],\qquad \sigma r_0{}^{(1)}=[\sigma r_0]\cdots\cdots(25)$$

然るに θ_0 の各點に於て (25) が成立つ爲には，r 零次の項の應力及び r 1 次の項の應力間に夫々 (25) 式の關係が存在すべきであるから，結局 θ_0 に於ける境界條件式は，

$$\sigma\theta_0{}'^{(1)}=\sigma\theta_0{}^{(p')},\qquad \tau r\theta_0{}'^{(1)}=\tau r\theta_0{}^{(p')},\qquad \sigma r_0{}'^{(1)}=\sigma r_0{}^{(p')}\cdots\cdots(26a)$$

及び，

$$\sigma\theta_0{}''^{(1)}=\sigma\theta_0{}^{(p'')}+\sigma\theta_0{}^{(a)},\quad \tau r\theta_0{}''^{(1)}=\tau r\theta_0{}^{(p'')}+\tau r\theta_0{}^{(a)},\quad \sigma r_0{}''^{(1)}=\sigma r_0{}^{(p'')}+\sigma r_0{}^{(a)}\cdots\cdots(26b)$$

によつて示される。

(26a) 式を具體的に記すれば，

$$\left.\begin{aligned}&2A_1\theta_0+2B_1+2C_1\cos 2\theta_0+2D_1\sin 2\theta_0=-p'(\cos^2\theta_0+k\sin^2\theta_0)\\ &-A_1+2C_1\sin 2\theta_0-2D_1\cos 2\theta_0=-p'(1-k)\sin\theta_0\cos\theta_0\\ &2A_1\theta_0+2B_1-2C_1\cos 2\theta_0-2D_1\sin 2\theta_0=-p'(\sin^2\theta_0+k\cos^2\theta_0)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(27a)$$

となり，之を解けば次のものが得られる。

$$\left.\begin{aligned}B_1&=-\frac{p'}{4}(1+k)-A_1\theta_0\\ C_1&=-\frac{p'}{4}(1-k)+\frac{A_1}{2}\sin 2\theta_0\\ D_1&=-\frac{A_1}{2}\cos 2\theta_0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(28a)$$

(26b) 式は前論文 (23) 式と同樣なものであるから，同 (38) 式の結果を其儘利用出來る。即ち，

$$\left.\begin{aligned}E_1&=-\frac{ap''}{12}\sin 2\theta_0-\frac{F_1}{3}\frac{\sin 3\theta_0}{\sin\theta_0}\\ G_1&=-\frac{ap''}{24}(1-k)+\frac{ap''}{12}\cos 2\theta_0+\frac{F_1}{3}\frac{\cos 3\theta_0}{\sin\theta_0}\\ H_1&=-\frac{ap''}{8}(1+k)-F_1\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(28b)$$

次に θ_n に於ける境界應力を $[\sigma\theta_n], [\tau r\theta_n], [\sigma r_n]$ とすれば，之等は (11), (12) 式より，

$$\left.\begin{aligned}[\sigma\theta_n]&=\sigma\theta_n{}^{(q)}+\sigma\theta_n{}^{(b)}\\ [\tau r\theta_n]&=\tau r\theta_n{}^{(q)}+\tau r\theta_n{}^{(b)}\\ [\sigma r_n]&=\sigma r_n{}^{(q)}+\sigma r_n{}^{(b)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(29)$$

となるから，θ_0 に於けると同樣にして境界條件式として次のものが得られる。

$$\sigma\theta_n{}'^{(n)}=\sigma\theta_n{}^{(q)},\qquad \tau r\theta_n{}'^{(n)}=\tau r\theta_n{}^{(q)},\qquad \sigma r_n{}'^{(n)}=\sigma r_n{}^{(q)}\cdots\cdots(30a)$$

及び，

$$\sigma\theta_n{}''^{(n)}=\sigma\theta_n{}^{(b)},\qquad \tau r\theta_n{}''^{(n)}=\tau r\theta_n{}^{(b)},\qquad \sigma r_n{}''^{(n)}=\sigma r_n{}^{(b)}\cdots\cdots(30b)$$

(30a) は具體的には，

$$\left.\begin{aligned}&2A_n\theta_n+2B_n+2C_n\cos 2\theta_n+2D_n\sin 2\theta_n=-q\left(\cos^2\theta_n+\frac{1}{k}\sin^2\theta_n\right)\\&-A_n+2C_n\sin 2\theta_n-2D_n\cos 2\theta_n=-q\left(1-\frac{1}{k}\right)\sin\theta_n\cos\theta_n\\&2A_n\theta_n+2B_n-2C_n\cos 2\theta_n-2D_n\sin 2\theta_n=-q\left(\sin^2\theta_n+\frac{1}{k}\cos^2\theta_n\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(31a)$$

にて與へられるから，之を解く事により次の關係を得る。

$$\left.\begin{aligned}&B_n=-\frac{q}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right)-A_n\theta_n\\&C_n=-\frac{q}{4}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{A_n}{2}\sin 2\theta_n\\&D_n=-\frac{A_n}{2}\cos 2\theta_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(32a)$$

(30b) の條件は前論文 (24) 式と一致するから，同 (39) 式の結果を其儘用ゐて次の式となる。

$$\left.\begin{aligned}&E_n=-\frac{F_n}{3}\frac{\sin 3\theta_n}{\sin\theta_n}\\&G_n=\frac{\gamma}{24}\left(k-\frac{1}{k}\right)+\frac{F_n}{3}\frac{\cos 3\theta_n}{\sin\theta_n}\\&H_n=\frac{\gamma}{8}\left(k-\frac{1}{k}\right)-F_n\frac{\cos\theta_n}{\sin\theta_n}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(32b)$$

以上により境界條件式は結局 (28a), (28b), (32a) 及び (32b) の合計 12 式と成る。

2. 分割線上に於ける連續の條件

過渡領域內各分割線上に於て，分割線の左右の楔形分割區域の應力は夫々連續すべきであるから，θ_m なる分割線上に於て前論文 (34) 式の關係が成立つべきであるが，今の場合には各應力の r 零次の項並びに r 1 次の項について，夫々此關係が存在せねばならないから次の連續條件式を得る。

$$\sigma_{\theta_m}{}'^{(m)}=\sigma_{\theta_m}{}'^{(m+1)},\quad \tau_{r\theta_m}{}'^{(m)}=\tau_{r\theta_m}{}'^{(m+1)},\quad \sigma_{r_m}{}'^{(m)}=\sigma_{r_m}{}'^{(m+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots(33a)$$

及び，

$$\sigma_{\theta_m}{}''^{(m)}=\sigma_{\theta_m}{}''^{(m+1)},\quad \tau_{r\theta_m}{}''^{(m)}=\tau_{r\theta_m}{}''^{(m+1)},\quad \sigma_{r_m}{}''^{(m)}=\sigma_{r_m}{}''^{(m+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots(33b)$$

但し右肩の番號は分割區域の番號，右下の番號は分割線の番號を示す。

(33a) 式に (23) 式の値を入れゝば次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}&2(A_{m+1}-A_n)\theta_m+2(B_{m+1}-B_m)+2(C_{m+1}-C_m)\cos 2\theta_m+2(D_{m+1}-D_m)\sin 2\theta_m=0\\&-(A_{m+1}-A_m)+2(C_{m+1}-C_m)\sin 2\theta_m-2(D_{m+1}-D_m)\cos 2\theta_m=0\\&2(A_{m+1}-A_m)\theta_m+2(B_{m+1}-B_m)-2(C_{m+1}-C_m)\cos 2\theta_m-2(D_{m+1}-D_m)\sin 2\theta_m=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(34a)$$

之を解けば次の結果を得る。

$$\left.\begin{aligned}&B_{m+1}-B_m=-(A_{m+1}-A_m)\theta_m\\&C_{m+1}-C_m=\frac{(A_{m+1}-A_m)}{2}\sin 2\theta_m\\&D_{m+1}-D_m=-\frac{(A_{m+1}-A_m)}{2}\cos 2\theta_m\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(35a)$$

次に (33b) は前論文 (36) と同一であるから，同 (37) 式の結果を用ゐ次の關係が得られる。

$$\left.\begin{aligned} E_{m+1}-E_m&=-\frac{(F_{m+1}-F_m)}{3}\frac{\sin 3\theta_m}{\sin\theta_m}\\ G_{m+1}-G_m&=\frac{(F_{m+1}-F_m)}{3}\frac{\cos 3\theta_m}{\sin\theta_m}\\ H_{m+1}-H_m&=-(F_{m+1}-F_m)\frac{\cos\theta_m}{\sin\theta_m}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(35b)$$

以上により連續の條件式は各分割線上に於て (35a) 及 (35b) の 6 式宛，分割線の總數 $(n-1)$ 個に對しては合計 $6(n-1)$ 個となる。

3. 滑りの條件

滑りが起る場合には滑り面の各點の應力は次式を充すべきである。

$$(\sigma_\theta-\sigma_r)^2+4\tau_{r\theta}^2=\sin^2\rho(\sigma_\theta+\sigma_r)^2\cdots\cdots(36)$$

今の場合も前論文と同様に滑り面上全ての點で滑りの限界に達する應力を求める代りに，近似的に各分割線に於てのみ此條件を滿足する如くする。然る時は θ_m に於ける滑りの條件は，

$$(\sigma_{\theta m}-\sigma_{r_m})^2+4\tau_{r\theta_m}^2-\sin^2\rho(\sigma_{\theta_m}+\sigma_{r_m})^2=0\cdots\cdots(37)$$

となる。此處に於て (22) 式の値を用ふれば，

$$(\sigma_{\theta_m}-\sigma_{r_m})^2=(\sigma_{\theta_m}'-\sigma_{r_m}')^2+2(\sigma_{\theta_m}'-\sigma_{r_m}')(\sigma_{\theta_m}''-\sigma_{r_m}'')+(\sigma_{\theta_m}''-\sigma_{r_m}'')^2$$

$$\tau_{r\theta_m}^2=\tau_{r\theta_m}'^2+2\tau_{r\theta_m}'\tau_{r\theta_m}''+\tau_{r\theta_m}''^2$$

$$(\sigma_{\theta_m}+\sigma_{r_m})^2=(\sigma_{\theta_m}'+\sigma_{r_m}')^2+2(\sigma_{\theta_m}'+\sigma_{r_m}')(\sigma_{\theta_m}''+\sigma_{r_m}'')+(\sigma_{\theta_m}''+\sigma_{r_m}'')^2$$

を得るから，之等を (37) に入るれば滑りの條件は次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}&[(\sigma_{\theta_m}'-\sigma_{r_m}')^2+4\tau_{r\theta_m}'^2-\sin^2\rho(\sigma_{\theta_m}'+\sigma_{r_m}')^2]\\ &+2[(\sigma_{\theta_m}'-\sigma_{r_m}')(\sigma_{\theta_m}''-\sigma_{r_m}'')+4\tau_{r\theta_m}'\tau_{r\theta_m}''-\sin^2\rho(\sigma_{\theta_m}'+\sigma_{r_m}')(\sigma_{\theta_m}''+\sigma_{r_m}'')]\\ &+[(\sigma_{\theta_m}''-\sigma_{r_m}'')^2+4\tau_{r\theta_m}''^2-\sin^2\rho(\sigma_{\theta_m}''+\sigma_{r_m}'')^2]=0\end{aligned}\right\}\cdots(38)$$

(38) 式の第 1 項は r を含まず，第 2 項は r 1 次の項，第 3 項は r 2 次の項のみより成るから，之等を次の如く置く。

$$\text{第 1 項}\equiv L,\qquad \text{第 2 項}\equiv M\cdot r,\qquad \text{第 3 項}\equiv N r^2\cdots\cdots(39)$$

然る時は，若し r に無關係に全ての點で同時に滑りの限界に達するものとすれば，$L=0$, $M=0$, $N=0$ の 3 條件が必要となる。前論文の所説より，$\theta_n=\pi-(\pi/4-\rho/2)$ とすれば，θ_{n-1} に於ける滑りの條件を除くべきであるから，此の條件を必要とする分割線の數は $(n-2)$ となり，滑りの條件は全體で $3(n-2)$ 個存在する事になる。斯様にして a, b で求めた諸條件と合計すれば，此場合の條件式の數は總計，

$$12+6(n-1)+3(n-2)=9n$$

となり，未知數の數よりも

$$9n-(8n+2)=n-2$$

丈多い事になる。故に分割線上各點で同時に滑ると云條件は入れ得ない。

依つて次の如く考へる。先づ $r=0$ 卽ち圖-2 の B 點の應力は，楔領域に於ても受働土壓領域に於ても滑りの限界に達するから，過渡領域に於ても亦此限界に達すべきである。よつて

$$L=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

なる條件は常に成立せねばならない。

次に今の場合には全ての點で同時に滑りの限界に達する必要は無く，唯 B 點及び滑り面に於てのみ滑りの條件を滿足すればよいから，滑り面の r を r_m と置けば，以上の (40) 式の條件の外に次の條件を用ふれば必要にして充分である。即ち，

$$M{\cdot}r_m+N{\cdot}r_m^2=0$$

或は，

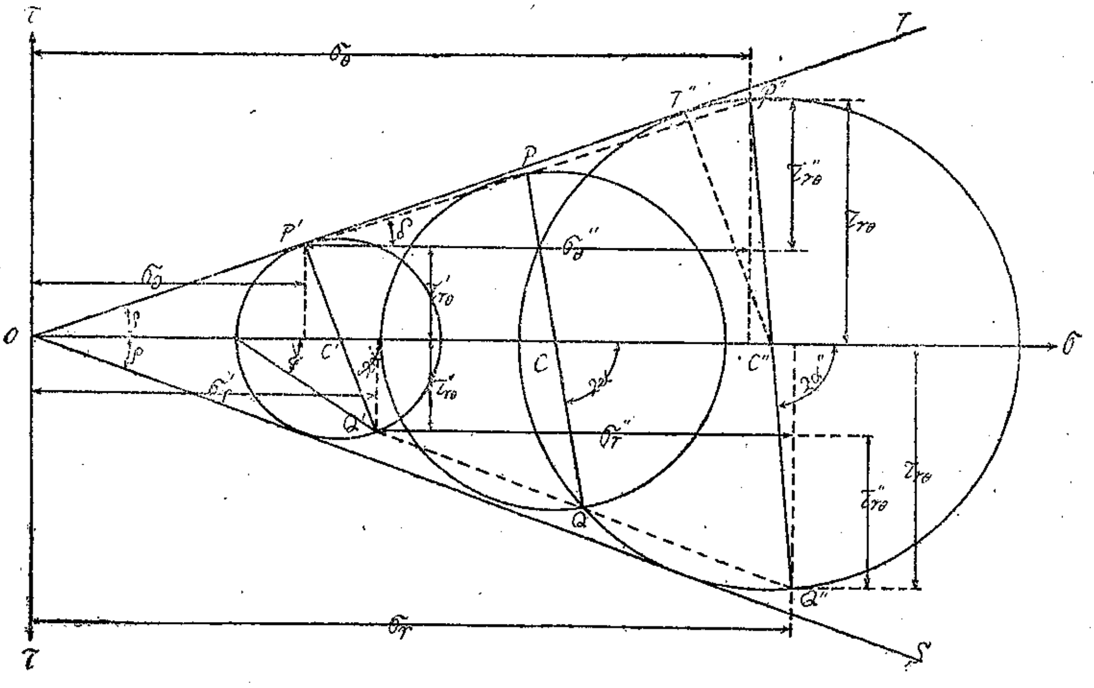
$$N+N{\cdot}r_m=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

斯樣にすれば $(n-2)$ なる各分割線上に於て夫々 1 個丈，全體として $(n-2)$ 個丈の條件式を減じ得るを以て，條件式の數は未知數の數と一致し，從つて未知數を求め得る理である。

4，應力の吟味

圖-3 に於て例へば C′ を中心とする Mohr の應力圓を考へると，一般に或る點に於ける應力の 3 分力は，圖の如く圓周上の任意の P′, Q′ 點の横距及び縱距にて表はされるから，今 P′, Q′ が極座標に於ける應力 $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$,

圖-3.



σ_r を示すものとすれば，P′C′Q′ 線と σ 軸とのなす角 ∠CC′Q は，此點の最大主應力と，B よりの放射線の正方向とのなす角 α の 2 倍を與へる事は衆知の所である。尙滑り點に於ては應力圓は，σ 軸と內部摩擦角 ρ をなす OT, OS に切する事も明かである。

然るに $L=0$ を充す應力狀態は後述の如く Reissner の結果と殆んど一致する。Reissner の滑り面は B を通る放射線並びに此線と $\beta'=\pi/2-\rho$ なる角をなす對數螺旋曲線である。從つて此場合 r の正方向と最大主應力との

なす角を α' とすれば，前論文の所說により，

$$\beta'=\alpha'+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\rho$$

が成立つ。

$$\therefore \quad \alpha'=\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}$$

即ち，

$$\angle CC'Q'=2\alpha'=\frac{\pi}{2}-\rho$$

となるから，P′ は圖-3 に示す如く圓 C′ と OT 線との切點となる。換言すれば，$L=0$ を滿足する應力 σ_θ'，$\tau_{r\theta}'$，σ_r' は應力圓 C′ 上の點 P′，Q′ で表はされ，P′Q′ 線の σ 軸となす角は $2\alpha'$ を與へる事となる。

次に滑り面上の點に於ては滑りの條件を滿足するが故に，此點の應力圓を C″ とすれば，圓 C″ も OT，OS に切する筈である。然るに計算例に示す如く，前論文の $q=0$ の場合の滑り面は Reissner の滑り面の內部に包まれ，任意の過載荷重 q がある場合の滑り面は全て以上の 2 つの滑り面の間に存在する。故に此滑り面と r の正方向とのなす角を β'' とすれば，β'' は少くとも θ_0 の近くに於ては β' よりも大なる筈である。從つて此點に於ては主應力と r とのなす角 α'' も α' より大きくなる筈であるから，此點の應力 $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_r$ は圖-3 の如く應力圓 C″ 上の或る P″，Q″ の如き點を以て表はす事が出來る。勿論 P″，Q″ と P′，Q′ との橫距及縱距の差は σ_θ''，$\tau_{r\theta}''$，σ_r'' を示す理である。

次に以上の C″ なる應力圓を有する點と同一放射線上にて滑り面より內部にある 1 點に於ける應力圓を考へて見る。此線上全ての點に於て $\sigma_\theta', \tau_{r\theta}', \sigma_r'$ は一定であり，σ_θ''，$\tau_{r\theta}''$，σ_r'' は r に比例するから，此點の應力は P′P″ 上及び Q′Q″ 上に於て r に比例する點 P，Q にて表はされ，從つて PQ と σ 軸との交點を C とすれば C を中心とし，P，Q を通る圓が此點の應力圓を與へる。然して圖より明かなる如く，

$$2\alpha'<2\alpha<2\alpha' \qquad \delta<\rho$$

なるが故に此圓は OT，OS の內部に包まれ，之等に交はらない。即ち此點の應力は滑りの限界に達せざるを示す。

然るに過渡領域內の應力は滑り面より內部にて連續であるから，少くとも θ_0 の近くに於て以上の如く滑りの限界以內の點が存在するならば，全區域此限界以內にあつて，限界を超過する樣な不合理な點は存在しないのである。

5. r_m の算定

滑りの條件 (41) 式を用ふる爲には滑り面の位置 r_m を必要とする。然るに r_m の些少の相違は支持力 p'' の値に殆んど實用的の影響を及ぼさないから r_m の算定には次の如き近似法を使用して充分である。

前論文の所說に從へば，最大主應力と r の正方向とのなす角 α_m は，

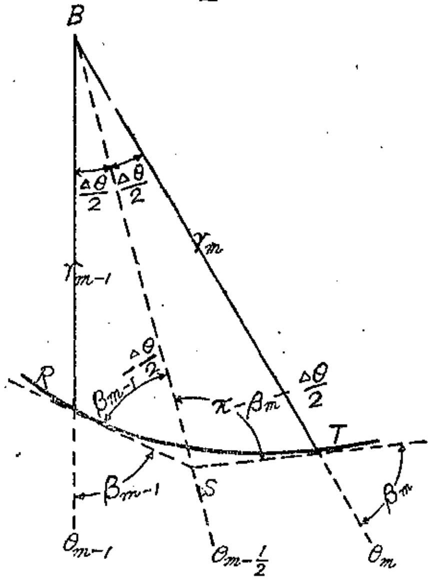
$$\tan 2\alpha_m=-\frac{2\tau_{r\theta m}}{\sigma_{\theta m}-\sigma_{rm}} \quad \cdots\cdots(42)$$

で與へられ，滑り面の切線が r の正方向となす角 β_m は，

$$\beta_m=\alpha_m+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right) \quad \cdots\cdots(43)$$

に依つて求められる。圖-2，圖-4 に於て r_{m-1} が既知の場合 r_m は近似的に次の如くして求めるものとする。

圖-4.



滑り面と r_{m-1} 線及び r_m 線との交點を夫々 R 及び T とする時 R 及び T に於ける滑り面への切線が ∠RBT の 2 等分線上の S 點にて交るものと假定して r_m を求める。即ち，

$$\frac{\mathrm{BS}}{r_{m-1}}=\frac{\sin(\pi-\beta_{m-1})}{\sin\left(\beta_{m-1}-\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)}=\frac{\sin\beta_{m-1}}{\sin\left(\beta_{m-1}-\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{r_m}{\mathrm{BS}}=\frac{\sin\left(\pi-\beta_m-\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)}{\sin\beta_m}=\frac{\sin\left(\beta_m+\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)}{\sin\beta_m}$$

$$\therefore\quad r_m=r_{m-1}\times\frac{\sin\beta_{m-1}\cdot\sin\left(\beta_m+\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)}{\sin\beta_m\cdot\sin\left(\beta_{m-1}-\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots(44)$$

に依る。但し $\theta=\theta_0$ に於ては滑り面は C 點を通るべきであるから，

$$r_0=\mathrm{BC}=b/\cos\theta_0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

となる。依つて (44) 式により順次 r_m を決定し得る。

以上により理論上は (41) 式に各線上の r_m を入れて未知數を決定し得る理であるが，實際には β_m の式には未知數 p'' を含めるが故に r_m にも p'' を複雜な形で含み，之を解く事は困難である。故に實際計算に於ては，何等かの方法で r_m の近似値を求め，之を以て p'' を計算し，此 p'' を用ゐて更に r_m を求め，p'' の再算定を行ひ斯の如くにして漸次正しい値に近附ける繰返し試算法による外はない。然るに前述の如く全ての場合の滑り面は $q=0$ の滑り面と，Reissner の滑り面との間に存在し，兩限界が定まつて居るから，r_m の假定には差程の困難を伴はないのである。例へば $q=3b\cdot\gamma$ の場合の計算に於ては，先づ第一近似値として $q=2b\cdot\gamma$ の滑り面の r_m を用ゐ，二三回計算を繰返せば所要の値が得られる。

6. Reissner の應力函數及び滑り面

前論文冒頭に引用せる通り，Reissner は q に比して $b\gamma$ が無視し得られる場合の支持力及び滑り面を，滑り面の一般理論を元として求めた。かゝる場合，即ち p' の計算の場合には，計算例に示す如く，著者の方法による支持力及び滑り面は Reissner のものと殆んど一致する。よつて $L=0$，即ち p' の計算には何れの方法を用ゐても大差ないが，Reissner の結果を用ひた方が簡單であり，便利であるから，此處に同氏の支持力式を再記し，尙其の應力關係を檢討し，同時に同氏の滑り面の式を求めて置く事とする。

Reissner の原論文に於ては次の結果が導かれて居る。

圖-5 に於て，

$$q=p_n'\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)$$

$$p_n'=ce^{2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)\tan\rho}$$

$$p_0'=ce^{2\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\rho}{2}\right)\tan\rho}\ \text{(2)}$$

(2)　前論文に於ては原論文の通り $p_0'=ce^{2\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\rho}{2}\right)}$ と記したが，之は原文の印刷誤であると思ふ。

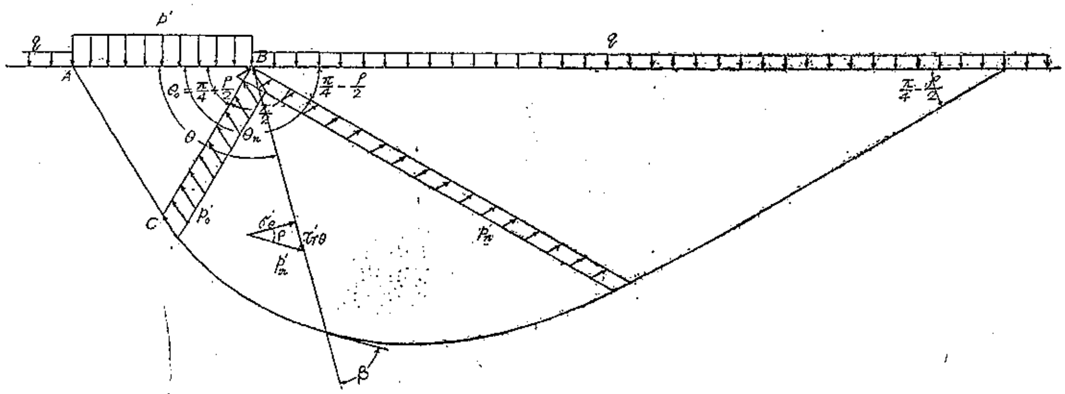
$$p' = p_0' \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}\right)$$

$$\therefore \quad p' = q\frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho} e^{\pi\tan\rho}$$

$$= \frac{q}{k} e^{\pi\tan\rho} \quad \cdots\cdots(46)$$

滑り面は B を通る全ての放射線及び之と $\beta=\pi/2-\rho$ なる角をなす對數螺旋曲線を與へて居る。此事は放射線への合應力は曲線滑り面の方向に作用し，即ち圖-5 に於ける p_m' と放射線への結線とのなす角は ρ なる事を意味する。

圖-5.



又任意の θ 線上の p_m' は次式にて與へられて居る。

$$p_m' = ce^{2(\pi-\theta)\tan\rho} \quad \cdots\cdots(47)$$

但し，c は q の式に p_n' の値を入れる事により得られる次の如き常數である。

$$c = \frac{q}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)} e^{-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)\tan\rho} \fallingdotseq q\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\rho}{2}\right)e^{-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)\tan\rho} \quad \cdots\cdots(48)$$

(47) 式より引張應力を正符號として次の應力函數を導く事を得る。

$$\chi'^{(R)} = -\frac{cr^2}{2}\cos\rho\cdot e^{2(\pi-\theta)\tan\rho} \quad \cdots\cdots(49)$$

之より應力を出せば，

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\theta' &= -c\cos\rho\cdot e^{2(\pi-\theta)\tan\rho}\\
\tau_{r\theta}' &= -c\sin\rho\cdot e^{2(\pi-\theta)\tan\rho}\\
\sigma_r' &= -2c\sin\rho\tan\rho\cdot e^{2(\pi-\theta)\tan\rho} - c\cos\rho\cdot e^{2(\pi-\theta)\tan\rho}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(50)$$

を得る。此應力より念の爲に曲線滑り面の方向 β を求むれば次の如くなる。

$$\sigma_\theta' - \sigma_r' = 2c\sin\rho\tan\rho\cdot e^{2(\pi-\theta)\tan\rho}$$

$$2\tau_{r\theta}' = -2c\sin\rho\cdot e^{2(\pi-\theta)\tan\rho}$$

$$\therefore \quad \tan 2\alpha = -\frac{2\tau_{r\theta}'}{\sigma_\theta' - \sigma_r'} = \cot\rho$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$$

$$\therefore \qquad \beta=\alpha+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\rho$$

尙 (50) 式の應力が滑りの條件 (36) を滿足する事は勿論である。然るに (49) の應力函數 $\chi'^{(R)}$ は變形の條件 (14) を充さない。卽ち，

$$\nabla^4\chi'^{(R)}\neq 0$$

砂に於ては滑りに達した場合には (14) を滿足する必要は無いが，少くとも其の直前迄は此條件を充すを妥當とするならば，Reissner の理論も嚴密に正しいものでは無い樣である。著者の方法も分割數 n を有限に取る限り，勿論近似法の範圍を脫却し得ない。併し乍ら兩方法の結果の一致は兩式の近似性の精度を示すものと考へられる。

次に Reissner の滑り面は對數螺旋曲線であるから一般に次の如く置く事が出來る。

$$r=\kappa e^{c_1\theta} \qquad \text{但し}\ \kappa, c_1\ \text{は常數}$$

r を θ にて微分すれば，

$$\frac{dr}{d\theta}=\kappa c_1 e^{c_1\theta}=c_1 r$$

を得る。依つて

$$\tan\beta=r\frac{d\theta}{dr}=\frac{1}{c_1}$$

$$\therefore \qquad c_1=\cot\beta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\rho\right)$$

$\theta=\theta_0$ に於ては，$r=r_0$ であるから，

$$r_0=\kappa e^{c_1\theta_0} \qquad \therefore \qquad \kappa=r_0 e^{-c_1\theta}$$

以上の κ, c_1 を r の式に入るれば滑り面の式が次の如く求められる。

$$r=r_0 e^{c_1(\theta-\theta_0)}=r_0 e^{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\rho\right)\times(\theta-\theta_0)} \qquad \cdots\cdots(51)$$

7. 計算例

$\rho=30°$ の場合の計算例を示す。

$$\theta_0=60°, \qquad \theta_n=150°$$

前論文に示せる如く $n=6$ とすれば，大體妥當の値が得られるから分割數を 6 とする。

$$\theta_0=60°,\quad \theta_1=75°,\quad \theta_2=90°,\quad \theta_3=105°,\quad \theta_4=120°,\quad \theta_5=135°,\quad \theta_6=150°,\quad \Delta\theta=15°$$

$$r_0=b/\cos\theta_0=2b$$

先づ著者の方法により $L=0$ の計算をなせば，支持力 p' の値及び此場合の滑り面の角度 β_m は次の如くなる。

$$p'=18.09\,q$$

$$\beta_1=60°54',\quad \beta_2=59°42',\quad \beta_3=61°20',\quad \beta_4=57°36'$$

此場合 Reissner の方法による支持力及滑り面は次の如きものとなる。

$$p'=18.401\,q$$

$$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=60°$$

以上により著者の方法による支持力並びに滑り面は，Reissner の夫等と殆んど一致するを知る。此結果からも $n=6$ 位にとれば大體に於て正しい値が得られる事が分る。

表-1. $\rho=30°$ の場合の支持力表

$q/b\gamma$	$p'/b\gamma$	$p''/b\gamma$	$p/b\gamma$
0	0	18.21	18.2
1	18.40	23.86	42.3
2	36.80	26.51	63.3
3	55.20	28.34	83.5
5	92.01	29.30	121.3
10	184.01	28.83	212.8

以下に於ては $L=0$ の場合卽ち $p', \sigma_\theta', \tau_{r\theta}', \sigma_r'$ 等の値は Reissner の方法により求めたものを採用した。

今 $q=0, b\gamma, 2b\gamma, 3b\gamma, 5b\gamma, 10b\gamma$ に對して計算した支持力の値を示すと**表-1** の如くなる。**表-2** は之等の場合の滑り面の r_n を示す。

表-1 により支持力曲線を作れば**圖-6** の如くなる。

圖-7 は $\rho=30°$ の場合の滑り面を畫いたもので，全ての滑り面は前論文 $q=0$ の滑り面と Reissner の滑り面との間にあり，q が大きくなる程後者に近附く事を示して居る。

8. 結　　語

前論文と本論文との方法を用ふる事により，奥行長き構造物よりの荷重が基礎面に等分布する場合の全ての滑り面及び支持力を求める事が出來る。併し計算は可成り面倒であるから，ρ の種々の値に對する支持力圖表を作製して實用に供する積りである。

圖-6. $\rho=30°$ の場合の支持力曲線

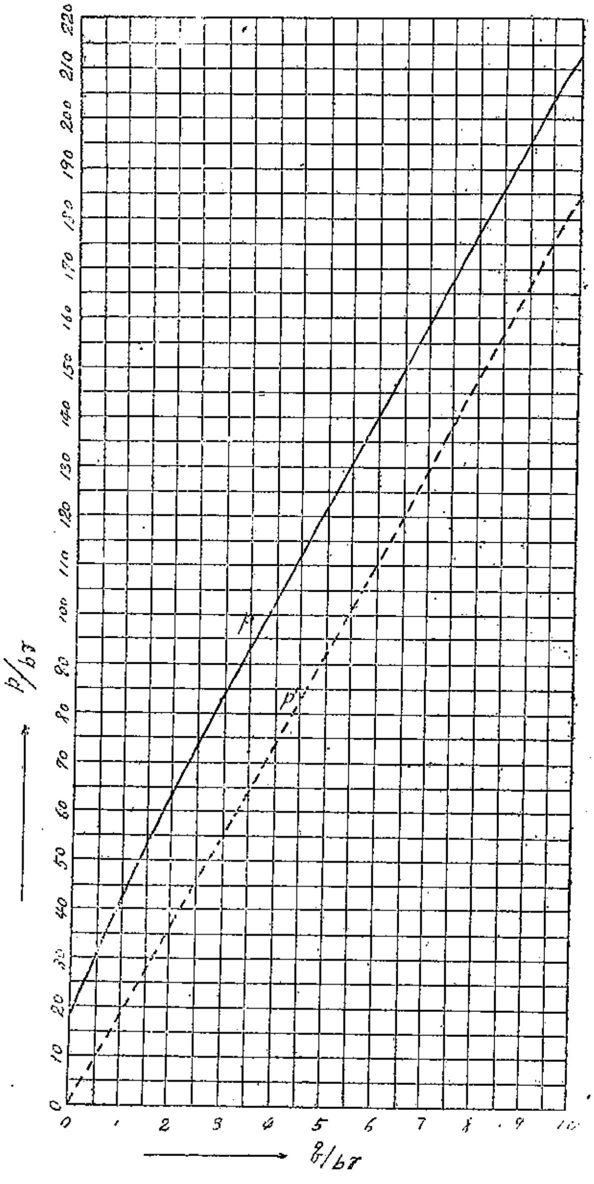
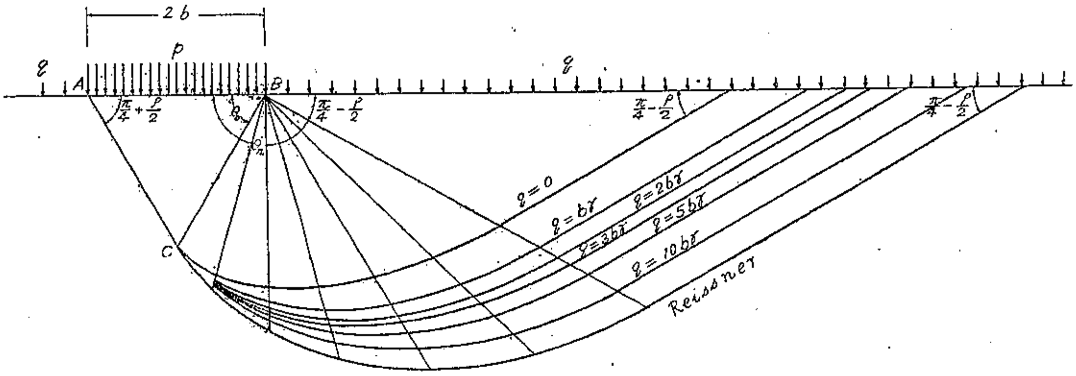


表-2. $\rho=30°$ の滑り面

$q/b\gamma$	r_0/b	r_1/b	r_2/b	r_3/b	r_4/b	r_5/b
0	2	2.167	2.201	2.290	2.436	3.040
1	2	2.205	2.336	2.543	2.783	3.533
2	2	2.224	2.403	2.663	2.946	3.778
3	2	2.236	2.447	2.734	3.039	3.936
5	2	2.254	2.513	2.838	3.173	4.167
10	2	2.280	2.597	2.962	3.356	4.557
Reissner	2	2.326	2.678	3.148	3.661	4.953

圖-7. $\rho=30°$ の場合の滑り面



尙比較的簡單に安全なる支持力の値を得る爲には，先づ Reissner の式により p' を求め，前論文の $q=0$ の場合の支持力 p'' を求めて，之等の p' と p'' とを加へたものを支持力 p としてもよいと思ふ。

附記：本文を草するに當り，安藏教授に有益なる御助言を恭うした。玆に深甚なる謝意を表する次第である。

（昭. 18. 2. 18. 受付）