

論 說 報 告

第 29 卷 第 4 號 昭和 18 年 4 月

ラーメン隅部の應力度の研究, 特に圖解法に就て
(曲梁の應力度の研究)

正會員 大 野 諫*

前 編

要 旨 鋼及鉄筋コンクリート構造におけるラーメン隅部は構造の要點をなす。實地設計においてはラーメン隅部は通常代用曲梁により計算する。而して従來夫に對し用ひられてゐる設計公式は

$$\text{C. Bach 氏の公式} \quad \sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_v}{fr} + \frac{M_b}{\kappa fr} \frac{\eta}{r+\eta}$$

$$\text{又は Müller-Breslau 氏の公式} \quad \sigma = \frac{N}{F} - \frac{M}{Fr} + \frac{Mv}{Z} \frac{r}{r-v} \quad \text{である。}$$

著者は中立軸に關する断面常數 Z_0 を導入し

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{My}{Z_0 r}$$

なる新公式を出し、従來の断面常數 κ, Z と新断面常數 Z_0 との關係を明らかにし、且夫等の圖解法を考案し、又新公式の銜接計算及鉄筋コンクリート曲梁への應用を考へ、更に最近問題とされてゐる降伏状態における曲梁の應力度に對し應用して見た。

前 編 目 次

1. 緒 論
2. 曲梁の應力度に對する公式
3. 平面應力問題としての曲梁の理論 (精密なる解)
 - a) 曲梁が曲げモーメント M を受くる場合 (單純曲げ)
 - b) 曲梁の端面に外力 Qa が作用する場合
4. 曲梁に對する實用公式 (近似式)
 - a) Müller-Breslau, Bach, Grüning, 覺前博士, Timoshenko 及著者の公式
 - b) 各公式の比較と新公式の特長
 - c) 断面常數 Z 及 κ の圖解法
 - d) Z の計算公式
 - e) 中立軸をもととして考慮せる著者の公式
 - f) 断面常數 Z 及 Z_0 の研究
 - g) 中立軸の位置
 - h) 中立軸及断面常數 Z 及 Z_0 に對する著者の圖解法
 - i) 中立軸と重心軸との距離 e
 - j) 曲梁における半径方向の應力度 σ_r に對する著者の圖解法
5. 計算例 1

精密なる解と著者の圖解法との比較

 - a) Müller-Breslau 氏の公式による場合
 - b) Timoshenko 氏の公式による場合
 - c) 著者の公式による場合
 - d) Toile 氏の方法により断面常數 Z を求めること
 - e) 断面常數 Z と Z_0 との圖上における關係
 - f) 中立軸の位置 v 及断面常數 Z の計算
 - g) 断面における σ_t 即ち σ と σ_r の分布
 - h) 偏心力作用する場合
6. 計算例 2
 - a) Müller-Breslau 氏の公式による場合
 - b) Timoshenko 氏の公式による場合
 - c) 著者の公式による場合
 - d) 突縁の突出脚の撓みを考慮する場合
7. 計算例 3

* 徳島高等工業學校教授

- a) Müller-Breslau 氏の公式による場合
- b) 著者の公式による場合
- 9. 鉄筋コンクリート曲梁への應用
- 10. 横歪, 半徑方向の應力度を考慮せる場合
- 8. 突縁と腹とを連結する鉋距に對する著者の公式
- 11. 参考文献

1. 緒 論

鋼及鉄筋コンクリート構造におけるラーメン隅部の實地設計においては, 一般に曲軸を有する代用梁が考慮せらる。即ち 圖-1 に示す如く板狀のラーメン隅部の横断面 OC' における垂直應力度 σ の分布を見るに, 隅角 C' の近傍に於ける σ の値は理論的にもり實驗的にも²⁾ 甚だ小なるを以て, 實地設計にありては圖-1 及 圖-2 において $A'C'B'$ なる部分を除きたる半徑 r_g の曲軸を有する高さ h なる曲梁が其代用として考慮せらる。若し圖-3 に示す如く高さ異なる二部材より成るラーメン隅部に對しては, 高さ h 及 h' なる 2 つの曲梁が代用梁として考慮せらる。

又, 圖-4 に示す如く多徑間ラーメンの中間節點の設計においては一般荷重を對稱荷重と逆對稱荷重とに分ち, 對稱荷重に對しては曲梁 $abcd$ を考へ, 逆對稱荷重に對しては 2 つの曲梁 $abef$ 及 $cdef$ を考ふ。勿論かかる計算は應力の不確實を考慮して許容應力度を幾分低目に取るものとす³⁾。

かくの如くラーメン隅部の實地設計々算は代用曲梁につき行はるるを以て以下主として曲梁につき考究することとした。

2. 曲梁の應力度に對する公式

曲梁における應力度の精密なる公式は彈性理論において平面應力問題として考ふる時, Airy の應力函數を用ひて誘導せらるる事はよく知られて居る事柄である⁴⁾。勿論曲梁の兩端における力の分布状態が其解に適合する場合に限り正解となるものであつて, 力の分布異れば兩端近くの應力度分布は解とは異なるが, Saint-Venant 氏の原理により兩端より遠方の點にては其解が使用せられ得る事も周知の事柄である。然し任意横断面を有する曲梁の解は決して容易ではない。かかる場合吾々は實用的に近似式にて満足してゐる。先づ梁軸の曲率半徑が大なる場合即ち曲率半徑が梁丈の約 2.5 倍以上になれば, 直梁に對する公式 $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{My}{I}$ (Navier 又は Föppl の公式と稱せらる) にて充分である。されど起重機用鉤やラーメン隅部の如く曲率半徑小なるものにては, 曲梁の公式によらねばならぬ。夫に對し最も有名なるは H. Müller-Breslau 氏⁵⁾ 及 C. Bach 氏の公式であつて, 我國の有名な著書にはすべて

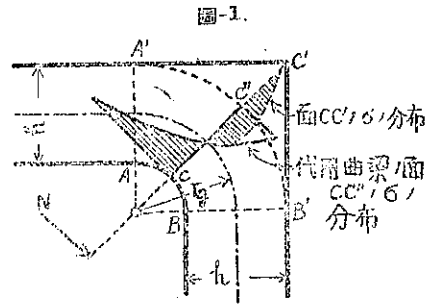


圖-1.

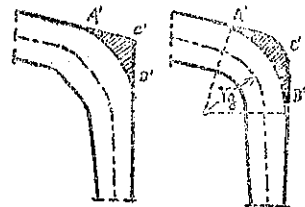


圖-2.

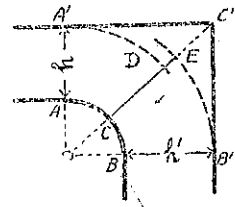


圖-3.

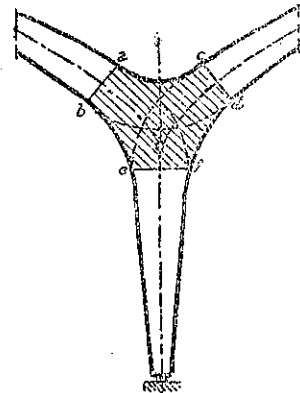


圖-4.

1), 2), ... 参考文献は一括して本文の終に掲ぐ。

Bach 氏の公式を掲げて居る⁶⁾。其他曲梁の應力度に對する公式として Gruning, 覺前博士, Timoshenko 及著者の公式を擧ぐることを得。次に鐵筋コンクリート曲梁に對しては F. Emperger 氏⁷⁾, 又は福田博士の著書⁸⁾に種々の荷重について, 應力度公式が掲げられてゐる。

次に以上の諸公式及 著者の新公式を比較し 且考察せる圖解並に其應用につき述べよう。

3. 平面應力問題としての曲梁の理論 (精密なる解)

すべて平面應力の問題は一つの良方法として Airy⁹⁾の應力函数により精密なる解を求める事が出来る。曲梁の Airy 函数による解を示せば次の如し⁹⁾。

a) 曲梁が曲げモーメント M を受くる場合 (單純曲げ) (圖-5)

親和條件
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}\right) = 0$$

應力函数
$$E = c_0 + c_1 \ln \rho + c_2 \frac{1}{\rho^2} + c_3 \frac{1}{\rho^2} \ln \rho \dots\dots\dots (1)$$

垂直應力度
$$\left. \begin{aligned} \text{半徑方向} \quad \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{4M}{T_1} \left(-\ln \frac{\rho_1}{\rho} - \rho_1^2 \ln \rho + \rho^2 \ln \rho_1\right) \\ \text{切線方向} \quad \sigma_t &= \frac{d^2 F}{dr^2} = \frac{4M}{T_1} \left(\rho_1^2 - 1 - \ln \frac{\rho_1}{\rho} - \rho_1^2 \ln \rho - \rho^2 \ln \rho_1\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

剪斷應力度
$$\tau_{rt} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

こゝに
$$T_1 = r_1^2 [(\rho_1^2 - 1)^2 - 4\rho_1^2 (\ln \rho_1)^2]; \quad \rho_1 = \frac{r_2}{r_1}; \quad \rho = \frac{r_2}{r} \dots\dots\dots (4)$$

\ln は自然對數なる事を示す。

b) 曲梁の端面に外力 Q_a が作用する場合 (圖-6)

親和條件
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right) = 0$$

應力函数
$$F = \Phi(r) \cdot \sin \alpha$$

$$\Phi(r) = c_1 \frac{1}{\rho^2} + c_2 \frac{\ln \rho}{\rho} + c_3 \frac{1}{\rho} + c_4 \rho \dots\dots\dots (5)$$

垂直應力度
$$\left. \begin{aligned} \text{半徑方向} \quad \sigma_r &= \left(\frac{\Phi'}{r} - \frac{\Phi}{r^2}\right) \sin \alpha = K_1 \sin \alpha \\ \text{切線方向} \quad \sigma_t &= \Phi'' \sin \alpha = K_2 \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

剪斷應力度
$$\tau_{rt} = -\left(\frac{\Phi'}{r} - \frac{\Phi}{r^2}\right) \cos \alpha = -\frac{\sigma_r}{\tan \alpha} = -K_1 \cos \alpha$$

こゝに

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{Q_a}{T_2} \left[\frac{\rho_1^2}{\rho} - (\rho_1^2 + 1)\rho + \rho^2\right]; \quad K_2 = \frac{Q_a}{T_2} \left[2\frac{\rho_1^2}{\rho} - (\rho_1^2 + 1)\rho - \rho^2\right]; \\ \rho_1 &= \frac{r_2}{r_1}; \quad \rho = \frac{r_2}{r}; \quad T_2 = r_2 [(\rho_1^2 + 1) \ln \rho_1 - (\rho_1^2 - 1)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

圖-5.

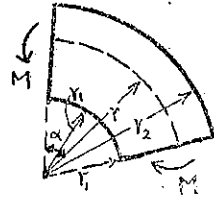
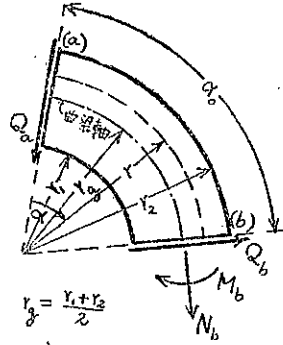


圖-6.



a), b) 兩場合における應力度が判れば任意荷重 (圖-7) に對する應力度はこの 2 つの場合の和として求められる。即ち 圖-7 の場合は圖-8 の如くに分解して考ふる事を得, 故に a), b) 兩場合は曲梁應力度に對する基本解と見做さる。これ等精密公式による値と著者の圖解法による結果との比較は後に例題を以て示すことにする。尙平面問題として考へる時 2, 3 の簡單なるラーメン節點に對しては彈性論的に精密研究されたものはあるが, 複雑な實際構造に出てくる斷面については精密解が出来ぬので實用公式が用ひらる。次に夫等實用公式を掲げ比較して見よう。

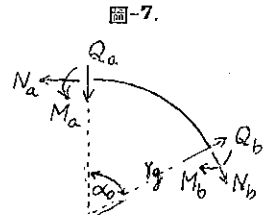


圖-7.

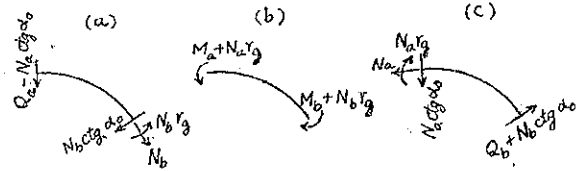


圖-8.

4. 曲梁に對する實用公式 (近似式)

a) Müller-Breslau, Bach, Grüning, 學前博士, Timoshenko 及著者の公式

これらの近似式はすべて横斷面が外力を受けた後も尙平面を保つといふ假定の下に立てたものであつて, この假定は實地上容認せられ且鋼部材, コンクリート部材又は鐵筋コンクリート部材に對し全く相等しい原理方法により公式が誘導せらる。而して從來最も廣く用ひられてゐるのは Müller-Breslau 及 Bach の公式である。

(イ) 先づ Müller-Breslau 氏の公式を示せば¹⁰⁾

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{Z} \frac{r}{r-v}, \quad N = N - \frac{M}{r} \dots\dots\dots(8)$$

即ち
$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M}{Fr} + \frac{Mv}{Z} \frac{r}{r-v} = \frac{N}{F} + M \left(\frac{rv}{Z(r-v)} - \frac{1}{rF} \right) \dots\dots\dots(9)$$

$$Z = \int v^2 \frac{r}{r-v} dF \quad \text{又は} \quad Z = J + \frac{1}{r} \int v^2 dF + \frac{1}{r^2} \int v^4 dF + \dots\dots\dots(10)$$

ここに σ は曲梁横斷面の垂直應力度, N は重心にはたらく垂直力, M は曲げモーメント, F は横斷面積, r は梁軸の曲率半径, v は梁軸より垂直に測りたる斷面内の考へる點に到る距離にして, 梁軸より曲率半径の中心方向に測りたる距離を正とし外方に測りたる距離を負とす。 Z は梁軸に關する斷面常數にして $r = \infty$ なる直梁に對しては慣性モーメント J に歸着する斷面に關する常數である。

(ロ) G. Bach 氏の公式を示せば¹¹⁾

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\kappa fr r + \eta} \dots\dots\dots(11)$$

ここに
$$\kappa = -\frac{1}{f} \int \frac{\eta}{r+\eta} df \dots\dots\dots(12)$$

σ は垂直應力度, P は重心にはたらく垂直力, M_b は曲げモーメント, f は横斷面積, r は梁軸の曲率半径, η は斷面における點の梁軸よりの距離にして曲率中心より外方へ測りたるを正とす。 κ は斷面に關する常數にして θ を横斷面の慣性モーメントとすれば曲率半径 $r = \infty$ なる直梁に對し $\kappa = \frac{\theta}{fr^2}$ となる。

(ハ) Grüning 氏の公式を示せば¹²⁾

$$\sigma = \frac{N_v}{F} + \frac{M_v}{Z} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{y_0 r_0}{r_0 - y_0} \quad \text{又は} \quad \sigma = \frac{1}{F} \left(N_v + M_v \frac{y_0}{e(r_0 - y_0)} \right) \quad (13)$$

ここに

$$e = \frac{Zr}{Z + Fr^2}, \quad Z = \int y^2 \frac{r}{r-y} dF \quad (14)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{b(r-y)} \frac{M_v}{Z} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[\int_{y_0}^{h_0} y_0 \cdot b \cdot dy + \frac{1}{r_0} \int_{y_0}^{h_0} y_0^2 \cdot b \cdot dy \right] \quad (15)$$

σ は切線方向の垂直應力度, σ_y は半径方向の垂直應力度, Z は Müller-Breslau 氏の断面常数, N_v は重心にはたらく垂直力, M_v は曲げモーメント, r は梁軸の曲率半径, r_0 は中立軸の曲率半径, y_0 は中立軸より測りたる距離, y は梁軸より測りたる距離にして曲率中心方向へ測りたるを正とす。 e は梁軸と中立軸との間隔, F は横断面積, h_0 は中立軸より縁維に到る距離である。

(ニ) 覺前博士の公式を示せば¹³⁾

$$\sigma = \frac{P[\pm c(1+K) + R]}{KFR} \frac{-y}{r+y} \quad (16)$$

ここに

$$r = \frac{R(R \pm e)}{\pm c(1+K) + K}; \quad K = -\frac{1}{F} \int_{a-r}^{b-r} \frac{y dF}{r+y} \quad (r=R \text{ と置く}) \quad (17)$$

R は曲率中心より重心までの距離, r は曲率中心より中立軸に到る距離, P は垂直力, e は曲率中心より P なる力に到る距離, F は横断面, K は断面常数にして断面矩形の場合, h を梁の高さとするば

$$K = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{R} \right)^4 + \dots \quad (18)$$

即ち Bach 氏の断面常数 κ を表す。特別の場合として単純曲げの場合には

$$\sigma = \frac{M(1+K) - y}{KFR} \frac{-y}{r+y} \quad \text{但し} \quad r = \frac{R}{1+K} \quad (19)$$

(ホ) Timoshenko 氏の公式を示せば¹⁴⁾

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{My}{Ac(r-y)}; \quad r = \frac{A}{\int \frac{dA}{v}} \quad (20)$$

σ_x は横断面における垂直應力度, r は曲率中心より中立軸に到る距離, P は垂直力, M は曲げモーメント, A は横断面積, y は中立軸より横断面の任意點に到る距離にして曲率中心方向へ測りたる長さを正とす。 e は曲率中心と中立軸との間の距離を表す。

(ヘ) 著者の公式を示せば

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{My}{Z_0} \frac{r_1}{r} \quad (\text{本節 e) 参照}) \quad (21)$$

$$Z_0 = r_1 \int y^2 \frac{dF}{r} \quad (\text{本節 f) 参照}) \quad (22)$$

$$r_0 = \frac{F}{\int \frac{dF}{r}} \quad (\text{本節 g) 参照}) \quad (23)$$

$$\sigma_r = \mp \frac{\bar{\sigma}}{r} \quad (\text{本節 j) 参照}) \quad (24)$$

横断面が矩形断面より組立てらるゝ場合には

$$Z_0 = r_1 \left(r_0^2 \sum b l_n \frac{w_1}{w_2} + F r_g - 2 F r_0 \right) \quad (\text{本節 f 参照})$$

$$r_0 = \frac{F}{L}; \quad L = \sum b l_n \frac{w_1}{w_2} \quad (\text{本節 f 参照})$$

著者の断面常数 Z_0 と Müller-Breslau の断面常数 Z との関係を示せば

$$Z_0 = r_1 \left(\frac{Z}{r_g} - e^2 L \right) \quad (\text{本節 f 参照})$$

b) 各公式の比較と新公式の特長

先づ (イ) Müller-Breslau の公式, (ロ) C. Bach の公式, この両者は記號は違ふが内容は全く相等しく, 公式も, その中に出てくる断面常数も共に曲梁の軸をもととして考へたものである。只 (イ) では断面常数 Z を用ひ (ロ) では断面常数 κ を用ひてゐるだけが違つてゐる。

次に (ハ) Grüning の式, (=) 覺前博士の式, この両者は共に中立軸をもととして考へた所に特色があるが断面常数として梁軸に關するものを用ひてゐる, 即ち (ハ) では Müller-Breslau の断面常数 Z を用ひ (=) では Bach の断面常数を用ひてゐる, 従つて式の形が稍複雑になつてゐる。尙 Grüning は珍らしく半徑方向の應力度 σ_y の式をも掲げてゐる。但し矩形断面に對する公式である。

最後に (ホ) Timoshenko の式, (ヘ) 著者の公式, この両者は共に中立軸をもととして立てた式で, (ホ) では梁軸より中立軸に到る距離 e を, (ヘ) においては断面常数自身も亦中立軸に關する値 Z_0 を導入した。従つて (イ)(ロ)(ハ)(=) よりも式が簡潔となり且後述の如く圖解に甚だ便利である。断面常数 Z_0 は曲梁軸の曲率半徑 ρ なる直梁に對し慣性モーメント J になり (ヘ) の (21) 式は直梁の場合の公式 $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M y}{J}$ に歸着するのである。而してこの式は又, 若し ρ を慣性半徑, F を横断面とし, $J = F \rho^2$ と書けば $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M y}{F \rho^2}$ となる, 然らばこれは (ホ) Timoshenko の式に對應するものと考へることが出来る。(イ)(ロ) を見ると曲梁の場合の公式が何だか特に難しそうな形をしてゐるが (ホ) 及新公式はかくの如く親しみ易い形をしてゐる。(イ)(ロ) ではモーメントを含む項が一つに纏まり垂直力に對する項と共に 3 つになつてゐるが, (ホ)(ヘ) ではモーメントを含む項が 1 つに約まり垂直力に對する項と共に 2 つになつてゐる。かくの如くにして直梁の場合核モーメントを考へるよう (ホ), (ヘ) の 2 つの項を更に 1 つに約める事に考へ及ぶのであるが, 一般に圖解にはかへつて面倒である。(ホ), (ヘ) は計算に又特に圖解に應用して便利であるが (ホ) は不對稱断面の場合断面重心軸を求むる必要がある。それに反し (ヘ) には其の要がない。

近似解では通常半徑方向の應力度は考へてゐないが著者は (24) 式により圖解的に簡単に求め且弾性論による精密解とよく一致するを見た。著者は断面常数 Z 及 Z_0 の圖解を考へ且兩者の關係を求めた。以下夫等の結果につき説明しよう。

o) 断面常数 Z 及 κ の圖解法

先づ断面常数 κ の圖解法としては既に Tolle 氏の方法がある¹⁶⁾。故に断面常数 Z 及 Z_0 の圖解法を考へることにした。その爲には Z, Z_0 の式を慣性モーメントの形に變形すればよい, 然らば二次モーメントの作圖が直ちに應用出来る。即ち先づ Z につき考ふるに, (10) 式において, 曲率半徑を r_0 と書けば, それより

$$Z = \int v^2 \frac{r_0}{r_0 - v} dF$$

これを變形すれば,

$$Z = r_0 \sum v^2 dI; \quad dL = \frac{dF}{r_0 - v} = \frac{dF}{r} \dots \dots \dots (25)^{16)}$$

となる。然らば $\sum v^2 dL$ は dL なる量の梁の重心軸に關する二次モーメントを表す故に、 dL を力と見做せば Culmann 氏又は Mohr 氏の二次モーメントの作圖 (拙著: 圖式靜力學, 上卷, 56 頁及 64 頁) を應用するを得容易に Z の値を求むる事を得。又, Nehls 氏の方法により第二誘導面を出して計算し得るも, 殊に細帯面の I 字形斷面の如き場合複雑不精密となり易く實用的ならず。

又, 斷面常數 Z を求めるだけならば Bach 氏の常數 κ との間に

$$Z = \kappa r_0^3 F \dots \dots \dots (25a)$$

なる關係成立する故に Tolle 氏の方法により κ を求め $r_0^3 F$ 倍すればよい。

d) Z の計算公式

Z_0 と比較するため從來導出せられてゐる Z の計算公式を掲ぐれば次の如し。

斷面形簡單なる場合は κ と同様完結したる形に積分して求めらる。複雑なる圖形の場合は積分の代りに (25) 式の \sum の形にして計算せらる¹⁷⁾。實際によく出てくる鋸梁斷面の如く矩形斷面の組合せより成る場合は次式¹⁸⁾ により計算する事を得 (圖-9)。

$$Z = r_0^3 \sum b l_n \frac{w_1}{w_2} - F r_0^2 \dots \dots \dots (26)$$

こゝに b は各部分面の幅, r_0 は梁軸の曲率半徑, w_1, w_2 は曲率中心より部分面の上下縁に到る距離, F は全斷面, \sum は部分面の全體についての和, l_n は自然對數なる事を示す。若し鋸結組立斷面ならば抗張側に對しては鋸孔斷面を控除するものとす。

Z の値を水平重心軸に關し對稱なる斷面に對しては (10) の展開式において v の奇數乗の積分項は消失す。而して Z は常に慣性モーメント J より大である故に Z を J と置けば安全側となる。而して二軸對稱斷面において Z と J との差は僅少にして, 曲率半徑が梁の高さの 2 倍になれば數パーセントの差あるに過ぎない。

e) 中立軸をもととして考慮せる著者の公式

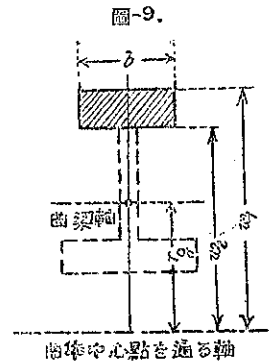
曲梁が偏心荷重を受くる場合, 中立軸の決定に關し Emperger 氏は其の圖解につき簡略に公式及方法を述べてゐる¹⁹⁾。然し中立軸を求める爲の量 $\frac{w}{w}$ dF が σ の公式中に含まれないから σ の式における常數は又別に求めねばならぬ。従つて著者は偏心力を重心軸にはたらく垂直力とモーメントに分ち, Spangenberg 氏の圖解法²⁰⁾ を最有效に應用し得るよう公式を誘導した。尙これは半徑方向の應力度 σ_r の近似値を求むるにも好適である (本節 j) 参照)。

偏心力 N を曲梁横斷面の重心にはたらく垂直力 N とモーメント $M = Nc$ (こゝに c は偏心力 N より梁斷面重心に到る距離) に分ち軸力の影響 $\sigma = N/F$ とモーメント M の影響との和として考ふ。

さて M のみはたらく場合, 垂直應力度の和零なる釣合條件式を書けば

$$\int \sigma dF = 0 \dots \dots \dots (27)$$

然るに 圖-10 において ABC'D' を曲げモーメント M を受けて曲梁部分 ABCD が變形した後の位置とすれば



$$\varepsilon = \frac{d ds}{ds} = \frac{y}{x} \frac{d ds_b}{ds} = \frac{y}{x} \frac{d ds_b}{ds_b} \frac{ds_b}{ds} = \frac{y}{x} \varepsilon_b \frac{r_1}{r} \dots (28)$$

ここに ε は中立軸より y なる距離における維歪, ε_b は内縁維の歪を表す。従つて ε 及 ε_b に對應する應力度を夫々 σ 及 σ_b にて表せば

$$\sigma = \sigma_b \frac{y}{x} \frac{r_1}{r} \dots (29)$$

これを (27) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \sigma_b \frac{r_1}{x} \int \frac{y}{r} dF &= 0 && \text{これより} \\ dL &= \frac{dF}{r} \dots (30) \end{aligned}$$

と置けば

$$\int y dL = 0 \dots (31)$$

を得。次に中立軸に對しモーメントに関する釣合條件式を書けば

$$\int \sigma y dF = M \dots (32)$$

これに (29) 式の値を代入すれば $\sigma_b \frac{r_1}{x} \int \frac{y}{r} y dF = M$ 此れより

$$\sigma_b = \frac{Mx}{r_1 \int y^2 \frac{dF}{r}} = \frac{Mx}{r_1 \int y^2 dL} = \frac{Mx}{Z_0} \dots (33)$$

然るに $\int y^2 \frac{dF}{r} = \int_{r_0-y}^y \frac{y^2}{r_0-y} dF = - \int y dF + r_0 \int \frac{y}{r} dF = - \int y dF = F \cdot e$ となる。ここに e は梁の中立軸より重心軸に到る距離を表す, 故に (33) 式は

$$\sigma_b = \frac{Mx}{Fr_1e} \dots (34)$$

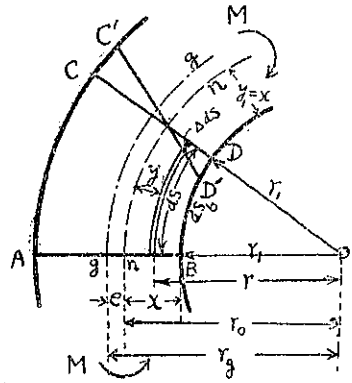
これ $N=0$ なる場合の Timoshenko 氏の公式 (20) に外ならず, 故に著者の公式 (33) 式は内容において, Timoshenko 氏の公式と兄弟關係にある。式の形簡にして暗記し易し, 即ち (33) 及 (34) 式は夫々直梁の場合の式 $\sigma_b = \frac{My_1}{J}$ 又は $\frac{My_1}{Fi^2}$ の形に極似してゐる。ここに y_1 は直梁に對しては梁の高さの半分, i は慣性半径, F は横断面, J は慣性モーメントを表す。 r_1e は i^2 に對立するものである。

(33) 式において $r_1 \int y^2 dL$ は中立軸に関する dL の二次モーメントであつて Müller-Breslau 氏の Z に對立する値であるから, 著者は其の記號を借用し應力零なる中立軸に関する値なることを明示するため零なる添數を附し断面常數 Z_0 を呼ぶことにした。 Z_0 の式より判るようにこれは dL を力と見做したる場合中立軸に関する二次モーメントの r_1 倍 (r_1 は内縁弧の半径なる事に注意を要す) なる故, Z と同様二次モーメントの作圖により容易に圖解的に求められる。然らば任意の偏心力を受くる場合, 任意點の應力度 σ は (29) 式より

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mx}{Z_0} \frac{y}{x} \frac{r_1}{r} = \frac{N}{F} + \frac{My}{Z_0} \frac{r_1}{r} \dots (35)$$

これ即ち所求の應力度 σ の公式にして Müller-Breslau の式 (9) 又は Bach の式 (11) に對應するものである。曲げモーメントのみを受くる時は (35) 式において N/F を零と置けばよい。中立軸の位置は一般に $\sigma=0$ と置

圖-10



きて求められる。M は内縁に壓應力度を生ずる場合を負とす。

f) 断面常数 Z 及 Z₀ の研究

Z は重心軸に関する常数にして, Z₀ は中立軸に関する値である。Z は曲率半径 r₀=∞ なる直梁に對し重心軸に関する慣性モーメント J に歸着す。同様に Z₀ も亦直梁に對し中立軸即ち重心軸に関する慣性モーメント J となる, 即ち次の如し。

$$Z_0 = r_1 \int y^2 \frac{dF}{r} = r_1 \int y^2 \frac{dF}{r_1 + x - y} = \int \frac{y^2 dF}{1 + \frac{x}{r_1} - \frac{y}{r_1}}$$

故に r₁→∞ の時 $Z_0 \rightarrow \int y^2 dF = J$

著者の圖解において最も便利な點は只 1 種の力多邊形と索多邊形のみにて σ_b を求め得るにある (後述例題参照)。即ち中立軸の條件 (31) 式及 σ_b の公式 (33) より判る如く夫々 y·dL 及 y²dL が同一なる量 dL の一次及二次モーメントとなつてゐるからである。(31) 式は dL を力と見做したる場合力の重心條件を表す故中立軸は dL の合力位置として圖解することを得。

次に Z と Z₀ との關係を求めて見た (圖-11)。

$$\begin{aligned} Z &= r_0 \int v^2 dL = r_0 \int (e + y)^2 dL = r_0 \left[\int e^2 dL + \int 2ey dL + \int y^2 dL \right] \\ &= r_0 e^2 L + r_0 \int y^2 dL = r_0 e^2 L + \frac{r_0}{r_1} Z_0 \end{aligned}$$

故に $Z_0 = r_1 \left(\frac{Z}{r_0} - e^2 L \right)$ (36)

この式は 2 つの平行軸に関する慣性モーメントの間の關係に似た式である。

又 (26) 式に對應する式を出して見ると

$$\begin{aligned} Z_0 &= r_1 \int y^2 \frac{dF}{r} = r_1 \int \frac{(r_0 - r)^2}{r} b dr \\ &= r_1 \left(r_0^2 \sum b l_n \frac{w_1}{w_2} + F r_0 - 2 F r_0 \right) \dots \dots \dots (36a) \end{aligned}$$

となる。こゝに b は部分矩形面の幅, w₁ 及 w₂ は部分面の上縁及下縁に到る曲率中心よりの距離を表す。

g) 中立軸の位置

中立軸の位置は一般に計算的に σ の式を零と置くことにより求められる。然し又, 例へば M のみはたらく場合 (31) 式において y=r₁+x-r と置き x につき解けば簡単に求まる。即ち

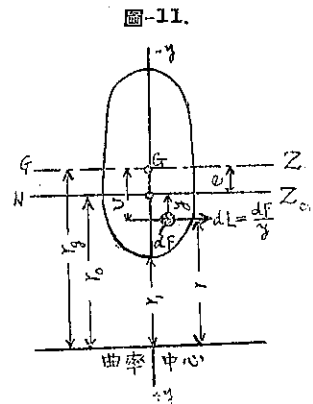
$$\int (r_1 + x - r) dL = 0 \quad \text{これより}$$

$$r_1 \int dL + x \int dL - \int dF = 0$$

故に

$$x = \frac{F}{\int \frac{dF}{r}} - r_1 \quad \text{又は} \quad r_0 = x + r_1 = \frac{F}{\int \frac{dF}{r}} \dots \dots \dots (37)$$

或は



$$\frac{dF}{r} = dL \quad \text{と置けば}$$

$$e = \frac{F}{\sum \Delta L} - r_1 \quad \text{又は} \quad r_0 = \frac{F}{\sum \Delta L} = \frac{F}{L} \quad \dots (38)$$

断面が矩形断面の集合より成るときは

$$L = \int \frac{dF}{r} = \sum b l_n \frac{w_1}{w_2} \quad \dots (38a)$$

b) 中立軸及断面常數 Z 及 Z_0 に對する著者の圖解法

圖解的に M がはたらく場合の中立軸の位置は (31) 式より dL を力と見做したる場合, dL の合力の位置として極距 H を有する力多邊形に對應して畫ける索多邊形の最外二邊の交點により決定する事ができ, 断面常數 Z 及 Z_0 は同じ力 dL の二次モーメントとして Culmann 又は Mohr 氏の二次モーメントの作圖を應用すれば容易に求めらる。而して (36) 式に示す兩常數間の關係は圖上にては尙更明瞭に表はる (後述實例にて述べよう)。

i) 中立軸と重心軸との距離 e

$$F \cdot e = - \int y dF \quad \text{より}$$

$$e = - \frac{\int y dF}{F} \quad \dots (39)$$

j) 曲梁における半徑方向の應力度 σ_r に對する著者の圖解法

通常近似解では横断面に垂直なる應力度 σ 即ち σ_t のみを考へてゐるが, 著者は半徑方向の應力度 σ_r の圖解を考へて見た, そのため次の如く圖解のための公式を出した。

彈性論において極座標を用ひた場合の釣合條件式は¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{2\tau}{r} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

曲梁に單純モーメント M が作用する場合剪断應力度 $\tau = 0$, 故にこの第一式より

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad \text{これより} \quad r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_t = 0$$

今簡単のため矩形断面を考へ幅 $b=1$ として横断面につき積分すれば

$$\left| r \sigma_r \right|_r - \int_r^{r_2} \sigma_r dr + \int_r^{r_2} \sigma_r dr = \int_r^{r_2} \sigma_t dr$$

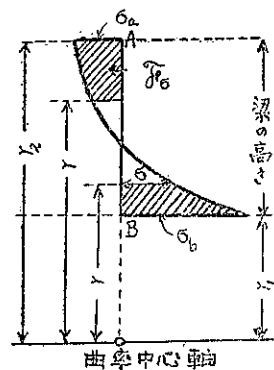
こゝにおいて σ_t を簡単に σ にて表し, σ_r につき解けば

$$\sigma_r = - \frac{\int_r^{r_2} \sigma dr}{r} \quad \text{同様にして又,} \quad \sigma_r = \frac{\int_{r_1}^r \sigma dr}{r} \quad \dots (40)$$

この式は直接に微小成分の力の釣合を考へても導出さる。然るに $\int \sigma dr$ は垂直應力度 σ 即ち σ_t の分布圖の考へる點より縁に到る面積 \mathcal{F}_r (圖-12 において影を附して示せる面) を表す故に σ の分布圖を知れば其の面積を圖上より出せば σ_r は容易に次式により求めらる。

$$\sigma_r = \mp \frac{\mathcal{F}_r}{r} \quad \dots (41)$$

圖-12.



これ即ち所求の圖解のための公式である。これは矩形断面として考へたが一般の場合は幅を考への中に入れたらよい。

曲梁が偏心力を受くる時は σ_r の精密なる値は簡単に求め得ざるも近似的に (41) 式を用ふることができる、但し σ_σ としてはやはり M のみによる σ につき考慮すべきである。この點著者の (35) 式による圖解は便である。然らば剪應力度 τ は (6) 式により求められる。即ち

$$\tau = -\frac{\sigma_r}{t g \alpha} \dots\dots\dots (42)$$

然しこれは垂直力 N の影響大なる時は應用できない。

5. 計算例 1

精密なる解と著者の圖解法との比較

先づ圖-5 において $r_1=0.24$ m, $r_2=0.64$ m, $r_g = \frac{1}{2}(r_1+r_2)=0.44$ m, $M=-1$ mt/m なる場合の應力度につき研究せん。圖-13 はこの問題に對する著者の圖解法を示す。これにより σ_c 及 σ_r を求めしに彈性論による精密値と極めてよく一致するを見る。圖-14 は彈性論による (2), (3) 及 (4) により計算せる結果を示す²²⁾。

圖-13 においては矩形断面を十等分し (25) 式に従ひ各断面につき $4L$ を求めこれを力と見做し極距 $H=0.5$ を以て索多邊形を畫いた。断面は小に分つ程精密なるもこの程度にて充分精密である。而してこの場合數少く分てば Z の値は幾分小となる。

a) Müller-Breslau 氏の公式による場合

索多邊形において面積 AFBCDEA は $A_g=0.0138$ m² となる故に断面常數 $Z=2r_g A_g H=2 \cdot 0.44 \cdot 0.0138 \cdot 0.5=0.00607$, 故に公式 (9) より内縁點 B における應力度 σ_b は $M=-1$ mt/m, $v=0.20$ m なる故に

$$\sigma_b = M \left(\frac{r_g v}{Z(r_g - v)} - \frac{1}{r_g l} \right) = - \left(\frac{0.44 \cdot 0.20}{0.00607 \cdot 0.24} - \frac{1}{0.44 \cdot 0.40} \right) = -54.8 \text{ t/m}^2$$

(精密計算によれば -54.54 t/m²)

b) Timoshenko 氏の公式による場合

中立軸 nn と重心軸 gg との距離を測るに $e=0.032$ m なる故に (34) 式より, $M=-1$ mt/m, $x=0.168$ m, $r_1=0.24$ m を以て

$$\sigma_b = \frac{Mx}{F r_1 e} = -\frac{0.168}{0.40 \cdot 0.24 \cdot 0.032} = -\frac{0.168}{0.003072} = -54.7 \text{ t/m}^2$$

(不對稱断面なる時は e を求めるため重心位置を圖解する要がある)。

c) 著者の公式による場合

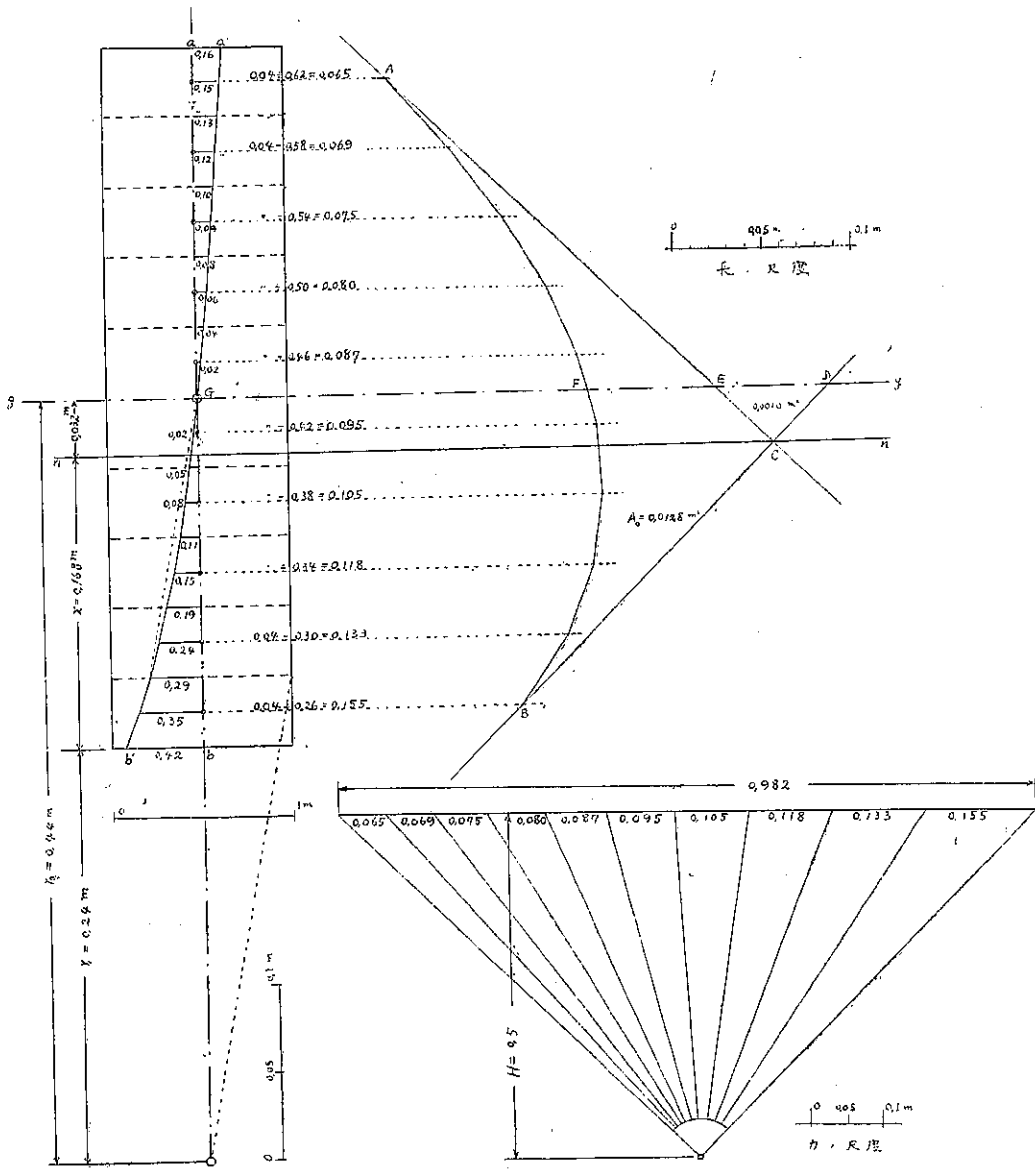
索多邊形において面積 AFBCDEA は $A_0=0.0128$ m² となる故公式 (33) より, 断面常數 $Z_0=r_1 \cdot 2 A_0 H=0.24 \cdot 2 \cdot 0.0128 \cdot 0.5=0.003072$ を以て

$$\sigma_b = \frac{Mx}{Z_0} = -\frac{0.168}{0.003072} = -54.7 \text{ t/m}^2$$

即ち (9) 式よりも甚だ簡にして然も充分精密なる値を得。而して不對稱断面の場合でも重心軸を知るを要せず。

著者の圖解は b) に示せる如く Timoshenko の公式に對しても極めて便利に應用せられ、著者の公式による場合と全く相等しい結果が得らる。

圖-13. 曲梁應力度の研究



d) Tolle 氏の方法の應用により断面常數 Z を求むること

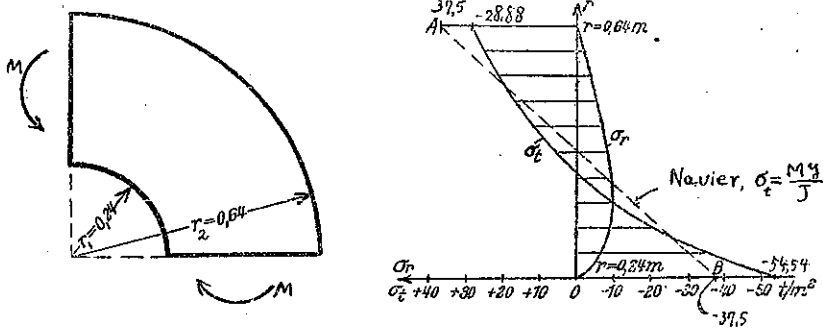
Bach 氏の公式中の断面常數 K の圖解法として Tolle 氏の方法²³⁾ が内外の著者に紹介せられてゐる。圖解公式を示せば

$$K = \frac{2(f_2 - f_1)}{f} \dots \dots \dots (43)$$

ここに f は横断面, f_1 及 f_2 は圖-13 において夫々誘導面 $aa'G$ 及 $bb'G$ の面積を表す (圖-13 にては便宜上,

圖-14. 精密公式 (2) による σ_z 及 σ_r

公式 (2) において $r_1=0.24$ m, $r_2=0.64$ m, $\rho_1=2.6667$, $T_1=0.5749$, $M=1$ mt/m



縦と横との尺度を變へてある)。圖-13 において Simpson 氏の公式により面積を求めしに $f_2=0.03373$ m², $f_1=0.0172$ m², $f=0.40$ m² となる故に

$$\kappa = \frac{2(0.03373 - 0.0172)}{0.40} = 0.0777$$

故に断面常數 Z は (25a) 式により

$$Z = \kappa r_2^2 F = 0.0777 \cdot 0.44^2 \cdot 0.40 = 0.0060 \text{ m}^4 \dots \dots \dots (44)$$

e) 断面常數 Z と Z_0 の圖上に於ける關係

索多邊形において Z_0 に對應する面積 A_0 = 面 AFBCEA は Z に對應する面積 A_z = AFBCEA より三角形 CDE の面積を減じたものに等し。即ち Z と Z_0 との間には圖上にて三角形 CDE だけの差がある。

f) 中立軸の位置 x 及断面常數 Z の計算

(37) 式に $F=bh$ を代入して

$$x = \frac{F}{\int \frac{dF}{r}} - r_1 = \frac{bh}{b \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}} - r_1 = \frac{h}{\ln\left(1 + \frac{h}{r_1}\right)} - r_1 \dots \dots \dots (45)$$

故に

$$x = \frac{0.40}{\ln\left(1 + \frac{0.40}{0.24}\right)} - 0.24 = 0.1678 \text{ m (圖解にては } 0.168 \text{ m)}$$

x は又一般に $\sigma=0$ より求められる。但し精密式 (3) によれば x が陽函數として表されてゐないから近似値を代入し漸近的に求むればよい。

矩形断面においては²⁴⁾

$$\begin{aligned} \kappa &= -1 + \frac{r_2}{h} \ln \frac{r_2 + \frac{h}{2}}{r_2 - \frac{h}{2}} = -1 + \frac{r_2}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} \dots \dots \dots (46) \\ &= -1 + \frac{44}{40} \ln \frac{64}{24} = 0.0789 \end{aligned}$$

故に

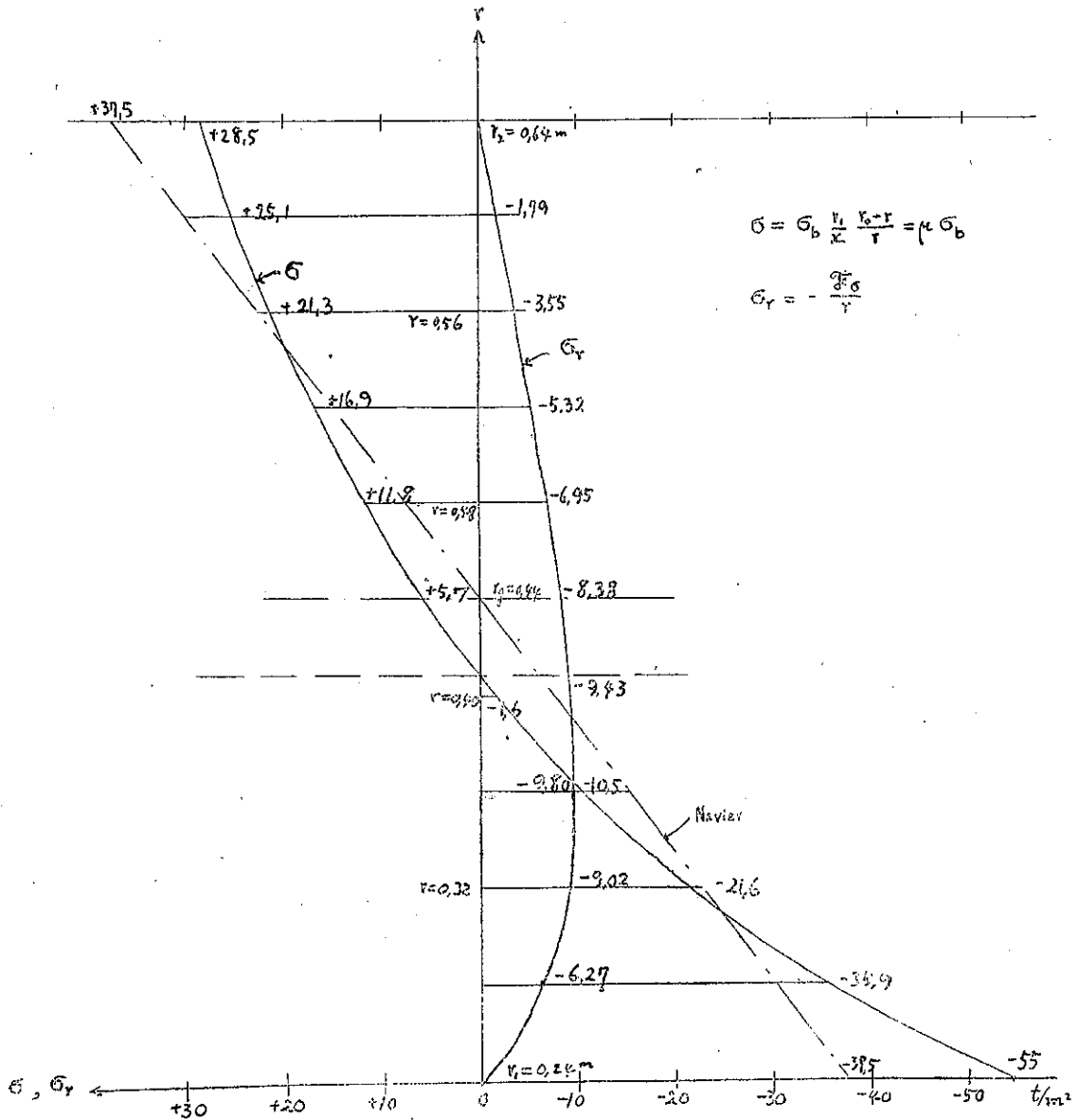
$$Z = \kappa r_0^2 F = 0.0789 \cdot 0.44^2 \cdot 0.40 = 0.0061 \text{ m}^3$$

或は (26) 式より

$$Z = r_0^3 b l_n \frac{T_2}{r_1} - F r_0^2 \dots \dots \dots (47)$$

これに數値を代入して

圖-15. 曲梁應力度分布



$$\sigma = \sigma_b \frac{1}{\kappa} \frac{r_0 - r}{r} = \mu \sigma_b$$

$$\sigma_r = -\frac{\sigma_b}{r}$$

$$Z = 0.44^3 \cdot 1 \cdot \frac{64}{24} - 0.40 \cdot 0.44^2 = 0.0061 \text{ m}^4$$

g) 断面における σ_t 即ち σ と σ_r との分布

$\sigma_b = -55 \text{ t/m}^2$ として (20) 式により σ を計算すれば

$$\sigma = \sigma_b \frac{y}{x} \frac{r_1}{r} = \sigma_b \frac{r_1 r_0 - r}{x r} = \mu \sigma_b; \quad \mu = \frac{r_1 r_0 - r}{x r} = \frac{0.24}{0.168} \frac{0.408 - r}{r} \dots\dots(48)$$

計算の結果を表示すれば表-1 の如くなる (比較のため弾性論の公式により計算した精密値を併記す)。

表-1.

r	0.64	0.60	0.56	0.52	0.48	0.44	0.40	0.36	0.32	0.28	0.24 m
σ	+28.5	+25.1	+21.3	+16.9	+11.8	+ 5.7	- 1.6	-10.5	-21.6	-35.9	-55.0 t/m ²
精密値 σ	+28.87	+25.18	+21.10	+16.54	+11.33	+ 5.32	- 1.76	-10.34	-21.07	-35.11	-54.54 t/m ²

これを圖示すれば圖-15 の如くなる。この σ 線をもととし (41) 式により σ_r を求むれば表-2 の如くなる。

表-2.

r	0.64	0.60	0.56	0.52	0.48	0.44	0.40	0.36	0.32	0.28	0.24 m
$\int \sigma_r = \int_r^{r_2} \sigma dr$	0	1.072	2.000	2.764	3.338	3.688	3.770	3.528	2.886	1.756	0.0
$\sigma_r = -\frac{\int \sigma}{r}$	0	-1.79	-3.55	-5.32	-6.95	-8.38	-9.43	-9.80	-9.02	-6.27	0 t/m ²
精密値 σ_r	0	-1.80	-3.59	-5.32	-6.92	-8.32	-9.34	-9.72	-9.00	-6.32	0 t/m ²

$\int \sigma/r$ の計算は又、圖解的に圖-16 により行ふことを得。

今の場合 σ_r は σ に比し省略し得る程に小である。然し I 形断面の如き場合必ずしも省略するを得ない。

σ_r の最大値は中立軸上になく稍その下方に存す²⁵⁾。

b) 偏心力作用する場合

例として圖-6 において $r_1 = 0.24 \text{ m}$, $r_2 = 0.64 \text{ m}$, $\alpha = 90^\circ$, $Q_a = 1 \text{ t}$ なる場合を研究しよう。著者の公式によるため任意断面に対する外力を断面重心にはたらく力 N と曲げモーメント M とに分てば M のみに對する中立軸の位置は断面寸法が圖-13 の場合に等しき故相等しく $x = 0.168 \text{ m}$ となる。故に σ の値は (35) 及 (48) 式より

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mx}{Z_0} \frac{r_1 r_0 - r}{x r} \dots\dots(49)$$

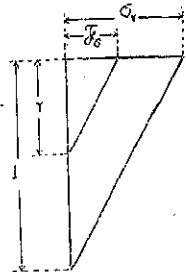
こゝに $F = 0.40 \text{ m}^2$

$$\sigma_N = \frac{N}{F} = \frac{Q_a \sin \alpha}{F} = -\frac{1}{0.4} \sin \alpha = -2.5 \sin \alpha \dots\dots(50)$$

$$M = -1 \cdot r_0 \sin \alpha = -0.44 \sin \alpha$$

$$\sigma_M = \frac{Mx}{Z_0} \mu = -0.44 \sin \alpha \cdot 54.7 \mu = -24.068 \mu \sin \alpha \dots\dots(51)$$

圖-16.



ここに
$$\mu = \frac{r_1 r_0 - r^2}{\alpha r} = \frac{10 \cdot 0.408 - r}{7 r}$$

故に
$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = (-2.5 - 24.068 \mu) \sin \alpha = K_1 \sin \alpha \dots \dots \dots (52)$$

となる。
 (52) 式により σ を算出すれば次の如くなる (比較の爲精密値を併記す)。

圖-17. 曲梁應力度分布

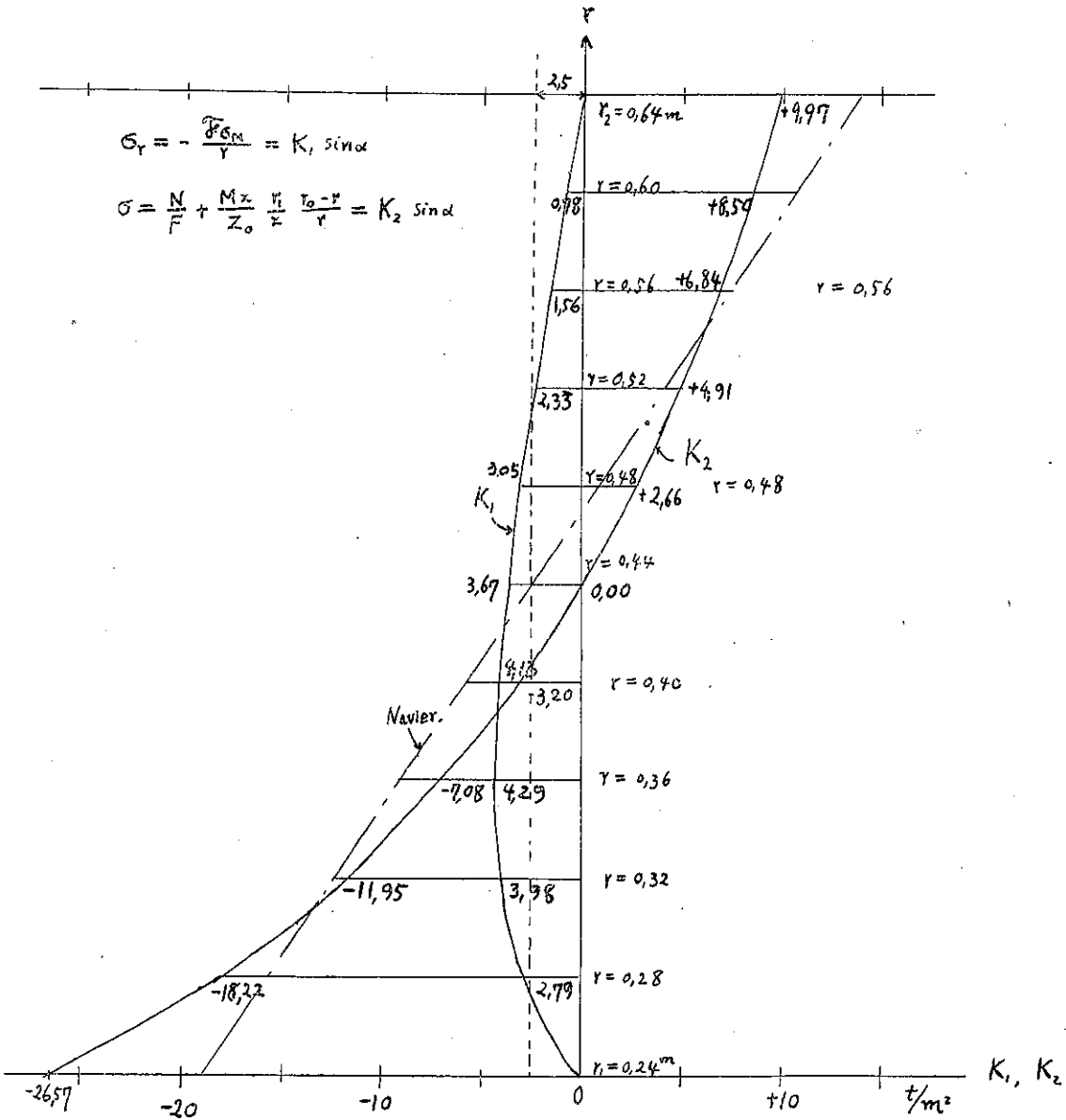


表-3. $\sigma = K_2 \cdot \sin \alpha$

γ	0.64	0.60	0.56	0.52	0.48	0.44	0.40	0.36	0.32	0.28	0.24 m
μ	-0.5180	-0.4570	-0.3880	-0.3080	-0.2143	-0.1040	+0.0290	+0.1905	+0.3925	+ 0.653	+1
σ_M	+12.47	+11.0	+9.34	+7.41	+5.16	+2.50	-0.70	-4.58	- 9.45	-15.72	-24.068sin α
σ_N	- 2.5	- 2.5	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5	- 2.5	- 2.5	-2.5 sin α
K_2	+ 9.97	+ 8.50	+6.84	+4.91	+2.66	0.00	-3.20	-7.08	-11.95	-18.22	-26.57
精密値 K_2	+10.35	+ 8.59	+6.70	+4.65	+2.38	-0.17	-3.17	-6.81	-11.48	-17.91	-27.61

直梁に対する公式にて外縁点の σ を計算すれば

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = \left(-2.5 \pm \frac{0.44 \cdot 6}{0.16} \right) \sin \alpha = \begin{cases} -19 \sin \alpha \\ +14 \sin \alpha \end{cases}$$

次に σ_r を近似式 $\sigma_r = -\frac{\delta \sigma_M}{r}$ により求むれば 表-4 の如くなる。

表-4. $\sigma_r = K_1 \cdot \sin \alpha$

γ	0.64	0.60	0.56	0.52	0.48	0.44	0.40	0.36	0.32	0.28	0.24 m
$\delta \sigma_M$	0	0.469	0.876	1.211	1.463	1.616	1.652	1.546	1.273	0.780	0.0 sin α
K_1	0	-0.78	-1.56	-2.33	-3.05	-3.67	-4.13	-4.29	-3.98	-2.79	0.0
精密値 K_1	0	-0.65	-1.32	-1.98	-2.64	-3.25	-3.76	-4.07	-3.96	-2.95	0

圖-17 は以上の結果を圖示せるものである。剪應力度 τ は σ_r と分布法則相等し。圖-18²⁶⁾ は (6) 式により求めたる應力度分布圖 (係数を示す) にして、圖-17 は單純曲げの場合程ではないが σ は充分精密値に一致するを見る。但し σ_r は最大 11% の差がある。(尙 Beyer 氏著者にはこの例につき主要應力度線及等應力線を掲げてゐる)。

σ_r 又は τ の最大値が中立軸より偏してゐるのは直梁の場合と異なる点である。

この例の如く断面形が簡單なる矩形断面であれば計算的にも面倒なく解答できるのであるが、圖解法の特長は計算にては極めて勞多き複雑なる断面例へば鉄梁等に對し發揮せらるゝものである。次にも少し複雑な I 形断面についての例を示さう。

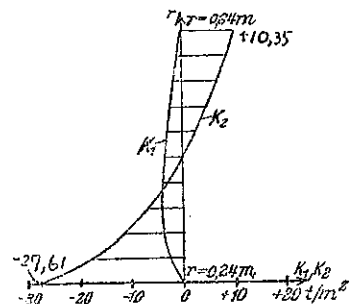
6. 計算例 2

圖-19 に示す如く曲率半徑 $r_0 = 50$ cm を有する I 形鋼 IP 40 なる

曲梁が曲げモーメント $M = -3080$ cm \cdot を受くる場合の垂直應力度 σ_v を求む²⁷⁾、解は著者の圖解法を用ふ。

a) Müller-Breslau 氏の公式による場合

圖-18. 精密公式 (6), (7) による σ_r 及 σ_v の係数 K_1 及 K_2



公式 (6), (7) において $r_1 = 0.24$ m, $r_2 = 0.64$ m, $\rho_1 = 2.6667$, $T_2 = 1.18048$, $Q_0 = 1$ t

Culmann 氏の作圖に従へば $Z = r_0 H_1 H_2 \theta = 50 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 22.9 = 68\,700 \text{ cm}^4$, 故に

$$\sigma_b = \left(\frac{50 \cdot 20}{68\,700 \cdot 30} - \frac{1}{50 \cdot 208.5} \right) M = 0.00039 M$$

この作圖で注意すべきは兩突縁の面積を特に小さく分解せざれば不精密となり易い。此點は Mohr 氏の作圖の方が優つてゐる。Mohr 氏の作圖に従へば索多邊形において面積 AFBCDEA を A_g とすれば $A_g = 233.85 \text{ cm}^2$ となる故に $Z = 2r_0 A_g \bar{H}_1 = 2 \cdot 50 \cdot 233.85 \cdot 3 = 70\,155 \text{ cm}^4$, 故に

$$\sigma_b = \left(\frac{50 \cdot 20}{70\,155 \cdot 30} - \frac{1}{50 \cdot 208.5} \right) M = 0.00038 M$$

b) Timoshenko 氏の公式による場合

$Fr_1 e = 208.5 \cdot 30 \cdot 5.8 = 362\,790$, $x = 14.2$, 故に $M = -3\,050 \text{ cm}$ に對し

$$\sigma_b = \frac{Mx}{Fr_1 e} = \frac{14.2}{362\,790} M = 0.00039 M = -1\,182 \text{ kg/cm}^2$$

c) 著者の公式による場合

$Z_0 = r_1 \cdot 2A_0 \cdot H_1 = 30 \cdot 2 \cdot 207.17 \cdot 3 = 37\,290 \text{ cm}^4$, 故に

$$\sigma_b = \frac{Mx}{Z_0} = \frac{14.2}{37\,290} M = 0.00038 M = -1\,151 \text{ kg/cm}^2$$

ブライヒ氏著「鐵骨構造」において本例題につき計算的に出したる値は突縁と腹との連結部における丸味の部分を省略し $Z = r_0^3 \sum b l_n \frac{w_1}{w_2} - Fr_0^2 = 68\,980 \text{ cm}^4$, $\sigma_b = -1\,176 \text{ kg/cm}^2$ となつてゐる。圖-19 は種々の方法を一所に集めて畫ける故複雑に見ゆ。この例では突縁と腹との連結部の丸味の影響をも考へた。

d) 突縁の突出部の撓みを考慮する場合

突縁の突出部の撓みの影響は突縁幅を割引して考へることが出来る。これについては Hans Bleich 氏の研究²⁶⁾があるからその大要を述べて、それをこの場合に用ひる事とす。同氏の研究によれば断面 I 字形の曲梁において突縁の突出部は半徑方向力のため彎曲し、軸方向應力度は不均等應力分布をなす。今腹板上方に位置する突縁内の軸方向應力度の平均値を σ_m とし、幅 b の突出脚に軸方向應力度 σ が不均等に分布する代りに稍狭い幅 b' に σ_m が到る處均等に分布するものと見做せば

$$b' = \frac{1}{\sigma_m} \int_0^b \sigma dx$$

而して其の換算幅 b' と b との比 ν は次式にて與へらる (圖-20)。

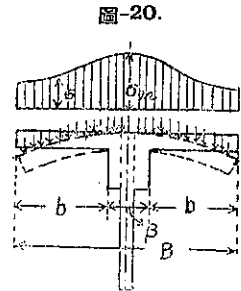
$$\nu = \frac{b'}{b} = \frac{1}{\alpha b} \frac{\sin 2\alpha b + \sinh 2\alpha b}{2 + \cos 2\alpha b + \cosh \alpha b} \dots\dots\dots (53)$$

こゝに $\alpha = \frac{3}{r_0 d^2}$, r は突縁中心線の曲率半徑, d は突縁の厚さを表す。

換算幅 b' を知れば突縁の應力度 σ の最大値 σ_m を知るを得。即ち

$$B' = 2b' + \beta \dots\dots\dots (54)$$

なる突縁幅を有する曲梁と見做して前述の方法により縦應力度 $\bar{\sigma}_m^0$ 及 $\bar{\sigma}_m^x$ を計算するのである。こゝに横線は σ_m が突縁の厚さの中央に對するものでなく最外縁維に關する値なる事を意味するものである。こゝで注意すべきは、かくして決定したる $\bar{\sigma}_m$ は實際は腹の上方だけしか表はれない事である。突縁の突出脚の彎曲のため突出脚の固着點における曲應力度 σ' は次式により與へらる。



$$\sigma' = \sqrt{3} \frac{\cosh 2\alpha b - \cos 2\alpha b}{2 + \cos 2\alpha b + \cosh 2\alpha b} \sigma_m \dots\dots\dots(55)$$

σ' と σ_m とは實地の場合換算應力度 σ_{red} に合成し許容應力度 σ_{zul} と比較し, $\sigma_{red} \leq \sigma_{zul}$ ならしむ。

慣性モーメント, 断面常數, 横断面の計算に當つては鉋孔控除を考ふ。その場合突縁の幅を考へた時と同様減少率 $\nu = b'/b$ を乘ずるものとす。

換算應力度は次式にて計算さる²⁰⁾。

$$\sigma_{red} = \sigma_I - 0.25 \sigma_{II} \dots\dots\dots(56)$$

この式に數値を代入する時には引張應力度は正とし壓縮應力度は負とす。 σ_I と σ_{II} とが同符號であれば σ_{red} は 2 つの應力度の中其の大きい方より小さい。異符號であれば σ_{red} は 2 つの應力度の何れよりも大きい。

突縁と腹縁とを連結する鉋並に突縁鉋と山形突出脚とを連結する鉋の計算には, 普通の場合と異り半徑方向の力の影響を考慮しなければならぬ²¹⁾。

表-5 は曲梁の換算幅 b' と突縁突出幅 b との比及曲應力度 σ' と軸方向應力度 σ_m との比を表す²¹⁾。

表-5.

$\frac{b^2}{rd}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\nu = \frac{b'}{b}$	1.000	0.994	0.977	0.950	0.917	0.878	0.838	0.800	0.762	0.726
$\mu = \frac{\sigma'}{\sigma_m}$	0	0.297	0.580	0.836	1.056	1.238	1.382	1.495	1.577	1.636
$\frac{b^2}{rd}$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2	3	4	5
$\nu = \frac{b'}{b}$	0.693	0.663	0.636	0.611	0.589	0.569	0.495	0.414	0.367	0.334
$\mu = \frac{\sigma'}{\sigma_m}$	1.677	1.703	1.721	1.728	1.732	1.732	1.707	1.671	1.680	1.700

突出脚の固定點における曲應力度は軸方向力が突縁に一樣に分布すると假定した時よりも小さくなり, 而して曲率半徑が小さい場合には應力分布が均等分布と著しく異つてくるから多少面倒ではあるが實際の應力分布状態を考へて計算することが必要となる。

圖-19, 計算例二につきこの Bleich 氏の研究を應用して突縁突出脚の撓みを考慮する場合の, 上下兩突縁における最大應力度 (換算應力度) を出せば次の如くなる。

$$M = -3\,030 \text{ cm}, \quad d = 2.6 \text{ cm}, \quad r \text{ は上突縁にて } 68.7 \text{ cm}, \quad \text{下突縁にて } 31.3 \text{ cm}, \quad b = 12.2 \text{ cm}$$

故に

$$\left. \begin{array}{l} \text{上突縁にて } \frac{b^2}{rd} = 0.838 \text{ 故に表-5 より } \nu = 0.750, \mu = 1.596 \\ \text{下突縁にて } \frac{b^2}{rd} = 1.829 \text{ 故に表-5 より } \nu = 0.520, \mu = 1.716 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(57)$$

故に突縁の換算幅 B' 及換算面積 F' は

$$\text{上突縁にて } B'_0 = 2 \cdot 0.750 \cdot 14.3 + 1.4 = 22.85 \text{ cm}, \quad F'_0 = 59.41 \text{ cm}^2$$

$$\text{下突縁にて } B'_n = 2 \cdot 0.520 \cdot 14.3 + 1.4 = 16.17 \text{ cm}, \quad F'_n = 42.04 \text{ cm}^2$$

かくして突縁突出脚の撓みを考慮するには不對稱なる換算突縁面を有する梁断面につき $\bar{\sigma}_m$ を求むればよい。

先づ換算突縁面 (圖-19 において點線にて示す) を有する梁断面につき断面常數 Z_0 を求むるため前と同様, 力多邊形及索多邊形を畫く (圖において上の場合とたゞ突縁部分のみ異なる, 點線を以て示す處はそれである)。而して換算断面に對する中立線 $n'n'$ 及索多邊形 (面 $A'FB'C'A' = 147 \text{ cm}^2$) を得。故に下突縁における應力度 $\bar{\sigma}_m$ を著者の公式にて求むれば

$$\bar{\sigma}_m = \frac{Mx}{Z_0} = \frac{16.5 M}{r_1 \cdot 2A_0 H_1} = \frac{16.5 M}{30 \cdot 2 \cdot 147 \cdot 3} = \frac{16.5}{26400} M = 0.000623 M$$

又, Timoshenko の公式を用ふるため, 不對稱断面なる故重心位置 $g'g'$ を求むれば $e = 5.7 \text{ cm}$ を得る故に

$$\bar{\sigma}_m = \frac{Mx}{Fr_1 e} = \frac{16.5 M}{152.95 \cdot 30 \cdot 5.7} = \frac{16.5}{26150} M = 0.00063 M = -1.90 \text{ t/cm}^2$$

故に上突縁における應力度 $\bar{\sigma}_m$ は

$$\bar{\sigma}_m = \frac{Mx}{Z_0} \frac{y}{x} \frac{r_1}{r} = 1.90 \frac{23.530}{16.570} = +1.16 \text{ t/cm}^2$$

故に上突縁及下突縁における σ_m は

$$\text{下突縁にて } \sigma_m \doteq -1.90 \frac{18.7}{20} \doteq -1.8 \text{ t/cm}^2$$

$$\text{上突縁にて } \sigma_m \doteq 1.16 \frac{18.7}{20} \doteq +1.1 \text{ t/cm}^2$$

故に突出脚の固着點の曲應力度 $\sigma' = \mu \sigma_m$ は (57) 式の係數値を用ふれば

$$\text{上突縁にて } \sigma'_0 = +1.596 \cdot 1.1 = +1.76 \text{ t/cm}^2$$

$$\text{下突縁にて } \sigma'_{0'} = +1.716 \cdot 1.8 = +3.09 \text{ t/cm}^2$$

故に換算應力度は

$$\text{上突縁にて } \sigma_{red} = 1.76 - 0.25 \cdot 1.16 = 1.47 \text{ t/cm}^2$$

$$\text{下突縁にて } \sigma_{red} = 3.09 + 0.25 \cdot 1.90 = 3.57 \text{ t/cm}^2$$

これは許容應力度 σ_{zul} より大なるを以て, 上下突縁縁間に補剛材を密着せしめ置き突縁縁の彎曲を防止せねばならぬ。この計算は換算幅に關し Bleich 氏の理論的研究を應用せるものにて實驗により確かむべきものである。

7. 計算例 3

曲率半徑 40 cm, 横断面 4L 90-90-11, 腹板 300-10 なる曲梁 (圖-21) が, 任意の曲げモーメント M を受くる場合の内縁における最大垂直應力度 σ_b を求む。

a) Müller-Breslau 氏の公式による場合

著者の圖解³²⁾によれば Culmann 氏の方法を用ひたる時 $Z = 15840 \text{ cm}^4$, Mohr 氏の方法を應用したる時 $Z = 16190 \text{ cm}^4$, 今 $Z = 15840 \text{ cm}^4$ として σ_b を出せば $\sigma_b = 0.001255 M$ となる。

b) 著者の公式による場合 (圖-22)

Culmann 氏の作圖において索多邊形の最外邊の交點は中立軸の位置を與ふ。然らば内縁點より中立軸に到る距離は $x = 11.50 \text{ cm}$ となり中立軸に關する断面常數 $Z_0 = 2r_1 A_0 H_1 = 2 \cdot 25 \cdot 92 \cdot 2 = 9200 \text{ cm}^4$ となる。故に

$$\sigma_b = \frac{Mx}{Z_0} = \frac{11.50}{9200} M = 0.00125 M$$

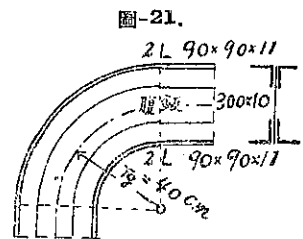
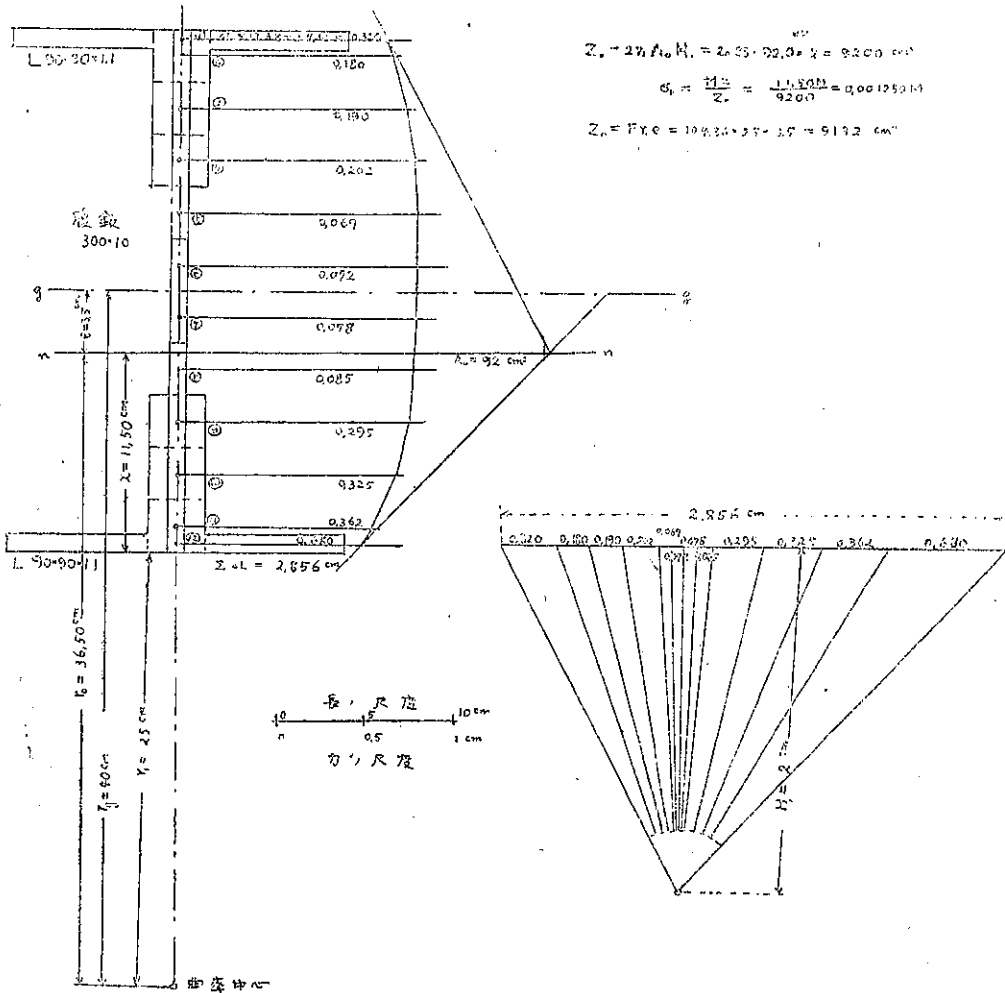


圖-21.

となる。 M の外に垂直力 N が作用する時は $\frac{N}{F} = \frac{N}{104.36}$ を追加すればよい。 Z_0 は又 $F \gamma_1 c = 104.36 \cdot 95 \cdot 8.5 = 9192 \text{ cm}^4$ として求められる。精密にいへば張力側の鉋孔及突縁と腹との連結部の隅角の丸味も考慮しなければならぬ。

圖-22. 断面常數 Z_0 の圖解



8. 突縁と腹とを連結する鉋距に関する著者の公式

曲梁の突縁と腹との連結鉋は直梁の場合と異なり半徑方向の力を受く、即ち1つの連結鉋が受くる全荷重を N とすれば

$$N = \sqrt{N_r^2 + N_t^2}; \quad \frac{N}{\delta d} \leq \sigma_{許容}$$

ならしめねばならぬ。こゝに N_r は半徑方向に鉋にはたらく力、 N_t は剪力の作用により切線方向にはたらく力を表す。 d は鉋徑、 δ は腹鉋厚、 $\sigma_{許容}$ は鉋の許容支壓力を表す。 N_r 及 N_t の値を次の如く近似的に求めて

見た。

今銀距を s , それと同じ中心角 α に對する梁軸の長さを s_0 , 半徑方向の應力度を σ_r , 突縁を矩形斷面の集合と見做し, 突縁部分面の幅を b , 厚さを t , 部分面の 上縁及下縁點の曲率中心よりの距離を夫々 w_1, w_2 , 突縁と腹との連結點の曲率中心よりの距離を r , 突縁の任意點の曲率中心よりの距離を r' とし, (35) 及 (40) 式を應用すれば

$$N_r = \sigma_r \cdot \delta \cdot s$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\delta \cdot r} \int_{r_1}^r \sigma_m dF = \frac{1}{\delta \cdot r} \int_{r_1}^r \frac{My}{Z_0} \frac{r_1}{r'} dF = \frac{M}{Z_0 \delta} \frac{1}{r} \int_{r_1}^r \frac{r_1}{r'} dF = \frac{M S'}{\delta Z_0 r}$$

$$S' = \int_{r_1}^r y \frac{r_1}{r'} dF = \sum b r_1 \int_{r_1}^r \frac{r_0 - r'}{r'} dr = r_1 \sum b \left[r_0 \ln \frac{w_1}{w_2} - t \right] \quad \dots\dots\dots (58)$$

S' は換算斷面 $\frac{r_1}{r'} dF$ の中立軸に關する一次率を表す。この σ_r の式が前掲の Grünig 氏の σ_y に對應するものである。 r_0 は曲率中心より中立軸に到る距離であつて (37) 式より

$$r_0 = \frac{F}{\int \frac{dF}{r}} = \frac{F}{\sum b l n \frac{w_1}{w_2}}$$

こゝに \sum は全斷面についての和を表す。

次に剪應力度 τ では曲率半徑が小ならざる時は近似的に直梁の場合の公式を用ひて差支ないが, 曲梁に對しては Grashof 氏の公式がある。即ち

$$\tau = \frac{QS_y}{nF(r \pm y)^2 \cos \varphi} \quad (\text{記號の説明は省略す})^{33)}$$

著者は (35) 式を用ひ内突縁と腹との連結點においての腹における剪應力度 τ の近似式を出して見た。 Q を半徑方向の剪力とすれば

$$N_s = \tau \cdot \delta \cdot s = \int_{r_1}^r d\sigma_m dF = \int_{r_1}^r \frac{dM}{Z_0} y \frac{r_1}{r'} dF = \frac{QS_y}{Z_0} \int_{r_1}^r y \frac{r_1}{r'} dF = \frac{QS'}{Z_0} s_0$$

然るに $s_0 = r_0 \cdot \alpha$, $s = r \cdot \alpha$ 故に $s_0 = s \frac{r_0}{r}$ 従つて

$$N_s = \frac{QS'}{Z_0} \frac{r_0}{r} s \quad \text{故に}$$

$$\tau = \frac{QS'}{\delta Z_0 r} \quad \text{こゝに} \quad S' = r_1 \sum b \left[r_0 \ln \frac{w_1}{w_2} - t \right] \quad \dots\dots\dots (59)$$

(59) 式の τ は $r_0 = \infty$ の時は直梁の場合の式 $\tau = \frac{QS}{\delta J}$ に歸着す。

外突縁に對しても同様の式を得。

突縁鉄同土を連結する鉄の計算に對してはブライヒ氏が公式を出してある³⁴⁾。

9. 鐵筋コンクリート曲梁への應用

鐵筋コンクリート曲梁に對しては F. Emperger 氏, 福田博士の著書³⁵⁾に種々の荷重の場合についての近似公式が掲げられてゐる。この場合に對しても上述の著者の考へ方, 公式及圖解法は便利に應用せらる。但し鐵筋斷面に對しては n 倍 (n は弾性比) しなければならない。

例へば先づ曲げモーメント M を受け内側に壓應力度を生ずる場合を考へ, 公式 (33) 式を應用し鐵筋コンクリ

ト断面の曲梁に対する公式を出せしに次の如くなつた (圖-22)。

$$\begin{aligned} Z_0 &= r_1 \int y^2 \frac{dF}{r} \\ &= r_1 \left[\frac{(x-h')^2 n F_e'}{r_1+h'} + \frac{(h-x)^2 n F_e}{r_1+h} + \int_{r_1}^{r_1+x} (r_1+x-r)^2 \frac{b dr}{r} \right] \\ &= r_1 n \left[\frac{F_e'(x-h')^2}{r_1+h'} + \frac{F_e(h-x)^2}{r_1+h} \right] + b \left[(r_1+x)^2 l_n \left(1 + \frac{x}{r_1} \right) - \frac{x}{2} (3x+2r_1) \right] \end{aligned}$$

故に

$$\sigma_b = \frac{M \frac{x}{r_1}}{b \left[(r_1+x)^2 l_n \left(1 + \frac{x}{r_1} \right) - \frac{x}{2} (3x+2r_1) \right] + n \left[\frac{F_e'(x-h')^2}{r_e'} + \frac{F_e(h-x)^2}{r_e} \right]} \dots\dots\dots (60)^{35a)}$$

又, (34) 式により計算すれば

$$F = bx + nF_e + nF_e'$$

c を内縁より断面重心に到る距離とすれば

$$Fc = b \cdot c \frac{x}{2} + nF_e' h' + nF_e h \qquad c = c - x = \frac{-\frac{bx^2}{2} + nF_e'(h'-x) + hF_e(h-x)}{F}$$

故に

$$\sigma_b = \frac{M \frac{x}{r_1}}{-\frac{bx^2}{2} - nF_e'(x-h') + nF_e(h-x)} \dots\dots\dots (61)^{35b)}$$

となる。

圖解的には (33) 及 (34) 式により直ちに容易に求められる。たゞ鐵筋断面は n 倍すればよく、鐵筋コンクリート断面に対しても別に變つた事はない。

次に中立軸の位置を $x = \frac{F}{\int \frac{dF}{r}} - r_1$ により求めしに次の如くなつた。

$$F = bx + nF_e + nF_e' \qquad \int \frac{dF}{r} = \frac{nF_e}{r_e} + \frac{nF_e'}{r_e'} + bl_n \left(1 + \frac{x}{r_1} \right)$$

これらの値を x の式に代入すれば

$$(r_1+x) l_n \left(1 + \frac{x}{r_1} \right) - x + \frac{nF_e'}{br_e'}(x-h') + \frac{nF_e}{br_e}(h-x) = 0$$

となる。これ即ち中立軸決定の方程式である。

次に偏心壓力を受くる場合を考ふるに鐵筋コンクリート断面においては一般にコンクリートの抗張力を無視する故に Emperger 氏に従ひ³⁶⁾

$$\int y dG = 0 \qquad \text{ここに} \quad dG = z \frac{dF}{r} = z dL, \quad dL = \frac{dF}{r} \dots\dots\dots (62)$$

により實際の中立軸を求めねばならぬ。而してこれは式が示す如く dG を力と見做してその合力位置として定めらる。然る後次式の何れかにより内縁應力度 σ_n を求める事ができる。即ち

圖-23 (a).

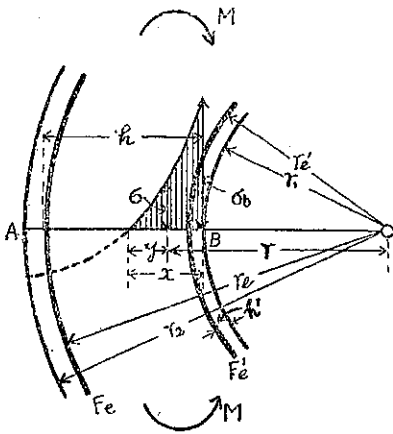
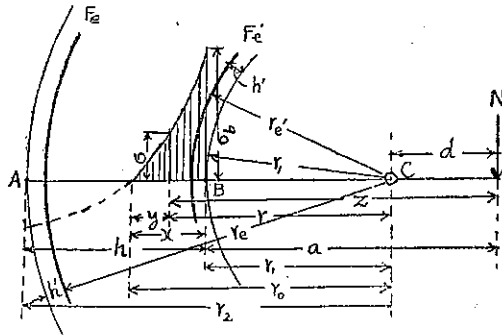


圖-23 (b).



$$\sigma_b = \frac{Nx}{r_1 \int \frac{y}{r} dF}, \quad \sigma_b = -\frac{N \cdot x \cdot d}{r_1 \int y dF} \quad \text{又は} \quad \sigma_b = \frac{N \cdot x \cdot (a+x)}{r_1 \int \frac{y^2}{r} dF} \quad \dots (63)$$

これらの式は難しそうな形をしてゐるので著者の考へ方を前と同様に持つて來て次の如く變形した。

$$\frac{dF}{r} = dL \quad (\text{換算断面}) \quad \text{と置けば}$$

$$r_1 \int \frac{y}{r} dF = r_1 \int y dL = r_1 S_0; \quad S_0 \text{ は換算断面 } dF/r \text{ の中立軸に関する一次率,}$$

$$-r_1 \int y dF = r_1 Fe; \quad e \text{ は中立軸の梁軸よりの偏心距,}$$

$$r_1 \int \frac{y^2}{r} dF = r_1 \int y^2 dL = Z_0; \quad Z_0 \text{ は著者の断面常數,}$$

となる。又

$$N \cdot d = M_0 \quad (\text{曲率中心 } c \text{ に関する曲げモーメント})$$

$$N \cdot (a+x) = M_0 \quad (\text{中立軸に関する曲げモーメント})$$

と置けば (63) 式は夫々次の如くなる。

$$\sigma_b = \frac{Nx}{S_0 r_1}, \quad \sigma_b = \frac{M_0 x}{F r_1 e}, \quad \text{又は} \quad \sigma_b = \frac{M_0 x}{Z_0} \quad \dots (64)$$

この形にすれば前同様に容易に著者の圖解法により分母の値が求め得らるる x を知る。又これらの式により上例と同様、鐵筋コンクリート断面に對し種々の荷重場合について容易に計算公式を導出する事が出来る。而して (64) 式の形は直梁の場合の式に似て暗記し易い。

中立軸の位置 x を計算的に出すには (62) 式に $y=r_1+x-r$, $z=d+r$ と置き

$$\int (r_1+x-r)(d+r) \frac{dF}{r} = 0 \quad \dots (65)$$

より求めらる。

今一つの例として圖-23 の場合につき (64) 及 (65) 式を應用して鐵筋コンクリート断面の曲梁に偏心荷重 N が加はる場合の計算公式を出して見たが次の如くなつた。

$$S_0 = \int y dI = \int (r_1 + x - r) \frac{b dr}{r} \quad \text{よ} \quad S_0 = b(r_1 + x) \ln \left(1 + \frac{x}{r_1} \right) - bx + \frac{nF_e'}{r_e'} (x - h') - \frac{nF_e}{r_e} (h - x)$$

$$eF = - \int y dF = - \int (r_1 + x - r) b dr \quad \text{よ} \quad eF = \frac{bx^2}{2} + nF_e' (x - h') - nF_e (h - x)$$

$$Z_0 = r_1 \int y^2 dI = r_1 \int (r_1 + x - r)^2 \frac{b dr}{r} \quad \text{よ} \quad$$

$$Z_0 = r_1 \left[b(r_1 + x)^2 \ln \left(1 + \frac{x}{r_1} \right) - \frac{bx}{2} (2r_1 + 3x) + \frac{nF_e'}{r_e'} (x - h')^2 + \frac{nF_e}{r_e} (h - x)^2 \right]$$

$$M_c = N \cdot d, \quad M_0 = N(a + x),$$

故に

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{N_0}{S_0 r_1} = \frac{N \cdot x}{r_1 \left[b(r_1 + x) \ln \left(1 + \frac{x}{r_1} \right) - bx + \frac{nF_e'}{r_e'} (x - h') - \frac{nF_e}{r_e} (h - x) \right]}, \\ \sigma_u &= \frac{M_0 e}{F r_1 e} = \frac{N \cdot d \cdot x}{r_1 \left[\frac{bx^2}{2} + nF_e' (x - h') - nF_e (h - x) \right]}, \\ \sigma_b &= \frac{M_0 x}{Z_0} = \frac{N(a + x)x}{r_1 \left[b(r_1 + x)^2 \ln \left(1 + \frac{x}{r_1} \right) - \frac{bx}{2} (2r_1 + 3x) + \frac{nF_e'}{r_e'} (x - h')^2 + \frac{nF_e}{r_e} (h - x)^2 \right]} \end{aligned} \right\} \dots (66)^{50c}$$

又、中立軸は (65) 式より

$$(r_1 + x - r_e)(d + r_e) \frac{nF_e}{r_e} + (r_1 + x - r_e')(d + r_e') \frac{nF_e'}{r_e'} + \int_{r_1}^{r_1 + x} (r_1 + x - r)(d + r) \frac{b dr}{r} = 0$$

故に中立軸の方程式は

$$\frac{x^2}{2} + \frac{nF_e'}{b} (x - h') - \frac{nF_e}{b} (h - x) + d \left[(r_1 + x) \ln \left(1 + \frac{x}{r_1} \right) - x + \frac{nF_e'}{br_e'} (x - h') - \frac{nF_e}{br_e} (h - x) \right] = 0 \dots (67)^{50d}$$

となる。

他の場合も全く同様に直接に (64), (65) 式を應用し, 計算的に, 又容易に圖解的に解く事が出来る。但し鐵筋断面に関しては彈性比 n を考慮し n 倍の断面を取らねばならぬ。

10. 横歪, 半徑方向の應力度を考慮する場合

この場合も著者の考へ方を持つて来れば公式が簡潔となる。Müller-Breslau 氏⁵¹⁾ は横断面の寸法の變化即ち $\frac{4dr}{dv} = -\frac{\sigma}{mE}$ を考慮したる時の σ の公式として次式を出してある。

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{rK_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{r} \right)^{m+1}} - \frac{K_1}{F}} \right) \dots \dots \dots (68)$$

ここに σ は垂直應力度, N は重心にはたらく垂直力, M は曲げモーメント, r は曲率半徑, v は断面の任意點に到る重心軸よりの距離 (曲率中心方向に測りたる長さを正とす), m はポアソンの常數 (鋼に對しては $m=3$), E は彈性係數, F は横断面, K_1, K_2 はこの場合の Müller-Breslau 氏の断面常數にして

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \int \frac{dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^\mu} \\ K_2 &= \int \frac{\frac{v}{r} dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^\mu} = K_1 - \int \frac{dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^{\mu-1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (69)$$

ここに $\mu = \frac{m+1}{m}$

特に矩形断面 (幅 b , 高 h) なる場合は

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= F \frac{r}{h} \omega_1 ; \quad K_2 = F \frac{r}{h} (\omega_1 - \omega_2) ; \\ \omega_1 &= m \left[\frac{1}{\sqrt[1+\frac{h}{2r}]} - \frac{1}{\sqrt[1+\frac{h}{2r}]} \right] ; \quad \omega_2 = \frac{m}{m-1} \left[\sqrt[1+\frac{h}{2r}]^{m-1} - \sqrt[1-\frac{h}{2r}]^{m-1} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (70)$$

となる。

著者は σ による横縮 $\Delta dv/dv$ の影響を考慮するに當り、前と同様、中立軸をもととして、且外力を N 及 M に分解して考へ公式を出して見た (圖-24)。

$$\frac{d\sigma}{dv} - \mu \frac{\sigma}{r_0 - v} + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{E}{r_0 - v} = 0 \dots\dots\dots (71)^{38}$$

において、 $r_0 - v = r$, $dv = -dr$ と置けば

$$\frac{d\sigma}{dr} + \mu \frac{\sigma}{r} - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{E}{r} = 0$$

これを積分すれば

$$\sigma = e^{-\int \frac{\mu}{r} dr} \left[C + \int \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{E}{r} e^{\int \frac{\mu}{r} dr} dr \right],$$

$r = r_0$ の時 $\sigma = 0$ なる条件にて C を決定し、 $-\frac{1}{\mu} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \alpha$ と置けば

$$\frac{\sigma}{E} = \alpha \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^\mu - 1 \right] \dots\dots\dots (72)$$

となる。これを釣合条件 $N = \int_{r_1}^{r_2} \sigma dF = 0$ に代入すれば

$$\alpha E \left(r_0^\mu \int \frac{dF}{r^\mu} - F \right) = 0 \dots\dots\dots (73)$$

となり、これより中立軸の位置 r_0 が求まる、即ち

$$r_0^\mu = \frac{F}{\int \frac{dF}{r^\mu}} \dots\dots\dots (74)$$

横縮を考へざる時は $\mu = 1$, $r_0 = \frac{F}{\int \frac{dF}{r}}$ となり前述の公式 (37) 式に歸着す。

次にも一つの釣合条件 $-M = \int_{r_1}^{r_2} \sigma \cdot r \cdot dF$ に (72) 式を代入すれば

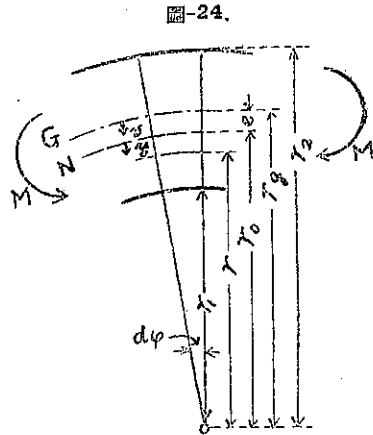


圖-24.

$$-M = E\alpha \int_{r_1}^{r_2} r^2 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^\mu - 1 \right] r dr = -\alpha E \left(r_2^\mu - r_0^\mu \int \frac{dr}{r^{\mu-1}} \right) \dots (75)$$

となる。これより

$$\alpha = \frac{M}{E \left(r_2^\mu - r_0^\mu \int \frac{dr}{r^{\mu-1}} \right)} \dots (76)$$

これを (72) 式に代入すれば

$$\sigma = \frac{M}{K} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^\mu - 1 \right] \dots (77)$$

ここに K は Müller-Breslau の記號にならつて導入した著者の断面常數であつて

$$K = r_2^\mu - r_0^\mu \int \frac{dr}{r^{\mu-1}} ; \quad \mu = \frac{m+1}{m} \dots (78)$$

を表す。

然らば N 及 M (又は偏心力 N) がはたらく場合

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{K} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^\mu - 1 \right] \dots (79)$$

となる。これ所求の σ の公式である。

$\mu \rightarrow 1$ の場合

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{(r_2 - r_0)F} \frac{r_0 - r}{r} = \frac{N}{F} + \frac{My}{Fer_1} \frac{r_1}{r} = \frac{N}{F} + \frac{My}{Z_0} \frac{r_1}{r}$$

となり前述の横歪を考へない場合の式 (35) に歸着す。

次に矩形断面につき r_0^μ 及著者の断面常數 K を出せば次の如くなる。

$$r_0^\mu = \frac{bh}{\int \frac{bdr}{r^\mu}} = \frac{(1-\mu)h}{(r_1+h)^{1-\mu} - r_1^{1-\mu}} = \frac{(1-\mu)h}{r_2^{1-\mu} - r_1^{1-\mu}} \dots (80)$$

$$K = bhr_2 - r_0^\mu \int \frac{bdr}{r^{\mu-1}} = bhr_2 - \frac{br_0^\mu}{2-\mu} [r_2^{2-\mu} - r_1^{2-\mu}] \dots (80a)$$

ここに述べたる式はやはり横断面が荷重を受け變形したる後も平面を保つといふ假定のもとに出したるものである。而して以上の如く横縮の影響を考慮する時更に半径方向の應力度 σ_r の影響をも考へたくなるのである。

然らば $\epsilon = \frac{1}{E} \left(\sigma - \frac{\sigma_r}{m} \right)$, $\epsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{\sigma}{m} \right)$, 而しかく考へて解を求めて見たが甚複雑となり且中立軸を表す式も陰函數となり近似式として實用的でない。實地設計には前掲の近似式は甚適當なるものと思はる。尙著者の考へ方及方法は降伏状態の曲梁に對し便利に應用せらる。この結果は後編として述べよう³⁹⁾。

参 考 文 獻

1) 二部材が直交するラ-メン隅部において曲げモーメントのみが作用する場合についての解は A. u. L. Föppl: Drang und Zwang, I. Band, 1924, 340~344 頁にある。

二部材が直交するラ-メン隅部において一般荷重加はる場合についての解は

工博, 福田武雄: ラ-メン, 昭和 13 年 5 月, アルス社發行, 112~117 頁 (又は土木學會誌, 第 15 卷第 6 號及第 12 號, 昭和 4 年) にある。平面應力問題として Airy の應力函數を用ひて解いてある。

ラ-メン隅部の應力度線 (Spannungslinie) については

Dr. Ing. Th. Wyss: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern, 1926, 321~323 頁, 及

Dr. Ing. A. Jackson: Über Spannungslinien, 37 頁参照, Jackson のは近似解により出してゐる。

2) E. Preuss: Versuche über die Spannungsverminderung durch Ausrundung scharfer Ecken, Z. d. V. D. I. 1912, 1349 頁。

辻 二郎: Photographic and kinematographic study of photoelasticity (機械學會誌, 第 31 卷, 第 136 號, 昭和 3 年)。

二見秀雄: ラーメンの隅角部における應力度状態の光弾性學的的研究, 建築雜誌, 昭和 8 年 10 月。これらの研究の結果は 1) 福田: ラーメン, 117~120 頁に抜萃轉載せらる。

Kayser und Herzog: "Versuche zur Klärung des Spannungsverlaufes in Rahmenschen." Der Stahlbau, Jahrgang 12, Heft 2, 20. Jan. 1939. S. 9~15. 土木學會誌, 第 25 卷, 第 6 號, 抄録。

3) これに關する詳細なる陳述は

Fr. Bleich: Stahlhochbauten, 2. Band, 又は ブライヒ: 鐵骨構造, 下卷 (池部宗薫氏外 5 氏共譯) コロナ社發行, 昭和 14 年第 3 版, 703 頁参照。この書には Müller-Breslau 公式によるラーメン隅部及節點の設計の計算解の實例を示す。而して節點における應力分布に適應するよう考案した 熔接のラーメン節點構成法をも示してゐるがまだ研究の餘地が残されてゐる。勿論精密理論自身にも實際構造に對しては今後の研究に待たねばならぬ事を認める。

4) 例へば S. Timoshenko: Theory of Elasticity, 1934, 60 及 72 頁。

工博, 福田武雄: 鐵筋コンクリート理論, 昭和 13 年第 7 版, 山海堂出版。503~506 頁。

Kurt Beyer: Die Statik im Eisenbetonbau, 2. Band, 2. Auflage, 1934, 737~741 頁。

5) H. Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 5. Auflage, 1924, 236~242 頁。

6) Bach und Baumann: Elastizität und Festigkeit, 9. Auflage, 1924, 506 頁以下, Bach の著書に掲げてある式であるから Bach の公式と稱してゐるが又 Grashof の公式とも呼ばれる。

Grashof: Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878; Résal: Annales des mines, 1862. (曲梁の近似解は Résal 及 Grashof に初まる)。

工博, 小野鑑正: 材料力學, 第 3 版。179 頁以下。

工博, 山口 昇; 最上武雄: 材料力學 (岩波講座。物理學)。

工博, 清水篤麿, 材料力學。241 頁以下。

工博, 野口尙一: 應用彈性學。昭和 9 年, 山海堂出版。82 頁以下。

7) Emperger: Handbuch für Eisenbetonbau, 1. Band, Geschitliche Entwicklung, Versuche, Theorie, 1929, 372~378 頁。

8) 工博, 福田武雄: 鐵筋コンクリート理論, 503~524 頁。

9) 曲梁の Airy 函数による解は例へば 8) 福田: 鐵筋コンクリート理論, 503~505 頁, 清水篤麿: 彈性學上卷 310~316 頁。

1) Föppl: Drang und Zwang. I. Band, 304~312 頁。

2) Timoshenko: Theory of Elasticity, 58~73 頁。

4) Kurt Beyer: Die Statik, 2. Band, 738~742 頁, 本文には Beyer 氏の記號による公式を掲ぐ, 親和條件式は適合條件式又は 兩立條件式とも稱せらる。精密解といつてもこの式をたてた 假定が實際にあてはまらないときは適用できぬ。6) の場合はその例で今後研究すべき問題であると思ふ。

10) 5) Müller-Breslau: Die neuern Methoden, 241 頁。

v の測り方を曲梁の曲率中心より外方にとる時正とすれば $\epsilon\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M}{Fr} - \frac{Mv}{Z} \frac{r}{r+v}$ となる。

著者は Z を Müller-Breslau 氏の断面常數と呼ぶことにしたが断面函数又は 準拮性率とも呼ばれる。記號も場合によりては J (土木工學ポケットブック, 上卷, 山海堂, 242 頁) 又は Y (Hauber: Statik 又は 拙著: 圓式静力学下卷, 279 頁) なる記號を用ひてゐる。

11) 6) Bach und Baumann: Elastizität und Festigkeit, 507 頁 (8) 式。この書 510 頁以下に矩形, 梯

形, 圓形及 I 字形断面等に對する断面常數 κ の式を掲げてゐる。この (8) 式は Bach の式又は Grashof の式と呼ぶ。 κ は断面係數とも稱せらるゝが著者は Bach の断面常數 κ と呼ぶことにした。 Grashof 氏は同氏著: Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin, 1878, 283 頁に曲梁に對する剪應力度公式

$$\tau = \frac{SM_{\eta}}{2\gamma\kappa f(r \pm \eta)^2 \cos \varphi'}$$
 を掲げてゐる。通常は曲梁に對しても近似的に直梁に對する剪應力度公式が用ひられてゐる。

著者は κ も Z も共に断面常數と呼ぶことにし, κ, Z を断面常數の名前と考へた。尙著者の導入せる $Z_0, K, Müller-Breslau$ の横歪を考へた場合の K_1, K_2 もすべて断面常數と呼ぶことにした。

12) Martin Grüning: Die Statik des ebenen Tragwerkes, 1925, 159 頁。 Grüning の式は外形は Timoshenko の式と同一であるが考へ方が e を出すに Müller-Breslau の Z を用ひてゐる。それに反し Timoshenko は Z に因はれず中立軸の半徑を出してゐる。

$$e = \frac{Zr}{Z + Fr^2}$$
 の代りに $k^2 = \frac{Z}{F}$, $i^2 = \frac{J}{F}$ を代入し
$$e = \frac{k^2}{r + \frac{k^2}{r}} \cos \frac{i^2}{r + \frac{i^2}{r}}$$
 なる式も掲げてゐる。

13) 工博, 覺前陸夫: 材料力學新論, 昭和 16 年 12 月, 工業圖書株式會社發行, 112 頁, 又は同氏: 「灣曲せる梁の曲應力に關する一考察」機械及電氣, 第 2 卷 8 號, 1378 頁。

14) Timoshenko: Strength of Materials, Part II, 423 頁以下, 單純曲げにつき種々の断面につき曲率中心より中立軸に到る距離を出してゐる。この書には P/A なる項は書いてなかつたが式を揃へるため著者が追加したものである。 Timoshenko の式は Winkler の式とも呼ばる。

15) 例へば 6) 小野鑑正: 材料力學, 186 頁。

16) 著者: 「曲部材の應力度に對する圖解法」, 土木技術, 第 3 卷, 第 7 號, 昭和 17 年 7 月, (25) 式においては v の正の値は曲率中心方向に測りたるものである。もし v の正を外方に取るものとすればこの式の v の代りに $-v$ と置かねばならぬ, 例へばフライヒ著: 鐵骨構造においては $Z = r \int_{e_u}^{e_o} \frac{v^2}{r+v} df$ と表してある。

17) Vianello-David: Der Eisenbau, 3 Auflage, 1927, 420 頁に板桁横断面の曲梁に對する Z 並に σ を數値例にて計算を表を作りて算出してゐる。

18) フライヒ: 鐵骨構造, 下巻, 693 頁, (23) 式, 尙この書には Z の計算の數値例及ラーメン隅部の構造及設計例を 693~724 頁に Müller-Breslau 氏公式を用ひ計算してゐる。

19) 7) Emperger: Handbuch für Eisenbetonbau, 1 Band, 375 及 377 頁。曲梁に偏心力作用する場合 $\int v dG = 0$ により圖解的に中立線を求め得らるゝ事を述べてゐる。しかし σ に對する圖解は述べてゐない。然しこの場合中立軸を求める爲の $dG = \frac{\kappa}{\sigma} dF$ の外, σ を求めるに別に $\int v dF$, $\int \frac{v}{w} dF$, $\int \frac{v^2}{w} dF$ の何れかを計算しなければならぬ。然し偏心力を受くる鐵筋コンクリート断面曲梁には Emperger の公式を用ふべきである。この場合については本文 9 節にのべる。これらの式は直梁の場合の核モーメントの式に對應するものと考へらる。

20) 直梁の場合の Spangenberg 氏の解法は, 例へば

工博, 吉田徳次郎: 増訂, 鐵筋コンクリート設計法, 昭和 16 年, 養賢堂發行, 376~380 頁,

7) Emperger: Handbuch für Eisenbetonbau, 1. Band. 360 頁にある。

21) 9) Timoshenko: Theory of Elasticity, 53 頁, (33) 式。

22) 4) Kurt Beyer: Die Statik, 2. Band, 738 頁, Abb. 755a, 755b.

23) 6) 小野博士: 材料力學, 第 3 版, 186 頁。

24) 同上, 183 頁。

25) 4) 福田博士: 鐵筋コンクリート理論, 506 頁の第 436 圖につき σ_i を與へたるものとし σ_r を $\frac{\sigma_i}{r}$ にて算出して見たがその圖と同じになつた。

26) 4) Kurt Beyer: Statik im Eisenbetonbau, 739 頁, Abb. 758, 759a, 759b 及 759c.

27) この例は 3) フライヒ: 鐵骨構造, 下巻 694 頁, 例 2; 695 頁の例 3 の例題であつて, 計算的にやつてゐるのを, 著者の圖解法の例にとつたのである。

28) Hans Bleich: Die Spannungsverteilung in den Gurtungen gekrümmter Träger von T und I förmigen Querschnitt, Der Stahlbau, 1933, 3 頁。

29) 3) ブライヒ: 鐵骨構造, 上巻, 66 頁, 及 69 頁, 本文 (56) 式は Bleich 氏が St. Vénant の式をもととしてドイツ國仕方書に従ひ書き變へたものである。換算應力度公式としては現今では Schleicher 氏の式が最良と認められてはゐるが一般にまだ用ひるまでにはなつてゐない。

30) 3) ブライヒ: 鐵骨構造, 下巻, 700~711 頁。

31) 同上, 701 頁, 第 106 表, 但し σ_r を σ' として表した。

32) 16) 著者「曲部材の應力度に對する圖解法」, 土木技術, 第 3 卷, 第 7 號, 47~49 頁。

33) 6) Grashof: Elastizität und Festigkeit, s. 233 u. s. f.

Hütte des ingenieurs. Taschenbuch, Bd. I, 25. Auflage, 655 頁, 本文にはこの書の記號による式を示す。

6) Bach und Baumann: Elastizität und Festigkeit, 9. Auflage, 510 頁。

Lorenz: Technische Elastizität, Kapitel IV, § 23, (14c), (16a) に示せる式は曲率半徑小なる場合は適用出來ぬ。

34) 3) ブライヒ: 鐵骨構造, 下巻, 700 頁。

35) 4) 福田博士: 鐵筋コンクリート理論, 506~524 頁。

35a) 同上, 509 頁, (941) 式。

35b) 同上, 509 頁, (941a) 式。

35c) 同上, 518 頁, (962) 式。

35d) 同上, 517 頁, (961) 式。

36) 7) Emperger, 375 及 377 頁, 本文では原書における記號を著者の場合に書きなほした。

37) 5) Müller-Breslau: Die neueren Methoden, 250~252 頁。

38) 同上, 250 頁。

39) この論文を前編とし後編として, 覺前博士の問題「降伏状態における曲梁」, その特別の場合として Náđai 氏の問題「降伏状態における直梁」を著者の考へ方及圖解法を以て解きたるものを述べよう。

後 編

後編要旨 前編において述べた曲梁の新公式並に圖解法は弾性限度以内の應力度に對するものであつたが, 後編では其の考へ方及方法を降伏状態の曲梁の應力度並に其の特別の場合として Náđai 氏の問題である降伏状態の直梁の應力度公式に應用して見た。

後 編 目 次

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 12. 緒 論 | f) 例題 (イ), (ロ), (ハ), (ニ), (ホ) |
| 13. 降伏状態の曲梁の應力度に對する著者の公式及圖解法 | 14. 降伏状態における直梁 |
| a) 内外兩側共に降伏状態に在る場合 | a) 内外兩側共に降伏状態に在る場合 |
| b) 一側が降伏状態に在り他側弾性状態に在る場合 | b) 例 題 |
| c) 内縁點が降伏點 σ_s に達する場合 | c) 一側が降伏状態に在り他側弾性状態に在る場合 |
| d) 全断面が降伏状態に在る場合 | d) 例 題 |
| e) 半徑方向の應力度 σ_r の圖解 | 15. 結 論 |

12. 緒 論

晩近従來の如き弾性領域のみに就て論じたる材料力學では實際の要求を充分満足せしむる事が出来なくなり、特に機械又は航空工學方面において降伏状態をも考の中に入れた新材料力學が考慮せらるゝようになつた⁴⁰⁾。既に曲梁應力度に就ての計算的方法に關しては Svida 氏⁴¹⁾、覺前博士⁴²⁾の論文があり、直梁に關しては Nádai 氏⁴³⁾の研究がある。これら曲梁及直梁の研究は各別個になされてゐるのであるが著者は後者に對し曲梁の特別の場合として考へた。

従來の研究ではモーメントの釣合條件式を立てるに梁の横斷面の縁點を原點としてゐるが、これでは圖解に向であるので著者は曲梁の中立軸又は梁軸の曲率の中心を原點に取つた。かくして親しみある外形及内容を有する公式を得た。又覺前博士の研究の補遺として半徑方向の應力度 σ_r を考慮した。

13. 降伏状態の曲梁の應力度に對する著者の公式及圖解

a) 内外兩側共に降伏状態に在る場合

圖-25 は明瞭なる降伏點を有する軟鋼等の應力歪曲線を説明圖的に示したものである。應力度 σ と歪度 ϵ との關係は弾性状態にては原點 O を通る傾斜直線にて降伏状態にては ϵ 軸に平行なる直線にて表さるゝものと假定す⁴⁴⁾。

一般に曲梁の横斷面 F に偏心力 N がはたらく場合簡單化するため、軸力 N の影響 $\sigma = N/F$ とモーメン

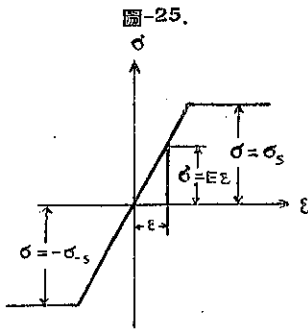


圖-25.

ト M の影響の和として考ふ。

圖-26 は曲梁が曲げモーメント M を受けたる場合の變形及應力度分布を示す。その中 (a) 圖は O 點を曲率中心とする圓軸の曲梁において、中心角 $d\phi$ を夾む微小扇形 $aABb$ が曲げモーメント M の作用の下に、 $a'A'b'b'$ に變形したるを示す。即ち隣接兩斷面 AB, ab は微小角 $d\phi$ だけ廻轉し、曲率中心 C は C' に移り、中心角 $d\phi$ は $d\phi - d\phi$ となりたるものとす。この際横斷面 AB, ab は變形後も平面を保持するものと假定したのである。 r_1 は内縁半徑、 r_2 は外縁半徑、 m は中立線、 r_0 は C より中立線に到る距離、 y は中立線より任意の纖維に到る距離にして中立線より内方に測りたるを正とす。

(b) 圖は曲梁の横斷面を示し F_a, F_0, F_b は夫々壓縮降伏部分、弾性部分、引張降伏部分を表し、 r_a, r_b は夫々曲

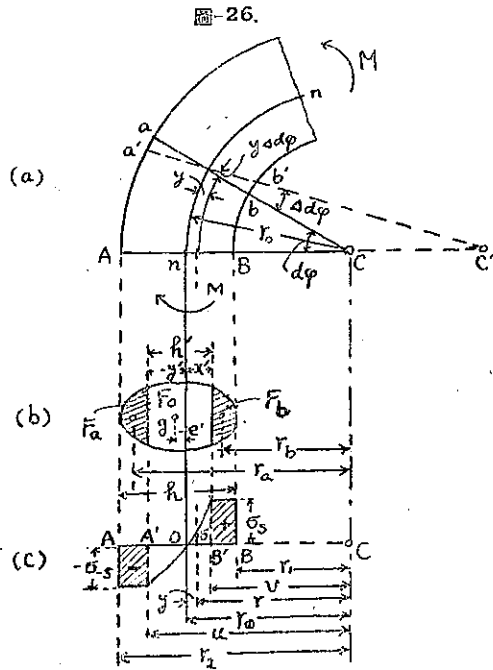


圖-26.

率中心 C より面 F_a 及 F_b の中心に到る距離, h は梁の全高, h' は弾性部分面の高さ, $x', -y'$ は夫々中立線より兩降伏部分面の境界線に到る距離, g は弾性部分面の中心, $-e'$ は弾性部分面の中心が中立線より偏せる距離を表す。圖において降伏部分面は斜影線を以て示した。全断面 $F = F_a + F_0 + F_b$ 。

(c) 圖は梁断面 (b) における應力分布圖を示す。弾性部分 F_0 に對應する部分の應力度は双曲線に變化し, 内外兩側は夫々引張及壓縮降伏點 σ_s 及 $-\sigma_s$ に達するものとす。計算においては簡單のため $\sigma_s = -\sigma_s$ と假定す。曲率中心より面 F_a, F_b の境界點 A', B' に到る距離を u, v とし, 中立線より y なる距離における纖維の應力度を σ とす。

中立線 mn より C の方向へ y なる距離にある纖維 $(r_0 - y) d\varphi$ が M の作用を受けたる後 $y d\varphi$ だけ長くなりたるものとす。其時に起る歪は

弾性部分においては

$$\epsilon = \frac{y \Delta d\varphi}{(r_0 - y) d\varphi} \dots\dots\dots (81)$$

にして, 應力度は

$$\sigma = E\epsilon = \frac{y E \Delta d\varphi}{(r_0 - y) d\varphi} \dots\dots\dots (82)$$

簡單の爲に $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \omega, \quad E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \sigma \omega \dots\dots\dots (83)$

と書けば

$$\sigma = \sigma \omega \frac{y}{r_0 - y} = \sigma \omega \frac{y}{r} \dots\dots\dots (84)$$

降伏部分においては

$$\left. \begin{array}{l} \text{引張部分は} \quad \sigma = \sigma_s \\ \text{壓縮部分は} \quad \sigma = -\sigma_s = -\sigma_s \end{array} \right\} \dots\dots\dots (85)$$

釣合條件は

$$\text{垂直力} \quad 0 = \int_F \sigma dF \dots\dots\dots (86)$$

$$\text{曲げモーメント} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{中立軸に關して} \quad M = \int_F \sigma y dF \dots\dots\dots (87) \\ \text{曲率中心に關して} \quad M = - \int_F \sigma r dF \dots\dots\dots (88) \end{array} \right.$$

こゝに積分は全断面 F につき行ふものとす。

(86) 式より

$$0 = -\sigma_s F_a + \sigma_s F_b + \int_{F_0} \sigma dF = -\sigma_s F_a + \sigma_s F_b + \sigma \omega \int_{F_0} y \frac{dF}{r} \dots\dots\dots (89)$$

然るに $y = x'$ にて $\sigma = \sigma_s$ 又は $y = -y'$ にて $\sigma = -\sigma_s$

故に (84) 式より

$$\sigma_s = \sigma \omega \frac{x'}{v} \quad \text{又は} \quad -\sigma_s = -\sigma \omega \frac{y'}{u} \dots\dots\dots (90)$$

これを (89) 式に代入すれば

$$-\sigma \omega \frac{y'}{u} F_a + \sigma \omega \frac{x'}{v} F_b + \sigma \omega \int_{F_0} y \frac{dF}{r} = 0$$

$$-y' \frac{F_a}{u} + x' \frac{F_b}{v} + \int_{F_0} y \frac{dF}{r} = 0 \dots\dots\dots(91)^{45)}$$

これ dF/r を力と見做したる場合の重心條件を表す。但し降伏状態の部分面 F_a 及 F_b に関しては力 F_a/u 及 F_b/v が夫々降伏面の境界點 A', B' に集中したるものと見做さる。

然るに (90) 式より $\sigma_\omega \frac{x'}{v} = \sigma_\omega \frac{y'}{u}$ 故に

$$\frac{x'}{y'} = \frac{v}{u} \dots\dots\dots(92)$$

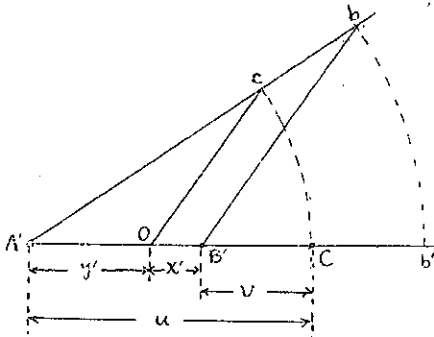
又はこれに $x' = r_0 - v$, $y' = u - r_0$ を代入して r_0 につき解けば

$$r_0 = \frac{uv}{u+v} \text{ 又は } \frac{2}{r_0} = \frac{1}{v} + \frac{1}{u} \dots\dots\dots(93)$$

v を與ふれば (91) 及 (92) 又は (93) 式により圖解的に試查的に中立軸の位置が求まる、即ち v を與ふれば u を假定して dF/r の合力の位置を求む、即ち dF/r を力と見做して力多邊形を畫きこれに對應する稜多邊形の最外二邊の交點により、圖解的に中立軸位置が決まる。然る後これが (92) 又は (93) 式を満足するや否やを試せばよい。 u, v を與へる時 x' は (92) 式により圖-27 を以て、或は又、 r_0 は圖-28 を以て圖解的に求めらる。

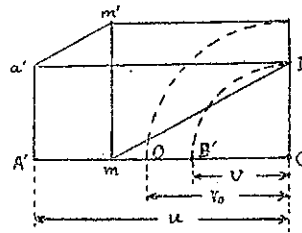
普通の場合と異り、中立軸はモーメントの大きに關係す。

圖-27.



$B'C = Cb'$, $b B' \parallel c O$
 $C B' O A'$... 高田知彦氏.

圖-28.



$$A'm = m B'$$

$$m D \parallel a'm'$$

$$r_0 = \frac{uv}{u+v}$$

又 は

$$\frac{2}{r_0} = \frac{1}{v} + \frac{1}{u}$$

$$(90) \text{ 式より } \sigma_\omega = \sigma_s \frac{v}{x'} \dots\dots\dots(94)$$

又は $x' = r_0 - v$, $r_0 = \frac{uv}{u+v}$ を代入すれば

$$\sigma_\omega = \sigma_s \frac{u+v}{u-v} \dots\dots\dots(95)$$

特別の場合として外縁 A が將に $-\sigma_s$ にならんとする時は $u = r_0$, $F_a = 0$, 故に (91) 式より

$$x' \frac{F_b}{v} + \int_{F_0} y \frac{dF}{r} = 0 \dots\dots\dots(96)$$

(92) 又は (93) 式より

$$\frac{x'}{y'} = \frac{v}{r_2} \quad \text{又は} \quad r_0 = \frac{2r_2v}{r_2+v} \dots\dots\dots(97)$$

(96) 及 (97) 式により中立軸が決まる。

さて (87), (84) 及 (94) 式より

$$\begin{aligned} M &= \sigma_s y_a F_a + \sigma_s x_b F_b + \int_{F_0} \sigma y dF = \sigma_s (y_a F_a + x_b F_b) + \int_{F_0} \sigma_\omega y^2 \frac{dF}{r} \\ &= \sigma_s \left(y_a F_a + x_b F_b + \frac{v}{x'} \int_{F_0} y^2 \frac{dF}{r} \right) \end{aligned}$$

故に

$$M = \sigma_s \left(y_a F_a + x_b F_b + \frac{Z_0'}{x'} \right) = \sigma_s W'' \dots\dots\dots(98)^{46}$$

ここに Z_0' は断面 F_0 に對する著者の断面常數を表す。 W'' は括弧内の値を表す。これは前編 (33) 式の一般化したものと思ふ事を得。

次に (88), (84), (94) 式より

$$\begin{aligned} M &= \sigma_s r_a F_a - \sigma_s r_b F_b - \int_{F_0} \sigma r dF = \sigma_s (r_a F_a - r_b F_b) - \int_{F_0} \sigma_\omega y dF = \sigma_s (r_a F_a - r_b F_b) - \frac{v}{x'} \int_{F_0} y dF \\ &= \sigma_s \left(r_a F_a - r_b F_b + \frac{F_0 v e'}{x'} \right) \dots\dots\dots(99) \end{aligned}$$

ここに e' は中立軸の断面 F_0 の重心よりの偏心距を表す。これは前編 (34) 式の一般化した式と思ふ事を得。

中立軸がわかれば (98) 又は (99) 式により計算又は圖解により與へたる v に對し抵抗し得べきモーメント M が決まる。 Z_0' 又は e' は前編 Z 又は e の圖解と全く同様に行はる。

弾性部分における σ は

$$\sigma = \sigma_\omega \frac{y}{r} = \sigma_s \frac{v}{x'} \frac{y}{r} = \sigma_s \frac{u}{y'} \frac{y}{r} \dots\dots\dots(100)$$

にて表さる。

b) 一側が降伏状態にあり他側弾性状態にある場合

例へば内側部分は降伏状態にあり外側は弾性状態にある場合を考ふ。(圖-29 (a))。

圖-29. (a)

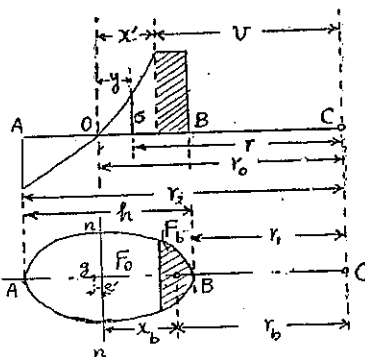
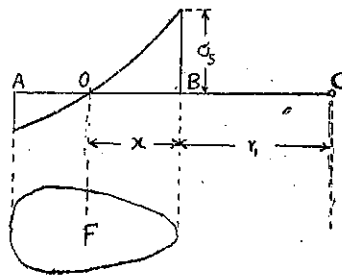


圖-29. (b)



(91) 式において $F_a=0$ と置けば

$$v' \frac{E_0}{v} + \int_{x_0} y' \frac{dF}{r} = 0 \dots\dots\dots(101)$$

v が與へらるればこれにより dF/r を力と見做したる時其の合力位置として中立軸がきまる。

(98) 式において $F_a=0$ と置けば

$$M = \sigma_s \left(x_b F_b + \frac{Z_0'}{x'} \right) = \sigma_s IV' \dots\dots\dots(102)$$

こゝに IV' は括弧内の値を表す。

(99) 式において $F_a=0$ と置けば

$$M = \sigma_s \left(-r_b F_b + \frac{F_0 v e'}{x'} \right) \dots\dots\dots(103)$$

となる。

c) 内縁點が降伏點 σ_s に達する場合

(89) 式において $F_a = F_b = 0, F_0 = F$ と置けば

$$0 = \sigma_s \int_{x'} y' \frac{dF}{r}, \quad \text{これより}$$

$$\int_{x'} y dL = 0 \dots\dots\dots(104)$$

これ前編 (31) 式である。

(98) 式において $F_a = F_b = 0, F_0 = F, Z_0' = Z_0, x' = x$ と置けば

$$M = \sigma_s \frac{Z_0}{x} \dots\dots\dots(105)$$

これ前編 (33) 式において $\sigma_b = \sigma_s$ と置きたるものに等しい。

d) 全断面が降伏状態に在る場合

(89) 式において $F_0 = 0$ と置けば $\sigma_s F_a = \sigma_s F_b$, 故に

$$F_a = F_b \dots\dots\dots(106)$$

(98) 式において $F_0 = 0$ と置けば

$$M = \sigma_s (y_a F_a + x_b F_b) \dots\dots\dots(107)$$

特別の場合として矩形断面 bh に對しては

$$F_a = F_b = \frac{bh}{2}, \quad M = \sigma_s \frac{bh^2}{4} \dots\dots\dots(108)$$

e) 半徑方向の應力度 σ_r の圖解

前編 (41) 式により曲梁にモーメントが作用する場合

$$\sigma_r = \pm \frac{\sigma}{r} \dots\dots\dots(109)$$

により σ の分布圖より求められる。

f) 例題

(イ) 内外兩側共に降伏状態に在る場合

矩形断面 (幅 $b=5$ cm, 高さ $h=10$ cm), 内縁半徑 $r_1=10$ cm, 外縁半徑 $r_2=20$ cm, 降伏點 $\sigma_s=2400$ kg/cm², 内側降伏面 F_b の高さ 3 cm に及ぶ時の曲げモーメント M を求めよ。

圖-30.

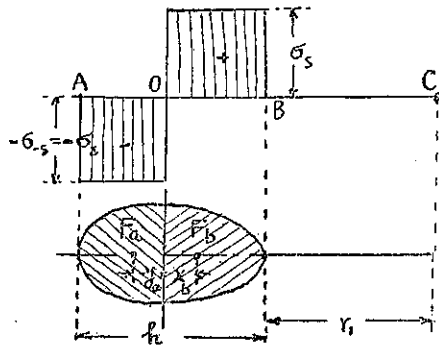
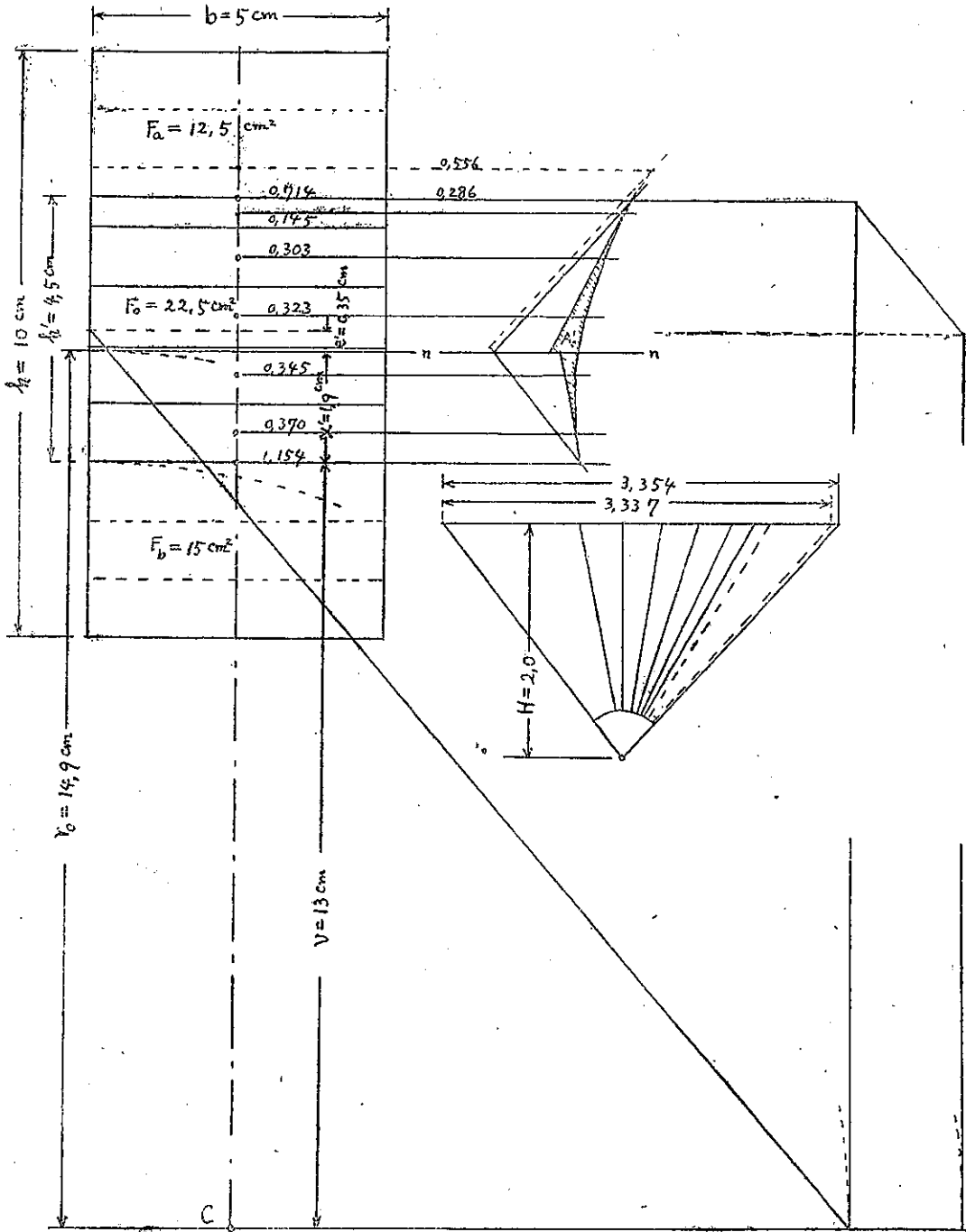


圖-31.



解. 圖-31 に示す如く先づ (91) 式に従ひ $F_a/u, F_b/v, dF/r$ を力と見做し力多邊形を畫く。この際 u , 従つて外側降伏面の高さは當初假定しなければならぬ。この力多邊形に對し索多邊形を畫き最外邊の交點により中立軸が一致するよう試查的に中立軸を求む。圖-31 にては外側降伏面の高さを, 初め 2 cm, 次に 2.5 cm として目的を達したるを示す。この場合都合よき事は試查において, 力多邊形も索多邊形も, 外縁降伏面に對應する處だけ僅か變化補正すればよく, 全體として變更するの必要なき事である。中立軸が決まれば圖より $Z'_0 = v \cdot A'_0 \cdot H = 13.2 \cdot 0.68 \cdot 2 = 35.36$ となる故に直ちに (98) 式により所求の曲げモーメント M が求められる。即ち

$$M = \sigma_s \left(y_a F_a + x_b F_b + \frac{Z'_0}{x'} \right) = 2400 \left(3.85 \cdot 12.5 + 3.4 \cdot 15 + \frac{35.36}{1.9} \right) = 283\,000 \text{ kg cm}$$

又, (99) 式より

$$M = \sigma_s \left(r_a F_a - r_b F_b + \frac{F'_0 v v'}{x'} \right) = 2400 \left(18.75 \cdot 12.5 - 11.5 \cdot 15 + \frac{22.5 \cdot 18 \cdot 0.35}{1.9} \right) = 280\,000 \text{ kg cm}$$

弾性部分面における應力度は (100) 式より

$$\sigma = \sigma_s \frac{y}{r} = \sigma_s \frac{v}{x'} \frac{y}{r_0 - y} = 2400 \frac{13}{1.9} \frac{y}{14.9 - y} = 16\,420 \frac{y}{14.9 - y} \dots\dots\dots (110)$$

この式より σ を計算すれば表-6 の如くなる。

表-6.

y (cm)	+1.9	+1.4	+0.4	-0.6	-1.1	-1.6	-2.1	-2.5	$\begin{matrix} -2.5 > \\ +1.9 < \end{matrix}$
σ (kg/cm ²)	2400	1700	450	-640	-1130	-1590	-2030	-2360	± 2400

(ロ) 内側降伏状態にあり外側弾性状態にある場合

上例 (イ) において内側降伏面 F_b の高さ 1 cm に及ぶ時の曲げモーメントを求む。

解. 圖-32 に示す如く, この場合は中立軸の位置は (101) 式により索多邊形の外邊の交點を以て直ちに決まる。然らば曲げモーメントは例へば (103) 式により次の如くなる。即ち

$$M = \sigma_s \left(-r_b F_b + \frac{F'_0 v v'}{x'} \right) = 2400 \left(-10.5 \cdot 5 + \frac{45 \cdot 11 \cdot 0.97}{3.53} \right) = 200\,000 \text{ kg cm}$$

弾性部分面における應力度は (100) 式より

$$\sigma = 2400 \frac{11}{3.53} \frac{y}{14.53 - y} = 7480 \frac{y}{14.53 - y} \dots\dots\dots (111)$$

となる。

(ハ) 内縁點が降伏點 σ_s に達する場合

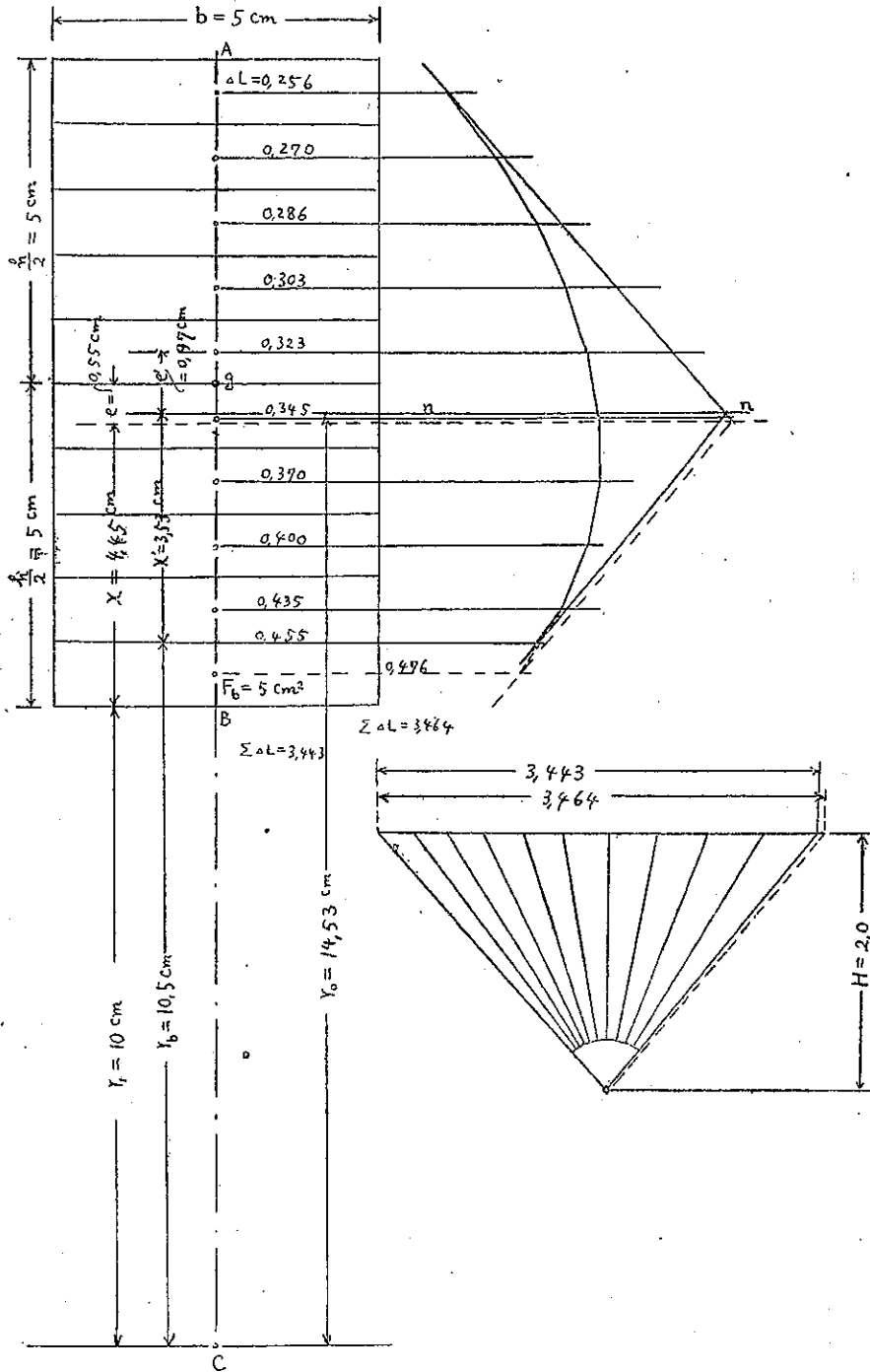
例 (イ) の曲梁断面において内縁點が將に降伏點 $\sigma_s = 2400 \text{ kg/cm}^2$ に達せんとする時の M を求む。

解. 公式 (105) より $M = \sigma_s \frac{Z'_0}{x}$, 然るに圖-32 (この場合は (ロ) の場合の F_b の部分に對する處だけ力多邊形及索多邊形を點線の如く變更すればよい) により $x = 4.45 \text{ cm}$, $Z'_0 = r_1 F_e = 10.50 \cdot 0.55 = 270$, 故に

$$M = 2400 \frac{270}{4.45} = 150\,000 \text{ kg cm}$$

(ニ) 全断面が降伏状態に在る場合

圖-32.



例(イ)の曲梁断面において全面降伏状態に達した時の曲げモーメント M を求む。

解. (108) 式において $\sigma_s = 2400 \text{ kg/cm}^2$, $b = 5 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$ を代入すべ

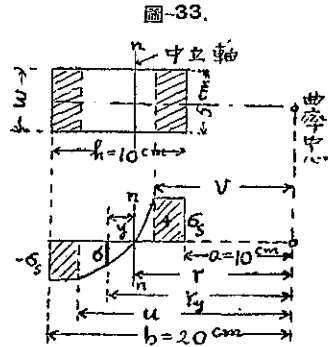
ば
$$M = 2400 \frac{5 \cdot 10^2}{4} = 300\,000 \text{ kgcm}$$

(ホ) 半径方向の應力度 σ_r の圖解

例(イ)及例(ニ)において半径方向應力度を求む。

解. 表-6 の代りに, 計算的方法の例をも示すために先づ例(イ)に對應してモーメント $M = -280\,000 \text{ kgcm}$ につき覺前博士の公式⁴⁷⁾により σ を求め, これにつき σ 面を畫きて面積を求め (109) 式により σ_r を求めることとす。

圖-33 の記號寸法につき計算すれば



$$A = \frac{2M}{\sigma_s b} + a^2 + b^2 = -\frac{2 \cdot 280\,000}{2400 \cdot 5} + 10^2 + 20^2 = 453.3333$$

$$p = \frac{2}{3} A = \frac{2}{3} \cdot 453.3333 = 302.2222$$

$$q = \frac{3}{8} (a+b) A = \frac{3}{8} (10+20) 453.3333 = 5\,100.0000$$

$$\cos \varphi = \frac{q}{p\sqrt{p}} = \frac{5\,100}{302.2222\sqrt{302.2222}} = 0.9707$$

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{q}{p\sqrt{p}} = \cos^{-1} 0.9707 = 13^\circ 54'$$

$$r = 2\sqrt{p} \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right) = 2\sqrt{302.2222} \cos \left(60^\circ + \frac{13^\circ 54'}{3} \right)$$

$$= 14.895 \div 14.90 \text{ cm} \dots \text{中立軸の曲率半径}$$

$$u = \frac{A}{2r} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2r^2}{A}} \right) = \frac{453.3333}{2 \cdot 14.895} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 14.895^2}{453.3333}} \right) = 17.43 \text{ cm}$$

$$v = \frac{A}{2r} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2r^2}{A}} \right) = \frac{453.3333}{2 \cdot 14.895} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 14.895^2}{453.3333}} \right) = 13.00 \text{ cm}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{1 - \frac{2r^2}{A}}} \frac{-y}{r+y} = \frac{2400}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot 14.895^2}{453.3333}}} \frac{-y}{14.9+y} = 16\,500 \cdot \frac{-y}{14.9+y} \text{ kg/cm}^2$$

.....(112)

故に σ は表-7 の如くなる。

表-7. σ の 値

$y \text{ (cm)}$	-1.9	-1.4	-0.9	-0.4	0.6	1.1	1.6	2.1	2.5	> 2.5 < -1.9
$\sigma \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	約 2400	1710	1060	455	-640	-1130	-1600	-2040	-2370	∓ 2400

表-7 を圖示すれば圖-34 a) に示す σ 曲線となる。この圖につき公式 $\sigma_r = \mp 8\sigma/r_y$ により σ_r を求め表示すれば表-8 の如くなる。

表-8 を圖示すれば圖-34 に示す σ_r 曲線となる。

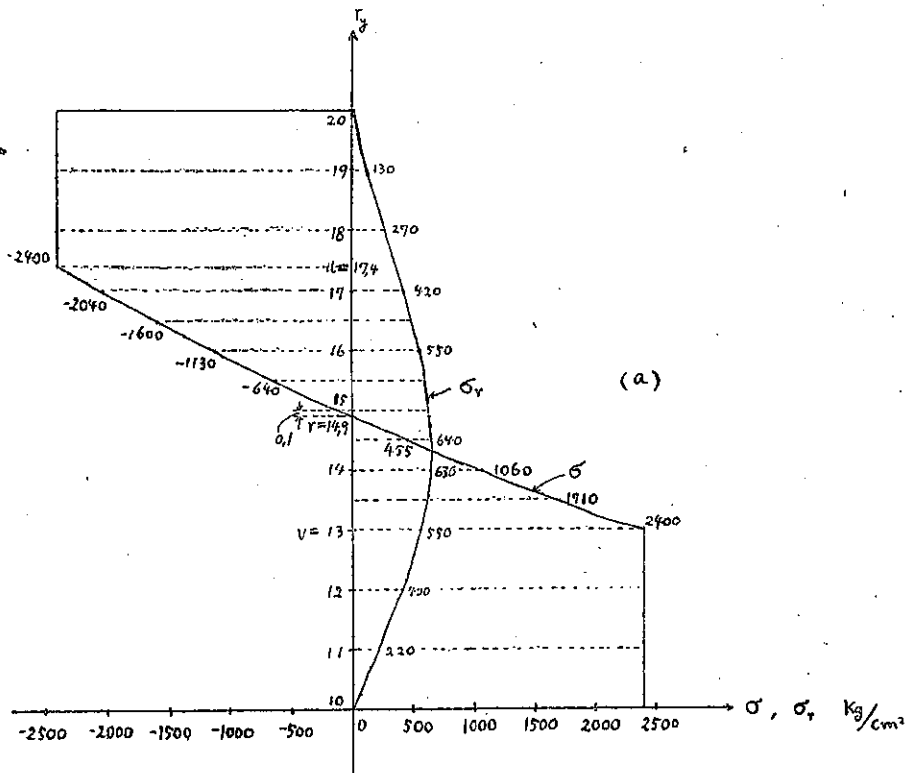
表-8. σ_r の 値

r_y (cm)	20	19	18	17.4	17	16.5	16	15.5	14.9
$-\bar{\sigma}$	0	2400	4800	6240	7130	8045	8730	9175	9370*
σ_r (kg/cm ²)	0	130	270	360	420	490	550	590	630

14.9	14.5	14	13.5	13	12	11	10	r_y (cm)
9370*	9285	8910	8225	7200	4800	2400	0	$\bar{\sigma}$
630	640	636	610	550	400	220	0	σ_r (kg/cm ²)

* 正負の σ の面は相等しい。

圖-34. a)



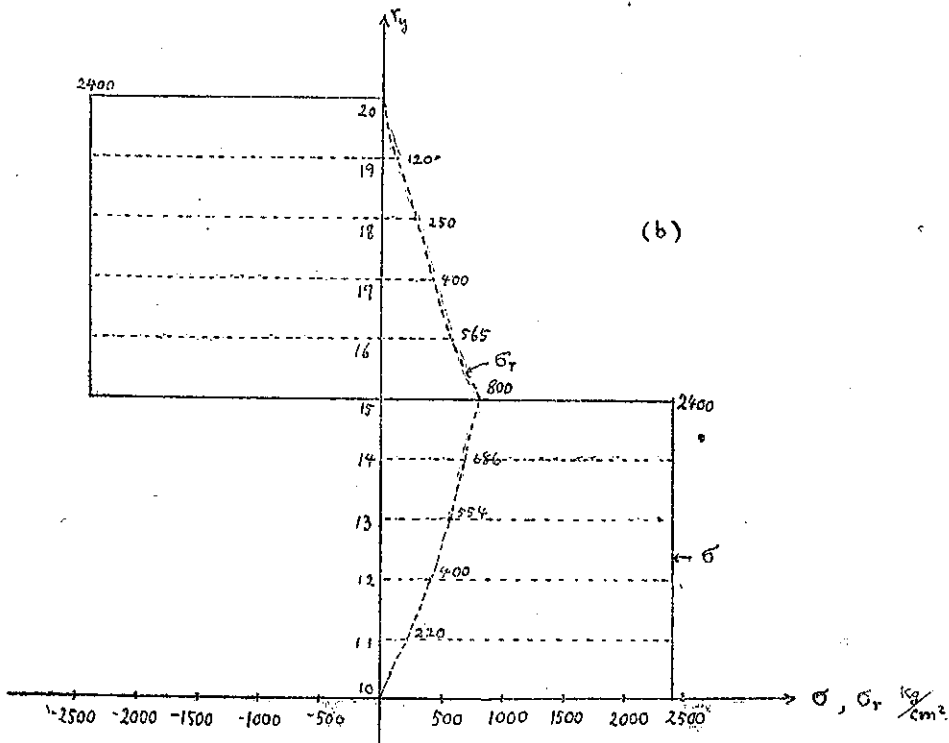
次に全面降伏状態に在る例 (=) につき σ_r を求めれば表-9 の如くなる (但しこれは假定的である)。
表-9 を圖示すれば圖-34 b) において點線にて示す σ_r 曲線となる。

表-9. σ_r の 値

r_y (cm)	20	19	18	17	16	15
$-\bar{y}$	0	2400	4800	7200	9600	12000
σ_r (kg/cm ²)	0	120	250	400	565	800

15	14	13	12	11	10	r_y (cm)
12000	9600	7200	4800	2400	0	\bar{y}
800	686	554	400	230	0	σ_r (kg/cm ²)

圖-34. b)



14. 降伏状態における直梁 (Nádai 氏の問題)⁴⁶⁾

a) 内外両側共に降伏状態に在る場合

圖-35 は直梁が曲げモーメントを受け, 内外両側は降伏状態に在り内方は弾性状態に在る場合の横断面及應力分布圖を示す。直梁の場合弾性部分は直線的分布をなすものと假定す。然らば

$$\sigma = \sigma_s \frac{y}{x'} \dots\dots\dots(113)$$

(86) 式より, $\sigma_s = \sigma_{-s}$ と置けば

$$0 = \int_F \sigma dF = -\sigma_s F_a + \sigma_s F_b + \int_{F_0} \sigma y dF = \sigma_s \left(-F_a + F_b + \frac{1}{x'} \int_{F_0} y dF \right)$$

これより

$$-F_a x' + F_b x' + \int_{F_0} y dF = 0 \dots\dots (114)$$

然るに $x' = y'$

故に

$$-F_a y' + F_b x' + \int_{F_0} y dF = 0 \dots\dots (115)$$

従つて dF, F_a, F_b を力と見做し 索多邊形を畫けば中立軸の位置が定まる。

特別の場合として矩形断面 bh に対しては(圖-36)

$$\int_{F_0} y dF = 0 \quad \text{故に} \quad F_a = F_b \dots\dots (116)$$

次に (87) 及 (113) 式より

$$M = \sigma_s y_a F_a + \sigma_s x_b F_b + \int_{F_0} \sigma y dF = \sigma_s (y_a F_a + x_b F_b) + \sigma_s \frac{1}{x'} \int_{F_0} y^2 dF$$

故に

$$M = \sigma_s \left(y_a F_a + x_b F_b + \frac{J_0}{x'} \right) \dots\dots (117)$$

特別の場合として、降伏状態の部分存せざる時は $F_a = F_b = 0, J_0 = J, x' = x, \sigma_s = \sigma_b$ となり (117) 式は $M = \sigma_b \frac{J}{x}$ となり普通の場合の式となる。

又、矩形断面 bh に対しては $F_a = F_b, y_b = x_b$ 故に (117) 式は

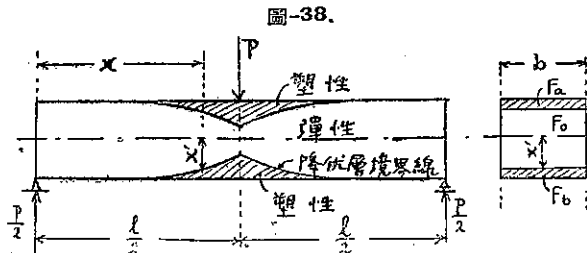
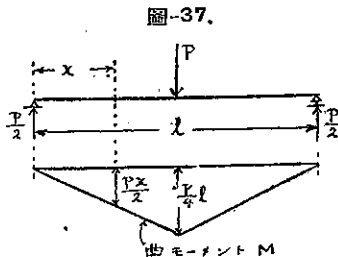
$$M = \sigma_s \left(2x_b F_b + \frac{J_0}{x'} \right) \dots\dots (118)$$

$$= \sigma_s \left\{ 2 \left(x' + \frac{h}{4} - \frac{x'}{2} \right) \cdot b \left(\frac{h}{2} - x' \right) + \frac{8bx'^2}{12} \right\} = \sigma_s b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{x'^2}{3} \right) \dots\dots (119)$$

(119) 式においてモーメント M を荷重及座標の函数として表し、 x' について解けば降伏層の限界線を得。これを降伏層境界線と稱することゝしよう。

b) 例題

圖-37 に示す如く單純梁 l の中央點に集中荷重 P が加はる場合を考ふるに、任意横断面 x におけるモーメントは $M = \frac{Px}{2}$ 、故に (119) 式より



$$\frac{Px}{2} = \sigma_s b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{x'^2}{3} \right) \dots\dots\dots(120)$$

これを x' につき解けば, 降伏層境界線の方程式として次式を得⁽⁹⁾。

$$x' = \sqrt{\frac{3h^2}{4} - \frac{3Px}{2b\sigma_s}} \dots\dots\dots(121)$$

次に梁が將に中央點において降伏状態に達せんとする時の荷重即ち降伏荷重 P_s は (120) 式において $x=l/2$, $x'=h/2$ と置き P につき解けば求められる。即ち

$$P_s = \frac{2}{3} \frac{bh^2}{l} \sigma_s \dots\dots\dots(122)$$

c) 一侧が降伏状態にあり他側弾性状態にある場合

圖-39 はこの場合の應力分布を示す。

$$\sigma = \sigma_s \frac{y}{x'} \dots\dots\dots(123)$$

(115) 式より $F_a = 0$ と置けば

$$F_b x' + \int_{x_0} y dF = 0 \dots\dots\dots(124)$$

或は $F_b x' - F_0 e' = 0$, 故に $x' = \frac{F_0 e'}{F_b} \dots\dots\dots(125)$

(117) 式より $F_a = 0$ と置けば

$$M = \sigma_s \left(x_0 F_b + \frac{J_2}{x'} \right) \dots\dots\dots(126)$$

(123) 式において, $y = -(h' - x')$ と置けば

$$\sigma_a = -\frac{h' - x'}{x'} \sigma_s \dots\dots\dots(127)$$

圖-39.

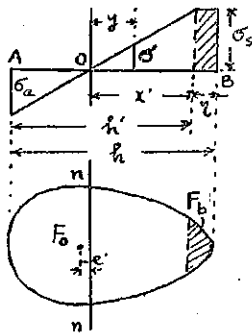
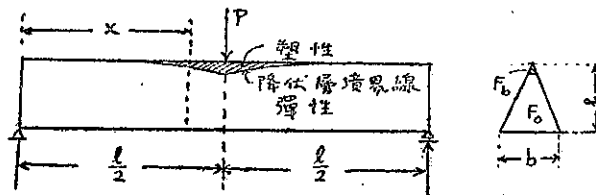


圖-40.



d) 例題

圖-40 に示す如く三角断面を有する単純梁が中央點に集中荷重 P を受ける場合を考ふ。圖-41 は横断面における應力分布を示す。圖において

$$\eta = \mu h, \quad b' = \mu b, \quad h' = (1 - \mu)h,$$

$$F = \frac{bh}{2}, \quad F_b = \frac{b'\eta}{2} = \frac{b'h}{2} \mu^2, \quad F_0 = F - F_b = \frac{bh}{2} (1 - \mu^2)$$

$$e_2 = \frac{2b+b'h'}{b+b'} \frac{h'}{3} = \frac{h}{3} \frac{1-\mu}{1+\mu} (2+\mu)$$

$$x' = \frac{F_b e_2'}{F_b} = \frac{F_b (e_2 - x')}{F_b}$$

これより

$$x' = \frac{F_b e_2}{F_b + F_0} = \frac{F_0 e_2}{F} \dots \dots (128)$$

これに上の値を代入して

$$x' = \frac{h}{3} (2+\mu)(1-\mu)^2 \dots \dots (129)$$

$$x_0 = x' + \frac{\eta}{3} = \frac{h}{3} (2-2\mu+\mu^2)$$

$$J_0 = \frac{b^2+4bb'+b'^2}{36(b+b')} h'^3 = \frac{bh^3(1-\mu)^3}{36(1+\mu)} (1+4\mu+\mu^2)$$

$$e' = e_2 - x' = \frac{h}{3} \frac{1-\mu}{1+\mu} (2+\mu)\mu^2$$

$$J_0 = J_0 + F_b e'^2 = \frac{bh^3(1-\mu)^3}{36(1+\mu)} (1+4\mu+\mu^2+8\mu^4+8\mu^5+2\mu^6)$$

故に (126) 式より

$$M = \sigma_s \left\{ \frac{h}{3} (2-2\mu+\mu^2) \frac{bh}{2} \mu^2 + \frac{3}{h(2+\mu)(1-\mu)^2} \frac{bh^3(1-\mu)^3}{36(1+\mu)} (1+4\mu+\mu^2+8\mu^4+8\mu^5+2\mu^6) \right\}$$

これより

$$M = \frac{F_0}{2} = \frac{1-4\mu^2+3\mu^4}{2-3\mu+\mu^3} \frac{bh^2}{12} \sigma_s \dots \dots (130)$$

(127) 式より, 下縁における應力度 σ_a は

$$\sigma_a = \frac{h'-x'}{x'} \sigma_s = \frac{1-\mu^3}{2-3\mu+\mu^3} \sigma_s$$

となる。

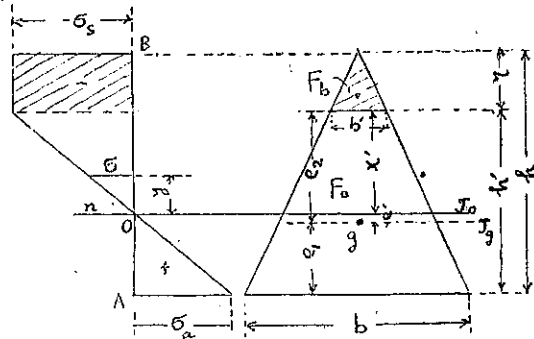
15. 結 論

實地構造における曲梁の應力度分布は實驗的測定によれば精密計算によるも尙計算値とは一致せざる點あるを認めれども, 實地設計に於て断面決定に對し用ひらるゝ應力度公式は近似式で満足であり, 且ラーメン節點が代用の曲梁により設計されてゐる事を前提として専ら曲梁につき考慮した。

著者の以上の研究内容を要約すれば次の如くなる。

- (イ) 従來の曲梁の實用公式を類別したこと, 即ち I. 式の構成及断面常數を梁軸に關して考へたるもの, II. 式の構成を中立軸につき, 断面常數は梁軸に關して考へたるもの, III. 式の構成又は断面常數を中立軸のみにつき考へたるもの, IV. 鐵筋コンクリート曲梁に對する式の 4 つに分けた。
- (ロ) 中立軸をもととする断面常數 Z_0 を導入し, III に屬する新公式を立てたこと
- (ハ) 新公式は Timoshenko の公式と内容において相等しき事を證せること
- (ニ) 断面常數 Z, Z_0 の圖解法及 Müller-Breslau, Timoshenko 及新公式への其の應用並に比較

圖-41.



- (ホ) 新断面常数 K_0 と従來の断面常数 K との關係及 K_0 の計算公式を出したこと
- (ヘ) 半徑方向の應力度公式及圖解
- (ト) 精密公式と新公式との比較
- (チ) 新断面常数 K を導入し横歪の影響を考慮せる場合の曲梁の應力度 σ の公式を出したこと
- (リ) 新公式を鉄筋コンクリート曲梁に應用したこと及偏心力の場合の式及圖解法を考慮したこと
- (ヌ) 鋸梁の突縁と腹との銜接計算に新公式を應用したこと
- (ル) 降伏状態の曲梁の應力度に對する公式及圖解法
- (ロ) 降伏状態の直梁の應力度に對する公式及圖解法

以上新公式の誘導に、中立軸を、考へる中心に置きし事及解法に圖解を採入れた事がこの研究の新しい試みである。圖解の特長は計算では面倒な複雑なる断面に對し迅速容易に目的を達し得るにある。

参 考 文 獻

- 40) 例へば中原益次郎, 柏原方勝: 金屬塑性學概要編, 昭和 10 年, 黒百合社發行。
- 41) Svida: Vestnik Inzhenerov i Tekhnikov, 411 頁, 1937.
- 42) 工博, 覺前睦夫: 材料力學新論 (フックの法則に従はざる材料力學に就て), 昭和 16 年 12 月。
- 43) A. Nádaï: Der bildsame Zustand der Werkstoffe, Berlin, 1927. 118~127 頁。
- 44) 應力歪線は種々なる形狀を示すも今は覺前博士に倣ひ圖-25 の場合に就て考へた。然し其他の場合も原則的に全く同様に取扱ふことができる。
- 45) これは 42), 95 頁 (209) 式, $0 = P = \sigma_0 r \int_{r_1}^{r_2} \frac{dF}{a + \gamma} + \sigma_s (F_1 - F_2) - \sigma_0 F_0$ に相當す。
- 46) これは 42), 95 頁, (210) 式 $M = -rP + \sigma_s (S_1 - S_2) + (r-a)\sigma_0 F_0 + a\sigma_s (F_1 - F_2) - \sigma_0 S_0$ に相當す。
- 47) この場合の公式は 42), 111 頁, 公式 (225)₁, (227)₁; 98 頁, (228), (229); 99 頁 (231) 式を用ふ。 γ は中立軸より外側に測りたるを正とし, モーメントは内側に張力生ずる場合を負としてゐる。
- 48) Nádaï: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. 117~120 頁。
Hütte des ingenieurs Taschenbuch, I. Band, 25 Auflage, (2. Abschn. IV. Mechanik der bildsamen Körper, Bearbeitet von A. Nádaï und E. Siebel.)
- 49) 實際は荷重 P の局部的作用あり, 精しくは實驗によらねばならぬ。降伏区間の彈性曲線については西原氏, Nádaï 氏の研究がある。40), 131~146 頁。 (昭. 17. 12. 2 受付)